

Matemática Financeira

Ernesto Coutinho Puccini

Copyright 2007. Todos os direitos desta edição reservados ao Sistema Universidade Aberta do Brasil. Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, do autor.

PRESIDENTE DA REPÚBLICA

Luiz Inácio Lula da Silva

MINISTRO DA EDUCAÇÃO

Fernando Haddad

Secretário de Educação a Distância

Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor do Departamento de Políticas em Educação a Distância – DPEAD

Hélio Chaves Filho

SISTEMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Celso Costa

COMISSÃO EDITORIAL DO PROJETO PILOTO UAB/MEC

Marina Isabel Mateus de Almeida (UFPR)

Teresa Cristina Janes Carneiro (UFES)

Antonio Roberto Coelho Serra (UEMA)

Jonilto Costa Sousa (UnB)

Vicente Chiaramonte Pires (UEM)

Ozório Kunio Matsuda (UEM)

Anderson de Barros Dantas (UFAL)

ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Ernesto Coutinho Puccini

projeto gráfico

Annye Cristiny Tessaro

Mariana Lorenzetti

diagramação

Annye Cristiny Tessaro

Victor Emmanuel Carlson

REVISÃO DE PORTUGUÊS

Renato Tapado

Sumário

Apresentação	008
--------------	-----

Unidade 1

Conceitos fundamentais, juros simples e compostos.	010
--	-----

Objetivos	011
-----------	-----

Conceitos fundamentais	012
------------------------	-----

Agente econômico	013
------------------	-----

Capital, operação financeira	014
------------------------------	-----

Juros ou juro, montante, valor presente	016
---	-----

Valor futuro, valor nominal	017
-----------------------------	-----

Fluxo de caixa	018
----------------	-----

Juros simples e compostos	023
---------------------------	-----

Definição de taxa de juros	023
----------------------------	-----

Juros simples e compostos	026
---------------------------	-----

Resumo	030
--------	-----

Unidade 2

Regime de juros simples (capitalização simples)	033
---	-----

Objetivos	034
-----------	-----

Introdução	035
------------	-----

Fórmulas básicas	035
------------------	-----

Juro	035
------	-----

Montante	039
----------	-----

Juro comercial	045
Taxa de juros diária comercial, Juro comercial	040
Descontos - desconto racional e desconto comercial	046
Conceito de desconto	047
Desconto racional (por dentro)	047
Desconto comercial (desconto bancário ou por fora)	050
Equivalência de capitais	067
Em desconto racional	068
Em desconto comercial	069
Resumo	076

Unidade 3

Regime de juros compostos	078
Objetivos	079
Introdução, Fórmulas básicas	080
Montante	080
Capital ou valor presente	082
Capitalização e descontos	083
Taxas de juros em regime de juros compostos	085
Taxa de juros efetiva	087
Taxa de juros nominal	088
Taxas de juros equivalentes	089
Desconto em regime de juros compostos	092

Desconto racional ou real	092
Valor presente de um fluxo de caixa	100
Taxa interna de retorno de um fluxo de caixa	103
Equivalência de fluxos de caixa	105
Resumo	110

Unidade 4

Rendas ou anuidades	112
Objetivos	113
Rendas ou anuidades	114
Classificação das rendas	115
Estudo das rendas	120
Renda temporária, certa, periódica e postecipada	120
Renda postecipada e imediata	121
Renda postecipada e diferida	132
Renda temporária, certa, periódica e antecipada	138
Renda antecipada e imediata	139
Renda antecipada e diferida	147
Taxa de juros em rendas	148
Rendas perpétuas	150
Resumo	154

Unidade 5

Sistemas de amortização	156
-------------------------	-----

Objetivos	157
Introdução	158
Sistemas de prestação constante	159
Modelo postecipado e imediato	159
Tabela price	166
Modelo postecipado e diferido	167
Modelo de antecipado e imediato	172
Sistema de amortização constante – SAC	176
Sistema do montante	183
Sistema americano	184
Sistema do sinking fund	186
Resumo	191

Unidade 6

Inflação e correção monetária (CM)	6.1
Introdução	6.2
Índices de preços	6.3
Índice e taxa de inflação (ou de CM)	6.4
Taxas de juros aparente e real	6.6
Índice de CM como inflator e como deflator	6.8
Financiamentos com correção monetária	6.10
Financiamentos com correção pré-fixada	6.10
Financiamentos com correção pós-fixada	6.11
Resumo	6.14

Apresentação

Ao iniciar os estudos da disciplina Matemática Financeira, algumas perguntas inevitavelmente passam pela sua cabeça: qual o seu campo de aplicação? qual a sua utilidade prática ? ela fará alguma diferença em minha vida?

Bem, o campo de aplicação dessa disciplina é bastante amplo pois suas técnicas são necessárias em operações de financiamento de quaisquer naturezas: crédito a pessoas físicas e empresas, financiamentos habitacionais, crédito direto ao consumidor e outras. Também são necessárias em operações de investimentos mobiliários nos mercados de capitais. Em ambas as situações, é o uso dessas técnicas que permite conhecer o custo e o retorno dessas operações, permitindo tomadas de decisão mais racionais; são elas também que permitem determinar o valor das prestações devidas pelas transações efetuadas em parcelas. No mundo dos negócios, seu conhecimento é absolutamente imprescindível, uma vez que os custos dos financiamentos dados e recebidos são peças centrais do sucesso empresarial.

Este livro pretende lhe ajudar a desvendar essas técnicas para que você possa gerir os seus interesses financeiros com racionalidade e eficiência.

A primeira unidade do livro é dedicada ao conhecimento da nomenclatura a ser utilizada ao longo do texto, à explicitação das principais variáveis cujas relações serão estudadas ao longo do livro e à conceituação de taxa de juros e regime de juros simples (capitalização simples) e de juros compostos (capitalização composta).

A segunda unidade estuda o regime de capitalização simples e a terceira unidade, o regime de capitalização composta. Para esses dois regimes de capitalização se estudam: suas relações fundamentais, questões relativas às taxas de juros, operações de descontos e a equivalência de capitais. Introduz-se também o conceito de valor presente líquido e de taxa interna de retorno de um fluxo de caixa (este último apenas para capitalização composta). O conhecimento desses conceitos é necessário para os estudos subseqüentes das rendas e sistemas de amortização.

A quarta unidade estuda as anuidades ou rendas: sua definição, classificação e principais modelos. Para esses modelos o livro evidencia a relação de equivalência existente entre os pagamentos (recebimentos) da renda, os seus valores presentes e futuro e as demais variáveis envolvidas. Essa unidade é introdutória ao estudo dos sistemas de amortização constantes da próxima unidade.

A quinta unidade estuda os diversos sistemas de amortização de dívidas que tem vasta aplicação prática. Especial atenção é dada aos modelos de prestação constante e amortização constante por sua relevância na vida cotidiana.

A sexta unidade introduz o estudo da correção monetária de valores financeiros. O conhecimento de suas técnicas é importante porque a correção monetária se aplica a praticamente todos os contratos com duração superior a um ano.

No decorrer dos estudos lhe serão sugeridas atividades complementares com a finalidade de facilitar o aprendizado. O livro também traz alguns instrumentos para iniciá-lo na utilização de calculadoras financeiras.

Esperamos que você tenha sucesso nos estudos que se propôs a fazer ao iniciar esta disciplina. Nossos votos de um bom percurso!

Unidade 1

**Conceitos fundamentais. Juros
simples e compostos**

Objetivos

A primeira unidade do curso lhe apresentará a nomenclatura que será utilizada no curso e alguns conceitos iniciais que serão centrais no desenvolver das suas atividades, com ênfase para: equação básica da matemática financeira, fluxo de caixa e taxa de juros. Esta unidade tem os seguintes objetivos:

- identificar de modo claro as variáveis envolvidas no estudo da matemática financeira;
- conhecer a nomenclatura utilizada no curso;
- conhecer a equação fundamental da matemática financeira;
- construir fluxos de caixa de operações financeiras;
- conceituar taxa de juros;

compreender a diferença entre regime de juros simples e regime de juros compostos.

Para facilitar seu aprendizado você deverá dominar com segurança os seguintes assuntos:

- álgebra elementar;
- funções e sua representação gráfica.

Caso tenha alguma dificuldade com esses pontos faça uma revisão prévia. O site <http://www.somatematica.com.br/index2.php> é excelente para orientar o aprendizado de matemática em nível médio e superior.

Conceitos fundamentais

A **Matemática Financeira** é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo; para isso cria modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo. Para iniciar o seu estudo, é necessário que se estabeleça uma linguagem própria para designar os diversos elementos que serão estudados e que esses elementos sejam contextualizados com precisão. Os elementos básicos do estudo da disciplina serão inicialmente vistos através de uma situação prática para, na sequência, defini-los.

Situação prática 1.1: Um gerente de uma empresa necessita de um empréstimo no valor de R\$ 100.000,00 para atender às necessidades de capital do seu negócio. Um banco, após analisar a solicitação anuiu ao pedido e propôs um empréstimo que deverá ser pago após quatro meses; o banco depositará R\$ 100.000,00 na conta da empresa e esta pagará ao banco R\$ 120.000,00 ao final dos quatro meses.

Essa situação permite a você, leitor, identificar os elementos básicos que serão estudados em Matemática Financeira. Nessa situação você pode ver que:

- existiu uma transação financeira entre o banco e o cliente que será denominada de operação financeira;
- essa operação financeira tem um valor inicial de \$ 100.000,00 que será denominado de capital e um valor final de \$ 120.000,00 que será denominado montante;

A Matemática Financeira reconhece que o dinheiro tem valor no tempo. É intuitivo que cem reais em seu bolso tem mais valor do que cem reais que chegarão às suas mãos daqui a seis meses.

Veja um filme a respeito em:

<http://br.youtube.com/watch?v=OI7pf3i31uE>

- essa operação financeira tem uma duração de quatro meses;
- há uma diferença entre o montante e o capital que será denominado juro da operação. Esse juro será um custo para a empresa e uma remuneração para o banco; e
- existe um agente que empresta o dinheiro e que é denominado credor e um agente que toma o dinheiro emprestado e que é denominado devedor.

Saiba mais...

Vá a LC 11 e leia o texto intitulado “Oferta e demanda de moeda”, disponível em:
http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC11.doc.

O estudo da Matemática Financeira exige uma definição precisa desses termos, o que é proposto a você nas próximas páginas.

O autor considera “ato econômico” qualquer ato praticado por pessoas (físicas ou jurídicas) que tenha consequências financeiras. Na situação prática 1.1, mostrada acima, o ato econômico praticado foi o empréstimo feito pelo banco à empresa (porque gerou consequências financeiras para as duas partes).

Agente econômico

Agente econômico é qualquer entidade física ou jurídica capaz de praticar um ato econômico. Assim, entende-se por agente econômico qualquer pessoa, empresa ou instituição que possa praticar um ato econômico: uma venda, uma compra, um empréstimo ou quaisquer operações que tenham consequências financeiras. Na situação prática mostrada, a empresa e o banco são os agentes econômicos envolvidos.

Capital

Capital (C) é o valor de um ativo representado por moeda e/ou direitos passíveis de uma expressão monetária, no início de uma operação financeira. Na situação prática 1.1, o capital corresponde ao valor de \$ 100.000,00. De acordo com essa definição pode-se considerar como capital:

- numerário ou depósitos bancários disponíveis;
- títulos de dívida expressos em valor no início de um processo financeiro;
- ativos físicos devidamente avaliados: prédios, máquinas, veículos e outros.



Neste último caso, a avaliação deve ser aceita pelas partes envolvidas como sendo o valor correto do ativo no início de um processo financeiro.

Para que a caracterização de outras noções básicas importantes seja feita com clareza, o capital será visto como um ativo que pode ser cedido por um (vários) agente(s) econômico(s) a outro(s), mediante condições previamente estabelecidas.

Operação financeira

Operação financeira é o ato econômico pelo qual determinado agente econômico possuidor de capital - denominado credor – o transfere a outro agente econômico - denominado tomador - mediante condições previamente estabelecidas, que normalmente envolvem:

- a remuneração paga pelo tomador ao credor pela utilização do capital;

Essa transferência de capital pode ser um empréstimo ou um investimento.

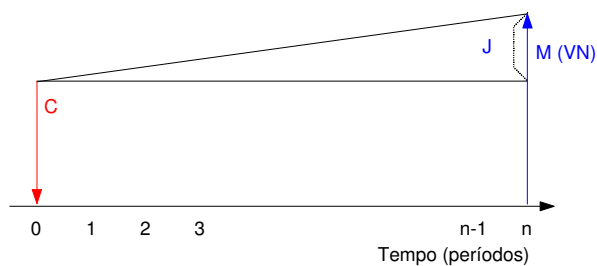
- os prazos e formas de devolução do capital e da remuneração acordada;
- as garantias de pagamento que o tomador apresentará ao credor.

Este livro estudará os dois primeiros itens mas, não abordará o último.

A operação financeira será sempre formalizada através de um documento que, genericamente, será denominado de título de crédito.

Uma operação financeira pode envolver vários tomadores e vários credores.

Considere uma operação financeira em que o credor cede um capital C ao tomador por um tempo constituído de n períodos, ao fim do qual o tomador devolverá ao credor a soma do capital e da remuneração acordada. Essa operação está sintetizada na figura 1.



FÓRMULA BÁSICA: $M = C + J$

Figura 1: Operação financeira

Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da configuração mostrada nessa figura, podem-se definir alguns conceitos básicos da disciplina.

Juros ou juro

Juro (J) é o valor da remuneração do capital (C) acordado entre o credor e o tomador em uma determinada operação financeira.

Montante

Denomina-se montante* (M) a soma do capital (C) e do juro (J) que foi acordado na operação financeira e que é devido ao final da mesma. Esta definição mostra a você que se verifica a seguinte relação:

$$M = C + J$$

que é denominada equação básica da Matemática Financeira.

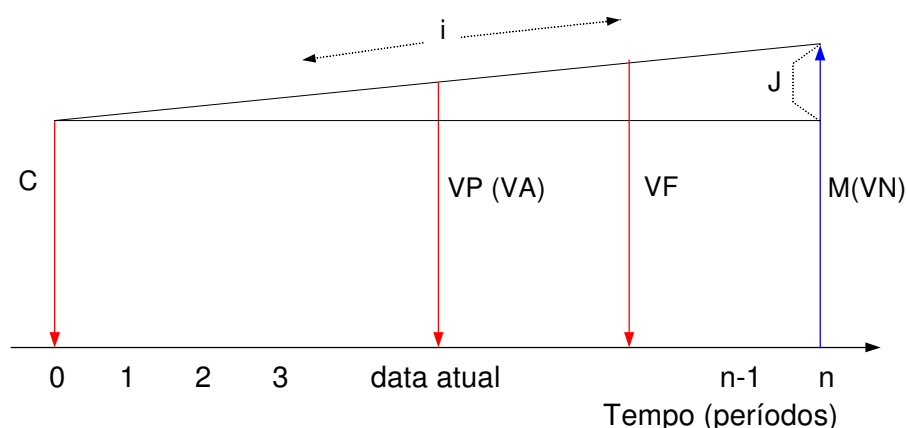
GLOSSÁRIO

*Montante – é a soma do capital e do juro de uma operação financeira.

Valor presente

Valor presente (PV) é o valor de uma operação financeira na data presente. É um valor intermediário entre o montante (M) e o capital (C), conforme se pode ver na figura 2.

As calculadoras financeiras utilizam a denominação PV para o valor presente ou atual.



$$\text{FÓRMULA BÁSICA: } M = J + C$$

Figura 2: Conceitos e definições básicas

Fonte: elaborada pelo autor.

Essa nomenclatura se justifica para operações iniciadas no passado e que se prolongam até uma certa data futura. Observe

que, para uma operação financeira iniciada hoje o capital e o valor presente coincidem; por essa razão, a expressão valor presente é, freqüentemente, utilizada como sinônima de capital, apesar da diferença conceitual existente. Mais à frente você entenderá o porquê desta simplificação.

Valor futuro

Valor futuro (FV) é o valor de uma operação financeira em qualquer data compreendida entre a data presente e o vencimento da operação. Verifique na figura 2. De modo análogo ao valor presente e capital, também o valor futuro é, freqüentemente, tomado como sinônimo de montante.

As calculadoras financeiras utilizam a denominação FV para o valor futuro.

Valor nominal

Valor nominal (VN) é o valor de uma operação financeira constante do título de crédito que a documenta. Pode ser tanto o valor inicial - capital -, como o valor final da operação – montante. Alguns autores adotam a nomenclatura “valor de face” ao invés de “valor nominal”. Freqüentemente valor nominal e valor futuro (FV) são tomados como sinônimos apesar da diferença conceitual existente.

Atividades de aprendizagem

1. Retorne à situação prática 1.1 descrita inicialmente e procure identificar cada um dos elementos definidos em uma operação financeira.
2. Escreva com suas próprias palavras o conceito de juro. Construa um exemplo de uma operação financeira que caracterize bem o conceito.

3. Dê o significado de valor nominal. O valor nominal é necessariamente o capital? ou o montante? por quê?
4. Faça uma distinção entre capital e valor presente. Crie um exemplo que ilustre, adequadamente, esses conceitos. Por que razão esses conceitos são usualmente vistos como sinônimos?
5. Qual a fórmula básica da Matemática Financeira?
6. Discuta essas questões com seus colegas e formule uma resposta única valendo-se dos chats e fóruns disponíveis.

Fluxo de caixa

Situação prática 1.2: você entrou numa loja para comprar uma geladeira. O vendedor lhe informa que o preço à vista da geladeira é \$ 1.500,00. Informa também que o pagamento pode ser financiado em quatro pagamentos iguais mensais de \$ 400,00 através de uma instituição financeira (IF). Você faz a compra e opta pelo financiamento, de modo que terá quatro desembolsos mensais sucessivos de R\$ 400,00; é o seu fluxo de caixa dessa operação. A instituição financeira (IF) pagará para a loja o valor à vista de \$ 1.500,00 e receberá de você as quatro prestações mensais. A Figura 3 representa graficamente as entradas e saídas de dinheiro para cada um dos agentes envolvidos; isso é um fluxo de caixa*.

GLOSSÁRIO

* *Fluxo de caixa é uma sucessão de entradas e saídas de dinheiro (ou ativos expressos pelo seu valor monetário) no tempo.*

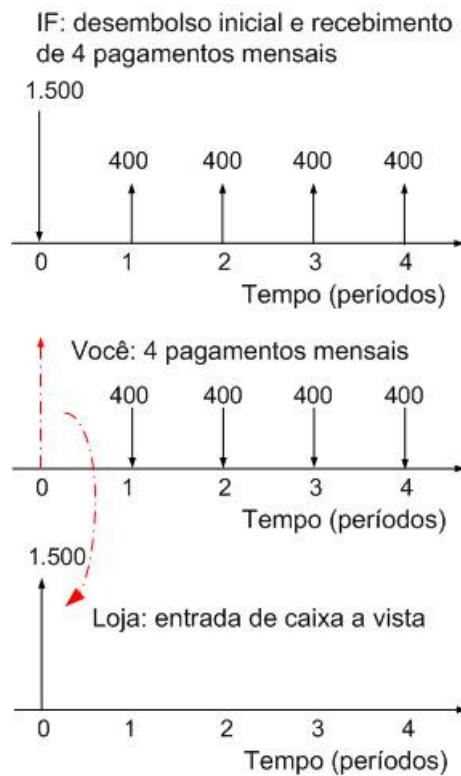


Figura 3: Entradas e saídas de dinheiro no tempo.

Fonte: elaborada pelo autor.

Essas entradas e saídas podem ser representadas por um diagrama, denominado diagrama de fluxo de caixa*, como mostrado na figura 3, a partir do qual se apontarão as convenções utilizadas para a sua elaboração.

Regras para desenhar um fluxo de caixa:

- no eixo das abscissas (horizontal) representam-se os períodos de tempo; e
- no eixo das ordenadas (vertical) representam-se os valores das entradas e saídas de dinheiro.

Essas entradas e saídas são representadas por flechas orientadas, indicativas dos valores considerados:

- entrada de dinheiro: flechas com orientação positiva,

GLOSSÁRIO

* *Diagrama de fluxo de caixa é a representação gráfica ou em tabela de um fluxo de caixa.*

- saída de dinheiro: flechas com orientação negativa.

A dimensão dessas flechas não considera a proporcionalidade entre elas e os valores representados; as figuras são meramente qualitativas.

Na figura 3 tem-se para:

- a instituição financeira: uma saída de caixa de 1.500,00 no tempo $n = 0$ (zero) e quatro entradas de caixa sucessivas no valor de 400,00;
- você: quatro saídas de caixa sucessivas de 400,00 (seu benefício como contrapartida foi a aquisição da geladeira). Mais rigorosamente, você receberia R\$ 1.500,00 da IF e os repassaria à loja;
- loja: recebeu à vista o valor de 1.500,00 pela venda que lhe fez da geladeira.

Os pagamentos mensais de \$ 400,00 são nominalmente iguais, porém, financeiramente distintos, pois se referem a datas diferentes e não são, portanto, comparáveis.

Saiba mais...

Vá à leitura complementar 1.2 “Valor do dinheiro no tempo” disponível em http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC11.doc.

O fluxo de caixa também pode ser representado em forma de tabela (S_j = saída de caixa, E_i = entradas de caixa), como mostrado abaixo para os três agentes envolvidos.

Fluxo de caixa - IF					
Tempo	0	1	2	3	4
Valor	1.500	400	400	400	400
E_j/S_j	S_0	E_1	E_2	E_3	E_4

Fluxo de caixa - você					
Tempo	0	1	2	3	4
Valor	1.500	400	400	400	400
E_j/S_j	E_0	S_1	S_2	S_3	S_4

Fluxo de caixa - loja					
Tempo	0	1	2	3	4
Valor	1.500	400	400	400	400
E_j/S_j	E_0				

Tabela 1: Fluxos de caixa de um financiamento.

Fonte: elaborada pelo autor.

A Matemática Financeira estuda as inter-relações entre essas diversas variáveis e os seus problemas estão basicamente relacionados com entradas e saídas de dinheiro no tempo.

Nunca deixe de considerar que uma operação financeira envolve duas partes (o credor e o tomador) com fluxos de caixa absolutamente simétricos. A que é entrada de caixa para uma das partes, é saída de caixa para a outra parte e vice-versa; verifique essa simetria no seu fluxo de caixa e no fluxo de caixa da IF.

Atividades de aprendizagem

7. Construa o seu fluxo de caixa para um financiamento em aquisição de um eletrodoméstico cujo valor à vista é \$ 1.000,00 e pelo qual você vai pagar 4 prestações mensais, sucessivas,

iguais, no valor de \$ 280,00 cada uma, vencendo a primeira em 30 dias da data da compra.

8. O Banco Alfa emprestou a Francisco Silva a importância de \$ 1.000,00, por 60 (sessenta) dias. Ao final desse prazo, Francisco deverá devolver ao Banco um total de \$ 1.300,00:1. Identifique o capital, o montante e determine o valor do juro devido, 2. Construa o fluxo de caixa, observando as convenções dadas.

9. Você foi a uma loja e comprou uma TV nas seguintes condições: uma entrada de \$ 100,00 e mais dois pagamentos a 30 e 60 dias no valor de \$ 150,00 cada. Construa o fluxo de caixa dessa operação para você na qualidade de comprador e para a loja na qualidade de vendedora. Compare os dois fluxos de caixa.

10. Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa no valor de \$5.000,00 que deverá ser pago daqui a três meses. Construa os fluxos de caixa do banco e do tomador do empréstimo.

11. Um carro no valor de \$ 25.000,00 foi financiado para pagamento em 12 parcelas iguais e mensais de \$ 2.450,00, vencendo a primeira daqui a um mês. Construa os fluxos de caixa associados ao financiador e ao financiado.

Discuta as soluções dessas questões com seus colegas nos chats e fóruns disponíveis.

Juros simples e juros compostos

Este tópico procurará levá-lo a entender o conceito de custo financeiro e a conhecer os modos pelos quais se calcula o juro devido em uma operação financeira. Uma vez mais, se utilizará uma situação prática concreta para que você seja levado a perceber a necessidade de mecanismos de comparação entre situações semelhantes, mas não iguais.

Situação prática 1.3: uma empresa necessita de certo volume de capital para atender as necessidades do seu negócio. Ela tem em mãos duas propostas feitas por bancos:

- uma delas para receber \$ 100.000,00 hoje e pagar \$120.000,00 após quatro meses; e
- uma segunda para receber hoje \$ 95.000,00 e pagar \$ 116.000,00 daqui a quatro meses.

Imagine que as duas propostas atendam as necessidades da empresa e se pergunte: qual a melhor proposta? O juro da primeira proposta é de \$ 20.000,00 enquanto que o juro da segunda proposta é \$ 16.000,00. Esses números que espelham os juros a serem pagos são absolutos e, portanto, não são diretamente comparáveis, porque suas bases iniciais são diferentes (\$ 100.000 e \$ 95.000); assim, torna-se difícil verificar qual a melhor das duas propostas. Nesta Unidade serão tratados alguns conceitos que ajudarão a fazer esse julgamento.

Definição de taxa de juros

A grande preocupação dos agentes financeiros é saber o custo do dinheiro nos mercados. Esse custo é dado pela taxa de juros (i)* que representa o custo de cada unidade de capital por

unidade de tempo. Assim, a taxa de juros (i)*, expressa em forma unitária, é a relação entre o juro gerado numa operação financeira e o capital nela empregado; observe que essa taxa de juros está relacionada com o tempo da operação financeira. Denomine-se de J o valor do juro gerado por um capital C num determinado tempo, expresso em número de períodos; a taxa de juros para esse intervalo de tempo, expressa em forma unitária, é definida como:

$$i = \frac{J}{C} \text{ ap} \quad (1.1)$$

ap = ao período (de tempo)

Essa taxa de juros pode ser expressa também em forma percentual, bastando ajustar a fórmula acima.

$$i = \frac{J}{C} * 100\% \text{ ap} \quad (1.2)$$

ap = ao período de tempo.

Importante!

Os números que expressam a taxa de juros são acompanhados de uma expressão que indica a temporalidade da taxa. Essas expressões são abreviadas da seguinte forma:

ad = ao dia, am = ao mês,

at = ao trimestre, aq = ao quadrimestre,

as = ao semestre e aa = ao ano.

Exemplo 1.1: um capital de \$ 1.000,00 rende juros de \$ 20,00 em dois meses. Qual a taxa de juros?

Solução: a resposta vem da própria definição de taxa de juros e dos dados, a saber:

GLOSSÁRIO

* a taxa de juros (i)*, expressa em forma unitária, é a relação entre o juro gerado numa operação financeira e o capital nela empregado.

$$C = 1.000,00$$

$$J = 20,00$$

Aplicando as fórmulas da taxa de juros (1.1 e 1.2), tem-se:

$$i = J/C = 20/1000 = 0,02 \text{ ab (ao bimestre) } \text{ Forma unitária}$$

$$i = (J/C) \times 100 = 2\% \text{ ab (ao bimestre) } \text{ Forma percentual}$$

Exemplo 1.2: um capital de \$ 1.000,00 rende juros de \$ 60,00 em seis meses. Qual a taxa de juros?

Solução: análoga ao exemplo anterior:

$$C = 1.000,00$$

$$J = 60,00$$

$$i = J/C = 60/1.000 = 0,06 \text{ as (ao semestre) } \text{ Forma unitária}$$

$$i = (J/C) \times 100 = 6\% \text{ as (ao semestre) } \text{ Forma percentual}$$

Observe, em cada caso, a referência temporal; no primeiro exemplo, a taxa de juros está expressa para o bimestre, porque os juros foram gerados em dois meses, enquanto, no segundo exemplo, a taxa de juros está expressa em semestre, que é o período no qual os juros foram gerados. Essa referência temporal é essencial e não pode ser esquecida.

Com essas definições, retome a situação prática 1.3 e procure verificar qual o custo de cada proposta.

Primeira proposta

O juro devido é:

$$J = M - C = 120.000 - 100.000 = 20.000$$

e a taxa de juros proposta pode ser calculada:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{20.000}{100.000} = 0,2 \text{ aq ou}$$

$$i = \frac{J}{C} = \frac{20.000}{100.000} \times 100 = 20\% \text{ aq (ao quadrimestre)}$$

Segunda proposta

O juro devido é:

$$J = M - C = 116.000 - 95.000 = 21.000$$

e a taxa de juros proposta pode ser calculada:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{21.000}{95.000} = 0,221 \text{ aq ou}$$

$$i = \frac{J}{C} = \frac{21.000}{95.000} * 100 = 22,10\% \text{ aq}$$

Então o custo do dinheiro para a primeira proposta é 20% aq e para a segunda proposta é 22,10% aq. A comparação é agora direta e imediata e o levaria a escolher a primeira proposta por ser a mais barata.

Observe que a unidade de tempo utilizada é o quadrimestre (4 meses).

Juros simples e compostos

Situação prática 1.4: dois bancos mantêm uma linha de crédito que empresta e credita em conta do interessado de \$ 1.000,00, com taxa de juros de 10% aa (ao ano) em 10/10/X0 para ser pago integralmente, de uma só vez, em 5 anos, ao final da operação financeira. Entretanto, o banco Alfa exige um pagamento de \$ 1.500,00 ao final dos cinco anos e o banco Beta um pagamento de \$ 1.610,51 ao final do mesmo período. Como pode ser isto? A taxa de juros, os prazos e os capitais não são os mesmos? Como esses resultados podem ser diferentes?

A resposta a essa questão se prende ao fato de existirem dois regimes de juros, denominados regime de juros simples ou de capitalização simples e regime de juros compostos ou de

capitalização composta com lógicas internas de cálculo diferentes.

A seguir mostram-se os cálculos financeiros dos dois bancos.

Regime de juros simples ou de capitalização simples.

O banco Alfa usa este regime no qual o juro periódico é calculado sempre sobre o valor inicial da operação (C).

A fórmula aplicada é aquela mostrada na definição de taxa de juros (1.1):

$$i = \frac{J}{C} \text{ ou } J = C * i$$

O saldo devedor (capital mais juros) cresce numa progressão aritmética de razão igual a 100, como pode ser visto na Tabela 2, abaixo.

Data (ano)	Período	Base de cálculo (C)	SD _i	Juros (J= C*i)	SD _f = SD _i +J
10/10/X0	0 - 1	1.000	1.000	100	1.100
10/10/X1	1 - 2	1.000	1.100	100	1.200
10/10/X2	2 - 3	1.000	1.200	100	1.300
10/10/X4	3 - 4	1.000	1.300	100	1.400
10/10/X5	4 - 5	1.000	1.400	100	1.500

SD_i: saldo no início do período

SD_f: saldo no final do período

Tabela 2 – Regime de juros simples

Regime de juros simples: a base de cálculo do juro (C) não se altera ao longo do tempo.

Neste regime de juros, a base de cálculo é sempre o capital inicial (C = \$ 1.000), e você pode observar que o juro devido em cada período de incidência é constante. A base de cálculo não se altera ao longo do tempo. Os juros gerados em cada um dos períodos são registrados, mas só serão pagos ao final da operação financeira; ou seja, somente ao final da operação

financeira os juros devidos são agregados ao capital inicial para nova operação ou para pagamento e liquidação da operação atual.

Regime de juros compostos ou de capitalização composta

O banco Beta se vale deste regime no qual o juro gerado em cada período é somado ao saldo do período imediatamente anterior e passa por sua vez a sofrer incidência de juros; a este processo de se somar o juro do período anterior ao saldo inicial do período presente para constituir uma nova base de cálculo do juro, se dá o nome de **capitalização de juros**. Por conseqüência, a base de cálculo dos juros muda sucessivamente pela agregação dos juros do período anterior. A Tabela 3 mostra isso com clareza. A fórmula para cálculo se transforma em:

$$i = \frac{J}{SD_i} \text{ ou } J = SD_i * i$$

e este saldo inicial de período só coincide com o capital C no primeiro período, conforme se pode ver na tabela 3.

Data (ano)	Período	Capital (C)	Base de cálculo	Juros (J= SD _i *i)	SD _f = SD _i +J
10/10/X0	0 - 1	1.000	1.000	100	1.100
10/10/X1	1 - 2		1.100	110	1.210
10/10/X2	2 - 3		1.210	121	1.331
10/10/X4	3 - 4		1.331	133,1	1.461
10/10/X5	4 - 5		1.461	146,41	1.611

SD_i: saldo no início do período

SD_f: saldo no final do período

Observe que o saldo inicial de um período é igual ao saldo final do período anterior.

Tabela 3 – Regime de juros compostos.

Regime de juros compostos: a base de cálculo do juro (SD_i) se altera período a período pela capitalização do juro do período anterior.

A **capitalização** (agregação dos juros intermediários ao capital) dos juros intermediários é a responsável pela diferença (\$1.610,51 e \$1.500) observada nos resultados finais obtidos em cada um dos sistemas de juros.

Atividades de aprendizagem

19. O Banco Alfa emprestou a Francisco Silva a importância de \$ 1.000,00, por 60 (sessenta) dias. Ao final desse prazo, Francisco deverá devolver ao banco um total de \$ 1.300,00. 1. Determine a taxa de juros da operação em suas formas unitária e percentual, 2. Qual seria a taxa de juros se a operação fosse feita com um prazo de 90 (noventa) dias? R: a) 30% ab (ao bimestre); b) 30% at (ao trimestre)

20. O Banco Fênix emprestou a João Cordeiro \$ 5.000,00 por um prazo de 90 (noventa) dias a uma taxa de juros de 15% at (ao trimestre). Que montante João deverá pagar ao Banco Fênix ao final da operação? R: M = 5.750,00.

21. O Banco Fênix emprestou a Pedro Cardoso \$ 5.000,00 a uma taxa de juros convencionada de 5% am (cinco por cento ao mês). Esse empréstimo deverá ser pago de uma só vez ao final de quatro meses. Determine o montante a ser pago: (1) em regime de juros simples e (2) em regime de juros compostos. R: 1) 6.000,00; 2) 6.081,84. Dica: construa a planilha para cálculo de juros.

22. Uma operação financeira feita por um período de seis meses a uma taxa de juros de 20% determinou um montante de \$ 1.000,00. Qual o valor do capital originário? R: C = \$ 833,33.

Resumo

Esta unidade lhe colocou em contato com a nomenclatura básica da disciplina, permitindo-lhe o domínio do código básico de comunicação que será utilizado ao longo do curso. Você também aprendeu a equação básica da Matemática Financeira e o conceito de fluxo de caixa e as formas de sua representação. A seguir, você entrou em contato com a definição de taxa de juros e os modelos de formação dos juros nos regimes de capitalização simples e composta.

É importante ressaltar que a diferença entre os dois regimes de juros decorre do tratamento dado aos juros intermediários. No regime de capitalização simples, os juros intermediários são apenas créditos devidos ao interessado, que não interferem na base de cálculo dos juros de períodos futuros. No regime de capitalização composta os juros intermediários são agregados ao principal para o cálculo dos juros de períodos futuros, determinando mudanças na base de cálculo.

Você fez as leituras do texto base e dos textos complementares, executou as atividades, resolveu os exercícios propostos e entendeu perfeitamente todos os pontos?

Se a resposta for negativa retorne aos pontos não compreendidos ou não lidos ou ainda às atividades e exercícios não executados até que você tenha a certeza de dominar completamente as idéias e conceitos desenvolvidos.

Se a resposta for positiva você está de parabéns. Como resultado do seu esforço você conheceu na Unidade 1 a nomenclatura básica da disciplina que lhe permite o domínio do código básico de comunicação que será utilizado ao longo do curso, apreendeu a noção de valor de dinheiro no tempo, a equação básica da matemática financeira, o conceito de fluxo de caixa e as formas de sua representação, a definição de taxa de juros (que é o custo

do dinheiro) e o mecanismo de operação dos regimes de juros simples e de juros compostos. Portanto, você está apto a iniciar a segunda unidade do curso.

Unidade 2

Regime de juros simples (capitalização simples)

Objetivos da unidade

Esta unidade lhe apresentará a modelagem do regime de juros simples, os conceitos de proporcionalidade e equivalência de taxas de juros, as bases das operações de desconto de títulos e os conceitos de equivalência de capitais nesse regime de juros. Por conseqüência, esperamos que ao final do mesmo você possa:

- conhecer a modelagem matemática do regime de capitalização simples;
- identificar taxas de juros proporcionais e equivalentes;
- conhecer o conceito de descontos e suas modelagens básicas;
- estudar a equivalência de capitais no regime de capitalização simples.

Para facilitar seu aprendizado você deverá dominar com segurança os seguintes assuntos:

- álgebra elementar;
- representação gráfica de funções;
- conceitos vistos na unidade 1.

Caso tenha alguma dificuldade com esses pontos faça uma revisão prévia. O site <http://www.somatematica.com.br/index2.php> é excelente para orientar o aprendizado de matemática em nível médio e superior.

Introdução

Nesta unidade você entrará em contato com as fórmulas básicas para cálculos em regime de capitalização simples, com os conceitos de taxas de juros proporcionais e equivalentes e com uma das principais aplicações práticas deste regime de juros, qual seja, a operação de desconto de títulos comerciais.

Esta unidade também se valerá de situações práticas que o levem a perceber a importância do objeto de estudo.

Fórmulas básicas

Situação prática 2.1: você, necessitando de recursos para operar seus negócios, se dirige a um banco e solicita um empréstimo de \$1.000,00 para pagar em uma única vez no final de cinco (5) anos. O gerente, após analisar seu comportamento de crédito, anui ao seu pedido e lhe informa que a linha de financiamento opera com uma taxa de juros de 15% aa e em regime de juros simples. Qual o valor que deverá ser reembolsado ao banco ao final de operação?

Juro

Você poderá responder essa questão utilizando-se da fórmula (1.1) vista na unidade 1 para o cálculo de juros. O juro incide anualmente sobre o empréstimo a uma taxa de 15% aa de modo que para cada ano decorrido do início da operação o banco terá direito a um juro expresso por:

$J = C * i$ ou lembrando que,

$C = 1.000,00$ e $i = 15\%aa$

Observe a taxa de juros que está expressa na forma unitária (15%/100).

$$J = 1.000,00 * 0,15 = 150,00$$

Observe que a temporalidade da taxa de juros é o ano; assim, o tempo do empréstimo pode ser dividido em cinco (5) períodos de ano que correspondem a cinco (5) períodos anuais de incidência de juros. Os cálculos completos podem ser vistos na tabela 4.

Ano	Fórmula	Cálculo	Valor
1		$J_1 = 1.000 * 0,15$	150
2		$J_2 = 1.000 * 0,15$	150
3	$J = C*i$	$J_3 = 1.000 * 0,15$	150
4		$J_4 = 1.000 * 0,15$	150
5		$J_5 = 1.000 * 0,15$	150
TOTAL DE JUROS (devidos ao final)		$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 = 750$	

Tabela 4 – Formação de juros simples

Fonte:elaborada pelo autor.

Essa tabela mostra os juros anuais, que correspondem a \$ 150,00 e o total dos juros de \$ 750,00 que é dado pela soma do juro de cada período. Assim:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6$$

Mas observe que:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = C*i$$

Assim:

$$J = \underbrace{C*i + C*i + C*i + C*i + C*i}_{05 \text{ (cinco) períodos}}$$

Expressão essa que fatorada o leva a:

$$J = (C * i) * 5$$

Substituindo os valores dados no enunciado segue,

$$J = 1.000 * 0,15 * 5 = \$ 750$$

O número 5 (cinco) de períodos de incidência de juro aparece como multiplicador do fator $C \cdot i$; esta constatação permite uma generalização (utilizando o método da *indução finita**) para n períodos de incidência; substituindo o número 5 por n na expressão acima resulta a fórmula geral de juros em regime de juros simples e as fórmulas derivadas que são mostradas a seguir:

GLOSSÁRIO

**Indução finita é um método matemático utilizado para validar a generalização de uma fórmula matemática.*

$$J = C \cdot i \cdot n \qquad C = \frac{J}{i \cdot n} \qquad i = \frac{J}{C \cdot n} \quad (2.1)$$

Com essa fórmula a resposta parcial à situação prática 2.1 seria simplesmente:

$$J = C \cdot i \cdot n = 1.000 \cdot 0,15 \cdot 5 = 750,00$$

sem a necessidade de se construir a tabela 4.

No regime de juros simples, a remuneração do capital (juro) é diretamente proporcional ao valor do capital e ao tempo, e é devida somente ao final da operação financeira considerada.

A figura 4 ilustra o exemplo dado e permite algumas conclusões. Nessa figura o(s) ponto(s) 1(2,3,4,5) representa(m) o final do primeiro (segundo, terceiro, quarto, quinto) período(s). A figura em questão explicita:

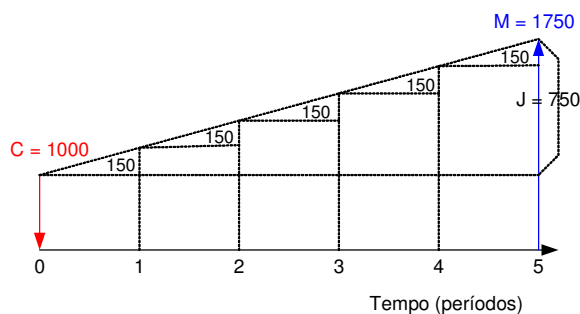


Figura 4: Comportamento dos juros.

Fonte: do autor.

- o capital cresce linearmente com o tempo;
- o capital cresce em progressão aritmética de razão $J = C \cdot i$.

Observe:

- os juros só estarão disponíveis para o credor no final da operação financeira;
- as fórmulas foram deduzidas com base na taxa de juros expressa em forma unitária. Se a taxa de juros for expressa na forma percentual, ela deverá ser reduzida à sua forma unitária (dividir por 100) antes da aplicação das fórmulas; e
- a taxa de juros i e o tempo n deverão estar expressos na mesma temporalidade (em forma compatível). Assim, se a taxa de juros for expressa em anos ("aa"), o tempo n deverá estar expresso em anos, se a taxa de juros for expressa em meses ("am") o tempo n deverá estar expresso em meses e assim por diante.

Exemplo 2.1: foi feito um empréstimo de \$ 1.000,00 unidades monetárias para ser pago ao final de 3 anos. A taxa de juros convencionalizada foi de 10% a.a. Qual o valor do juro gerado nessa operação?

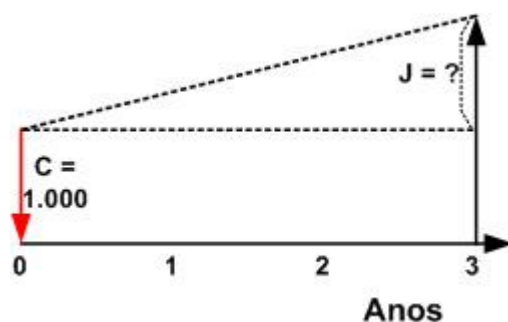


Figura 5: Juro de empréstimo.

Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: a) a figura 5 mostra o problema em forma gráfica para visualizá-lo melhor.

b) fazer o resumo de dados como a seguir:

$$C = 1.000 \quad n = 3 \text{ anos} \quad i = 10\% \text{ aa} \quad J = ?$$

c) verificar a fórmula ou fórmulas a serem aplicadas; no caso, a fórmula 2.1. Antes de aplicá-la reduzir a taxa de juros à sua forma unitária:

$$i_{aa} = i\%_{aa}/100 = 10/100 = 0,1$$

Aplicando a seguir os valores à fórmula básica, tem-se:

$$J = C * i * n = 1.000 * 0,1 * 3 = 300,00$$

Montante

O montante, conforme definido anteriormente, é o resultado da capitalização da operação, isto é, representa o capital originário acrescido do juro devido na operação.

A fórmula geral do montante pode ser deduzida a partir da sua definição (fórmula básica da MF) e da expressão geral dos juros (2.1):

$$M = C + J \quad \text{e} \quad J = C * i * n \quad (2.1)$$

Substituindo na expressão de M o valor de J dado por (2.1), tem-se,

$$M = C + C * i * n$$

Esta expressão, após as devidas transformações algébricas, produz a fórmula geral do montante e suas fórmulas derivadas, mostradas a seguir:

$$M = C * (1 + i * n) \quad (2.2) \quad C = \frac{M}{1 + i * n} \quad (2.3)$$

$$i = \frac{(M/C) - 1}{n} \quad (2.4)$$

$$n = \frac{(M/C) - 1}{i} \quad (2.5)$$

Exemplo 2.2: Foi feito um empréstimo de \$ 1.000,00 unidades monetárias para ser pago ao final de 3 anos. A taxa de juros convencionada foi de 10% aa. Qual o valor do montante ao final dessa operação?

Solução: a) colocar o problema em forma gráfica para visualizá-lo melhor.

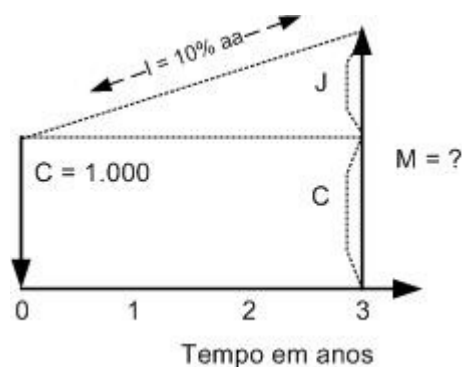


Figura 6 Montante de empréstimo.

Fonte: elaborada pelo autor.

b) fazer o resumo de dados como a seguir:

$$C = 1.000 \quad n = 3 \text{ anos} \quad i = 10\% \text{ aa} \quad M = ?$$

c) verificar a fórmula ou fórmulas a serem aplicadas; no caso, a fórmula 3.2. Antes de aplicá-la reduzir a taxa de juros à sua forma unitária:

$$i_{aa} = i\%aa/100 = 10/100 = 0,1$$

Aplicando a seguir os valores à fórmula básica, tem-se:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n) = 1.000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 3) = 1.000 \cdot (1 + 0,3) = 1.000,00 \cdot 1,3 = 1.300,00$$

Esse exercício poderia ser solucionado acrescentando-se o juro calculado em exercício 2.1 ao capital, valendo-se da fórmula básica da matemática financeira, ou seja:

$$M = C + J = 1.000 + 300 = 1.300,00$$

Introdução ao conceito de **equivalência financeira***: na situação prática 2.1 e no exemplo 2.2, diz-se que, o montante é equivalente ao capital para a taxa de juros e pelo prazo considerados. Na situação prática 2.1, o capital de \$ 1.000,00 é equivalente ao montante de \$ 1.750,00 para a taxa de juros de 15% a.a. e pelo prazo de 5 anos; no exemplo 2.2 o capital de \$ 1.000,00 é equivalente ao montante de \$ 1.300,00 para a taxa de juros de 10% a.a. e para o prazo de três anos.

GLOSSÁRIO

**Equivalência financeira - o capital é equivalente ao montante para a taxa de juros e pelo prazo considerados na operação.*

Taxas de juros proporcionais e equivalentes

Definição: duas taxas de juros i_1 e i_2 relativas aos períodos n_1 e n_2 são *proporcionais* quando observarem a relação de proporcionalidade mostrada em (2.6):

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2.6)$$

devendo os tempos n_1 e n_2 estarem expressos na mesma unidade de tempo.

Uma maneira mais imediata para você tratar taxas proporcionais: tome-se um período de tempo “n” para o qual está definida uma taxa de juros i_n e subdivida-o em “k” subperíodos; qual a taxa de juros proporcional a i_n para esse subperíodo k? Basta dividir a taxa i_n pelo número de períodos k contidos em n:

$$i_k = i_n * \frac{1}{k}$$

Exemplo 2.3: converta a taxa de juros de 12% aa em taxa de juros mensal por proporcionalidade.

Solução: aplicar a condição de proporcionalidade, observando que o tempo deve estar expresso nas mesmas unidades (no caso 1 mês e 12 meses).

Situação 1 $i_1 = x\% \text{ am}$ $n_1 = 1 \text{ mês}$

Situação 2 $i_2 = 12\% \text{ aa}$ $n_2 = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$

$$\frac{x}{12} = \frac{1}{12} \quad \text{ou} \quad x = i_1 = 1\% \text{ am}$$

ou seja: 1% am é a taxa mensal proporcional a 12% aa.

Pelo segundo modo: lembre-se de que o ano tem 12 meses, portanto, $k = 12$, e

$$i_k = i_n * \frac{1}{k} \quad i_m = i_a * \frac{1}{12} = 12\% * \frac{1}{12} = 1\% \text{ am}$$

Definição: duas taxas i_1 e i_2 são ditas *equivalentes* quando, ao serem aplicadas ao mesmo capital, pelo mesmo tempo, gerarem o mesmo montante.

Exemplo 2.4: verifique se 1% am e 12% aa são taxas equivalentes. Tome como referência um capital de \$ 1.000,00.

Solução: aplicando a fórmula (2.2), tem-se:

a) o montante gerado por um capital de \$ 1.000,00 em 12 meses a 1% am será:

$$C = \$ 1.000 \quad i_1 = 1\% \text{ am} \quad n_1 = 12 \text{ meses}$$

Obs: a taxa de juros e o prazo estão expressos na mesma unidade (mês).

$$M_1 = C * (1 + i * n) = 1.000 * (1 + 0,01 * 12) = \$ 1.200$$

b) o montante gerado por um capital de \$ 1.000,00 em 1 ano a 12% aa será:

$$C = \$ 1.000 \quad i_2 = 12\% \text{ aa} \quad n_2 = 1 \text{ ano}$$

Obs: a taxa de juros e o prazo estão expressos na mesma unidade (ano).

$$M_2 = C \cdot (1 + i \cdot n) = 1.000 \cdot (1 + 0,12 \cdot 1) = \$ 1.200$$

Os montantes, M_1 e M_2 , gerados nas duas situações propostas são iguais, o que mostra que as taxas de juros de 1% am e de 12% aa são taxas equivalentes, em regime de juros simples. Combinando os resultados dos exemplos 2.3 e 2.4, pode-se concluir:

Em regime de juros simples as taxas proporcionais são também equivalentes.

Exemplo 2.5: calcule a taxa de juros mensal proporcional à taxa de juros de 18% a.a..

Solução: basta aplicar a fórmula da proporcionalidade aos dados

$$i_1 = ? \quad n_1 = 1 \text{ mês} \quad i_2 = 18\% \text{ aa} \quad n_2 = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \frac{i_1}{18} = \frac{1}{12} \quad i_1 = 1,5 \% \text{ am}$$

ou ainda,

$$i_k = i_n \cdot \frac{1}{k} \quad i_m = i_a \cdot \frac{1}{12} = 18 \cdot \frac{1}{12} = 1,5\% \text{ am}$$

$k = 12$ porque um ano se divide em 12 meses.

Até este ponto você estudou a modelagem básica do regime de juros ou de capitalização simples e suas fórmulas básica que relacionam: capital, montante, tempo e taxa de juros e os conceitos de taxas de juros proporcionais e equivalentes.

Este conjunto de conhecimentos que será sedimentado com as atividades que seguem, permitirá a você avançar um pouco mais no tópico de capitalização simples.

Atividades de aprendizagem

1. Calcular as taxas mensais e trimestrais proporcionais a 30% as. Resp.: $i_m = 5\% \text{ am}$, $i_t = 15\% \text{ at}$
2. Calcular as taxas mensais, trimestrais, quadrimestrais e semestrais proporcionais à taxa de 12% aa. Resp.: $i_m = 1\% \text{ am}$, $i_t = 3\% \text{ at}$, $i_q = 4\% \text{ aq}$, $i_s = 2\% \text{ as}$.
3. Calcular o montante de \$ 10.000,00 aplicado por: a) 6 (seis) meses a 2% am, b) 10 (dez) meses a 12% aa, e c) 65 (sessenta e cinco) dias a 2,5% am. Resp.: (a) 11.200,00, (b) 11.000,00, (c) 10.541,66
4. Uma aplicação gerou um montante de \$ 15.400,00. Os juros gerados na aplicação foram de \$ 2.400,00 e o prazo da mesma foi de 3 (três) meses. Determinar: (a) o capital aplicado, e (b) a taxa de juros mensal da aplicação. Resp.: (a) 13.000,00, (b) 6,15% am
5. Determinar o prazo em que um dado capital dobra de valor se aplicado a uma taxa de 5% am. Em quanto tempo triplicará? Resp.: (a) 20 meses, (b) 40 meses.
6. O valor nominal de um título é $\frac{5}{3}$ (cinco terços) do seu valor atual. Sendo o prazo de aplicação de 8 (oito) meses, qual a taxa de juros mensal aplicada? Resp.: $i = 8,33\% \text{ am}$
7. Qual deve ser o prazo de aplicação de um capital a 30% aa para que os juros gerados correspondam a 4 vezes o valor do capital? Resp.: 13,33 a

Juro comercial

É conveniente, em algumas situações, fazer uma distinção entre o ano civil (365 dias) e o ano comercial (360 dias). Essas situações ocorrem quando existe a necessidade de se trabalhar com taxas de juros expressas em dias. Algumas aplicações executam seus cálculos com base em taxas de juros diárias, mas expressam essas taxas de juros em termos mensais ou anuais; portanto, torna-se necessária a utilização de taxas proporcionais diárias e para o seu cálculo é obrigatória a definição de uma base de cálculo: a) ano civil de 365 dias ou b) ano comercial de 360 dias. A base de cálculo escolhida (360 ou 365 dias) leva às definições de juros exatos (base 365 dias) e juros comerciais (base 360 dias). Este livro se aterá exclusivamente aos juros comerciais adotando o ano de 360 dias e o mês de 30 dias.

Taxa de juros diária comercial

A taxa de juros diária comercial (i_{dc}) é calculada dividindo-se uma taxa de juros expressa em ano (i_a) por 360 dias (a base de cálculo é o ano comercial de 360 dias):

$$i_{dc} = \frac{i_a}{360} \quad (2.7)$$

Juro comercial

É o juro obtido quando o período está expresso em dias e se utiliza para os cálculos a taxa de juros diária comercial e o prazo em dias, de acordo com a expressão abaixo:

$$J_c = C * i_{dc} * n$$

n expresso em dias

i_{dc} taxa de juros diária comercial

que combinada com a expressão (2.7) dá os juros comerciais obtidos para um período “n” expresso em dias e para taxa de juros expressa em ano:

$$J_c = \frac{C \cdot i_a \cdot n}{360} \quad (2.8)$$

Exemplo 2.6: considere um investimento que promete remunerar o capital a 15% aa, em regime de juros simples. Se o investidor pretende manter o seu capital de \$ 1.000,00 investido por 60 dias que montante receberá ao final?

Sumário de dados: $i = 15\%$ aa, $n = 60$ dias, $C = 1.000,00$, $M = ?$

Solução: deve-se calcular a taxa de juros diária proporcional (ou equivalente) e calcular o montante com base nessa taxa.

a) Fórmula a ser aplicada: $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$ com n e “ i ” expressos em dias.

b) Cálculo de i_d tomando o *ano comercial* como base: $i_d = 15/360 = 0,041667\%$ ad

c) Transformando a taxa de juros para sua forma unitária: $i_d = 0,041667/100 = 0,0004166$ ad

d) Aplicando a fórmula: $M = 1.000 \cdot (1 + 0,0004166 \cdot 60) = 1.025,00$

Descontos - desconto racional e desconto comercial

Uma operação financeira entre dois agentes econômicos é normalmente documentada por um título de crédito comercial, devendo esse título conter todos os elementos básicos da operação correspondente. Esses títulos é que vão ser utilizados em operações de desconto que são o objeto de estudo deste

tópico. Títulos muito utilizados pelos agentes econômicos são: a *Nota Promissória* e a *Duplicata Mercantil e de Serviços*.

Saiba mais...

Consulte:

<http://www.fortesadvogados.com.br/artigos.view.php?id=389>

<http://www.consumidorbrasil.com.br/consumidorbrasil/textos/modelos/diversos/notapromissoria.htm>.

http://www.nelpa.com.br/Editoras/Nelpa/Arquivos_PDF/Empresarial/Capítulo_12_Empresarial_prn.pdf.

Conceito de desconto

O problema do desconto surge quando o detentor de um título de crédito necessita transformá-lo em dinheiro antes da data do vencimento; nesse caso, ele poderá negociar com um agente financeiro que lhe antecipará um valor inferior ao valor nominal.

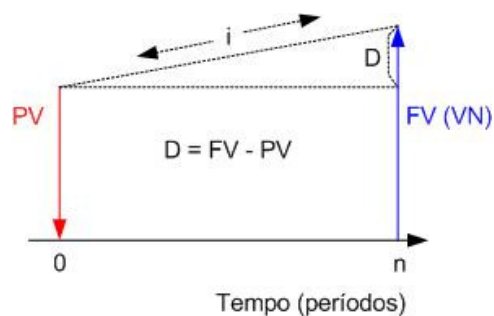


Figura 7: Conceito de Desconto

Fonte: elaborada pelo autor.

A diferença entre o valor nominal do título e o valor pago por ele, numa certa data (anterior a data do vencimento), é o que se chama *desconto*. Assim,

$$D = FV - PV \quad (2.9)$$

onde:

D desconto

FV (VN) valor nominal do título (no vencimento);

PV valor atual do título (pago pelo Agente Financeiro).

Esse conceito pode ser mais bem visualizado na figura 7.

Exemplo 2.7: seja um título de dívida com as seguintes características: data de emissão: 1/1/X7; data de vencimento: 1/1/X8; favorecido: João de Souza; emitente: Alberto José; e valor nominal no vencimento: \$ 1.000,00. Em 1/3/X7, João de Souza vai ao Banco X e propõe ao mesmo descontar esse título. O Banco, após analisar a questão, resolve pagar a João a quantia de \$ 800,00 pelo título naquela data.

Na operação de desconto o banco não assume a responsabilidade plena pelo título: João de Souza é solidário com Alberto José em sua dívida perante o banco. Em caso de inadimplência de Alberto, João deverá pagar o título ao banco.

Para o exemplo acima, que pode ser visualizado na figura 8, tem-se o seguinte resumo de dados:

$$VN = FV = \$ 1.000$$

$$\text{valor de compra do título} = PV = \$ 800$$

$$\text{desconto: } D = FV - PV = 1.000 - 800 = \$ 200$$

Em outras palavras, o Banco X despendeu \$ 800,00 em 1/3/X7 a favor de João e receberá \$1.000,00 de Alberto em 1/1/X8, percebendo, portanto, \$ 200,00 pela prestação desse serviço. A figura 8 ilustra o problema. Observe que na solução deste exemplo o valor inicial à vista que originou o título de dívida (o capital) não foi levado em conta; esta é uma situação comum em

finanças porque a operação financeira se originou em condições diferentes das vigentes na data da operação de desconto e que justifica o possível uso de taxas de juros diferentes nas duas situações; assim, o que interessa é o presente e o futuro da operação e não o passado.

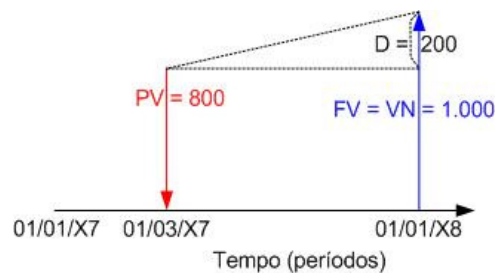


Figura 8: Desconto de título

Fonte: elaborada pelo autor.

O objetivo desta seção é mostrar a você as formas correntes de cálculo desse desconto em regime de capitalização simples, que são: a) o desconto racional ou por dentro e b) o desconto comercial ou por fora; este último é ainda denominado desconto comercial.

Desconto racional (por dentro)

A operacionalização do cálculo do desconto pode ser feita por duas formas. A primeira é o chamado desconto racional ou “por dentro” e para sua definição será adotada a seguinte nomenclatura:

FV valor nominal;

PV valor atual ou valor descontado;

i_r taxa de juros de desconto por período;

n tempo ou tempo de antecipação, em períodos (tempo que decorre entre a data do desconto e a data de vencimento do título); e

D_r desconto racional ou por dentro.

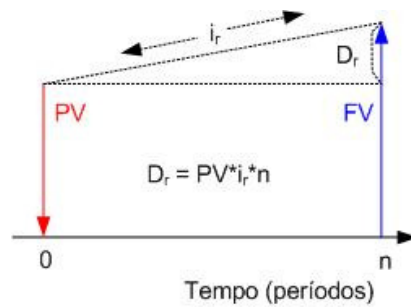


Figura 9: Desconto racional

Fonte: elaborada pelo autor.

Define-se **desconto racional*** como o valor do juro gerado no tempo n e à taxa de juros i_r calculado sobre o valor PV .

A figura 9 ilustra as demonstrações que seguem.

Da definição de desconto racional tem-se:

$$D_r = PV * i_{dr} * n \quad (2.10)$$

Da figura 9, percebe-se claramente que:

$$D_r = FV - PV$$

Reordenando essa equação, tem-se:

$$FV = PV + D_r$$

Substituindo D_r pela expressão (2.10), vem:

$$FV = PV + PV * i_r * n \quad D_r = FV - PV$$

da qual decorre:

$$FV = PV * (1 + i_{dr} * n) \quad (2.11)$$

e também,

$$PV = \frac{FV}{(1 + i_{dr} * n)} \quad (2.12)$$

As expressões (2.10) e (2.12) combinadas resultam em:

GLOSSÁRIO

* *Desconto racional* - o valor do juro gerado pelo valor PV no tempo n e a uma taxa de juros i_r .

$$D_r = \frac{FV * i_{dr} * n}{(1 + i_{dr} * n)} \quad (2.13)$$

Em desconto simples racional a base de cálculo é o capital inicial ou valor presente.

Se você observar cuidadosamente as fórmulas acima verá que o **desconto racional corresponde ao juro simples (J) da operação proposta**; em outras palavras, o desconto racional se vale de todas as fórmulas vistas para juros simples, por operar nesse regime.

Os problemas envolvendo D_r podem ser catalogados em três tipos, como mostrado a seguir:

Tipo 1: conhecidos FV , i_r e n , calcular D_r . Este tipo de problema é resolvido pela fórmula (2.13)

$$D_r = \frac{FV * i_r * n}{(1 + i_r * n)}$$

Exemplo 2.8: um título de valor nominal de \$ 5.000,00 que vence daqui a 60 dias é levado a um banco para desconto. O banco opera em desconto racional simples e cobra juros de 4% am (ao mês). Qual o valor do desconto e qual o valor recebido pelo detentor do título?

Sumário de dados: $FV = 5.000$, $n = 2$ meses, $i = 4\%$ am

Solução: é o caso mais típico de desconto de títulos. A taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo também será expresso nessa base e $n = 2$ meses.

a) Aplicação da fórmula:

$$D_r = \frac{FV * i_r * n}{(1 + i_r * n)} = \frac{5.000 * 0,04 * 2}{(1 + 0,04 * 2)} = \frac{400}{1,08} = \$ 370,37$$

b) O portador do título receberá: $PV = FV - D_r = 5.000 - 370,37 =$

$$PV = \$ 4.629,63$$

Tipo 2: conhecidos D_r , i_r e n , calcular FV . O problema é resolvido pela mesma fórmula anterior, só que devidamente reordenada:

$$FV = \frac{D_r * (1 + i_r * n)}{i_r * n}$$

Exemplo 2.9: um título que vence daqui a 60 dias foi descontado em um banco e o valor do desconto foi \$ 370,37. O banco opera em desconto racional simples e cobra juros de 4% am (ao mês). Qual o valor nominal e o valor presente desse título?

Sumário de dados: $FV = ?$, $D_r = 370,37$, $n = 2$ meses, $i = 4\%$ am

Solução: a taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo também será expresso nessa base e $n = 2$ meses.

a) Aplicação da fórmula:

$$FV = \frac{D_r * (1 + i_r * n)}{i_r * n} = \frac{370,37 * (1 + 0,04 * 2)}{0,04 * 2} \quad FV = 5.000,00$$

$$FV = \frac{399,99}{0,08} = 4.999,995 = 5.000,00$$

b) O portador do título receberá: $PV = FV - D_r = 5.000 - 370,37 =$

$$PV = \$ 4.629,63$$

Tipo 3: conhecidos FV ou PV , D_r e i_r , calcular n . O problema é resolvido com o auxílio das fórmulas (2.9) e (2.11):

$$FV = PV + D_r \quad PV = \frac{FV}{(1 + i_r * n)}$$

Exemplo 2.10: um título de valor nominal \$ 5.000,00 foi descontado em um banco e o valor do desconto foi \$ 370,37. O banco opera em desconto racional simples e cobra juros de 4% am (ao mês). Qual o prazo de antecipação do título?

Sumário de dados: $FV = 5.000,00$, $D_r = 370,37$, $n = ?$, $i = 4\%$ am

Solução: a taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo n também será expresso em meses.

a) Pode-se calcular PV com a fórmula (2.9) e a seguir aplicar a fórmula (2.11):

$$FV = PV + D_r$$

$$5.000 = PV + 370,37 \quad PV = 5.000 - 370,37 = \$ 4.629,63$$

$$PV = \frac{FV}{(1 + i_r * n)}$$

$$(1 + i_r * n) = \frac{FV}{PV} \quad i_r * n = \frac{FV}{PV} - 1 \quad n = \left[\frac{FV}{PV} - 1 \right] * \frac{1}{i_r}$$

substituindo os valores, tem-se,

$$n = \left[\frac{FV}{PV} - 1 \right] * \frac{1}{i_r} = \left[\frac{5.000}{4.629,63} - 1 \right] * \frac{1}{0,04} = 1,999 \text{ meses ou } 2 \text{ m}$$

b) o exemplo pode ser solucionado utilizando-se a fórmula (2.13) recomendada para os tipos 1 e 2.

$$FV = \frac{D_r * (1 + i_r * n)}{i_r * n} \quad FV * i_r * n = D_r + D_r * i_r * n$$

$$FV * i_r * n - D_r * i_r * n = D_r \quad n * (FV * i_r - D_r * i_r) = D_r$$

$$n = \frac{D_r}{FV * i_r - D_r * i_r} = \frac{D_r}{i_r * (FV - D_r)}$$

$$n = \frac{D_r}{i_r * (FV - D_r)} = \frac{370,37}{0,04 * (5.000 - 370,37)} = 1,999 \text{ ou } 2 \text{ m}$$

Exercícios resolvidos para ajudá-lo a fixar conceitos.

Exercício 2.1: determinar o desconto racional e o valor atual das hipóteses seguintes:

	Valor Nominal	Taxa	Prazo até Vencimento
a)	\$ 10.000,00	23% a.a.	3 meses
b)	\$ 8.200,00	20,5% a.a.	1 ano e 2 meses

Solução: a) Problema do tipo 1 – usar a fórmula (2.13),

$$D_r = \frac{FV * i_r * n}{(1 + i * n)} \quad \text{substituindo-se os valores}$$

$$D_r = \frac{10.000 * (0,23/12) * 3}{(1 + \frac{0,23}{12} * 3)} = \frac{575}{1,0575} = \$ 543,74$$

O valor presente ou atual é dado por:

$$PV = FV - D_r = 10.000 - 543,74 = 9.456,26$$

b) Problema do tipo 1 – usar a fórmula (2.13)

$$D_r = \frac{FV * i_r * n}{(1 + i * n)} \quad \text{substituindo-se os valores}$$

$$D_r = \frac{8.200 * (0,205/12) * 14}{(1 + \frac{0,205}{12} * 14)} = \frac{1.961,16}{1,239166} = \$ 1.582,65$$

O valor presente ou atual é dado por:

$$PV = FV - D_r = 8.200 - 1.582,65 = 6.617,35$$

Observe que as taxas de juros mensais foram calculadas por proporcionalidade e colocadas em forma unitária.

Exercício 2.2: o desconto racional para um título de valor nominal \$ 600,00 e prazo de antecipação de 5 meses foi \$ 57,63. Qual é a taxa de juros aplicada?

Sumário de dados: $D_r = 57,63$, $FV = 600$, $n = 5$ meses $i = ?$

Solução: lembrar a relação entre PV, FV e D_r

$$D_r = FV - PV$$

$$57,63 = 600 - PV \quad PV = 542,37$$

A seguir aplicar a fórmula do desconto racional:

$$D_r = PV * i * n$$

$$57,63 = 542,37 * i * 5$$

$$i = \frac{57,63}{542,37 * 5} = 0,02125 \text{ am ou } 2,125 \% \text{ am}$$

Exercício 2.3: um título de valor nominal \$ 1.300,00 foi resgatado antes de seu vencimento; o desconto racional foi de \$ 238,78. Qual o prazo para o vencimento desse título se a taxa de juros aplicada foi 27% a.a.?

Sumário de dados: $FV = 1.300$, $Dr = 238,78$, $i = 27\% \text{ aa}$, $n = ?$

Solução: problema do tipo 3 para o qual se usam as fórmulas (2.9) e (2.11),

$$D_r = FV - PV$$

$$238,78 = 1.300 - PV \quad PV = 1.300 - 238,78 = 1.061,22$$

Aplicar agora a fórmula básica de desconto racional simples,

$$D_r = PV * i * n$$

$$238,78 = 1.061,22 * 0,27 * n$$

$$n = \frac{238,78}{1.061,22 * 0,27} = 0,8333 \text{ a}$$

Convertendo para meses por regra de três simples,

$$n = 0,8333 * 12 = 9,9996 \text{ ou } 10 \text{ meses}$$

A resposta poderia ser obtida diretamente em meses se você utilizasse a taxa de juros expressa em meses ($i_m = 27/12 = 2,25\%$ am)

Exercício 2.4: um título foi resgatado 145 dias antes do seu vencimento sendo negociado uma taxa de juros de 23% a.a., tendo sido recebido um valor de \$ 1.921,95. Qual o valor nominal do título?

Sumário de dados: $n = 145$ d, $i = 23\%$ aa, $PV = 1.921,95$, $FV = ?$

Solução: problema de solução direta - aplicar a fórmula do montante (2.11),

$FV = PV * (1 + i * n)$ substituindo os valores

$$FV = 1.921,95 * \left(1 + \frac{0,23}{360} * 145\right) = \$ 2.099,99$$

Você deve observar o tratamento dado à taxa de juros: a taxa anual foi convertida em taxa diária considerando o ano de 360 dias (comercial) e a taxa diária foi aplicada sobre o número de dias corridos do título.

Atividades de aprendizagem

8. Determinar o valor atual racional dos seguintes títulos:

	FV	i	n
a)	\$ 20.000,00	15,9% a.a.	50 dias
b)	\$ 12.500,00	21% a.a.	125 dias
c)	\$ 6.420,00	30% a.a.	8 meses
d)	\$ 5.000,00	26,4% a.a.	181 dias

Resp.: a) 19.567,87, b) 11.650,48, c) 5.350,00, d) 4.414,10

9. Quanto pagar por um título cujo valor nominal é de \$ 15.000,00 com vencimento em 150 dias para que se tenha uma rentabilidade de 36% aa? (lembre-se: rentabilidade é a taxa de juros do desconto racional). Resp.: 13.043,47

10. Sabe-se que o desconto racional de um título, cujo valor nominal é \$ 600,00, foi de \$ 57,63. Qual será a taxa de juros considerada se o prazo de antecipação foi 5 meses? Resp.: 25,50% aa

11. O valor descontado de uma promissória é de \$ 1.449,28 (PV) e a taxa de juros utilizada foi de 18% aa. Sabe-se que o desconto racional foi de \$ 50,72. Qual o prazo de antecedência? Resp.: $n = 70$ dias

12. O valor nominal de um título é de 17,665 vezes o desconto racional a 24% a.a. Se o desconto racional for \$ 600,00, qual será o prazo de antecipação? Resp.: $n = 3$ m

Desconto comercial (desconto bancário ou por fora)

O segundo modo de se operacionalizar o desconto de títulos é denominado de desconto bancário, comercial ou por fora. Para se definir o desconto comercial será adotada a seguinte nomenclatura:

FV valor nominal;

PV valor atual ou valor descontado;

i_c taxa de desconto por período;

n tempo ou tempo de antecipação, em períodos; e

D_c desconto comercial ou por fora.

Define-se o desconto comercial como o valor dos juros gerados no tempo n , à taxa de desconto i_c , calculado sobre o valor nominal FV do título. A figura 10, abaixo, ilustra a questão.

Da definição de desconto comercial tem-se:

$$D_c = FV * i_c * n \quad (2.14)$$

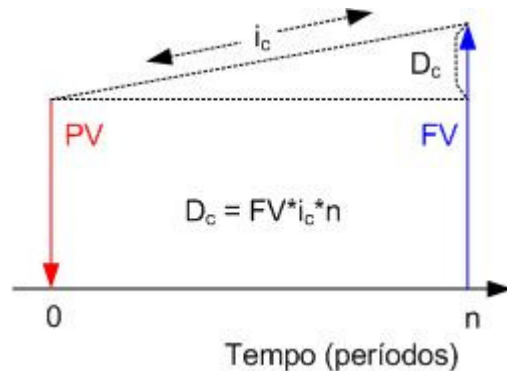


Figura 10: Desconto comercial - RJS

Fonte: do autor.

Em desconto comercial ou comercial a base de cálculo é o valor nominal ou montante.

A dedução de algumas fórmulas, a partir dessa relação e da definição de desconto, pode-se revelar útil para a solução de alguns problemas.

Das duas expressões básicas de desconto comercial:

$$PV = FV - D_c \quad \text{ou} \quad FV = PV + D_c \quad \text{e} \quad D_c = FV * i_c * n$$

decorre:

$$PV = FV - FV * i_c * n$$

$$PV = FV * (1 - i_c * n) \quad (2.15)$$

Decorre também,

$$D_c = \frac{PV * i_c * n}{(1 - i_c * n)} \quad (2.16)$$

Definido desta maneira, o desconto comercial não segue o modelo puro do regime de capitalização simples sendo, na verdade, uma corruptela do mesmo. A taxa de desconto aplicada à FV descaracteriza o regime de juros simples.

Você agora vai verificar que o desconto comercial (D_c) é maior que o desconto racional (D_r) quando eles são operados com a mesma taxa: “de desconto” para o desconto comercial e “de juros” para o desconto racional. Para isto vai-se descontar um título de mesmo valor nominal FV pelos critérios racional e comercial.

O valor nominal em *desconto racional* é calculado pela fórmula (2.13):

$$FV = \frac{D_r * (1 + i_r * n)}{i_r * n}$$

Esse mesmo valor nominal é expresso pela fórmula do desconto comercial (2.14):

$$FV = \frac{D_c}{i_c * n}$$

considerando que o valor nominal é o mesmo (mesmo título descontado de dois modos diferentes), segue:

$$\frac{D_r * (1 + i_r * n)}{i_r * n} = \frac{D_c}{i_c * n}$$

Como por hipótese, $i_r = i_c = i$, segue:

$$D_c = D_r * (1 + i * n) \quad (2.17)$$

Observe:

Taxa de desconto para o desconto comercial e

Taxa de juros para o desconto racional.

Conclusão: o desconto comercial é igual ao montante gerado pelo desconto racional no tempo n para a taxa de juros e taxa de desconto utilizadas - i .

Atividades de aprendizagem

13. Deduza qual relação que deve existir entre a taxa de juros do desconto racional " i_r " e a taxa de desconto do desconto comercial " i_c " para que o desconto de um título gere o mesmo valor descontado ou valor atual. Esta atividade deve ser desenvolvida em grupo através do chats.

Os problemas mais comuns envolvendo D_c podem ser catalogados em três tipos, como mostrado a seguir:

Tipo 1: conhecidos FV , i_c e n , calcular D_c Este tipo de problema é resolvido pela fórmula (2.14)

$$D_c = FV * i_c * n$$

Exemplo 2.11: um título de valor nominal de \$ 5.000,00, com vencimento para 60 dias é levado a um banco para desconto. O banco opera em desconto comercial simples e cobra juros de 4% am (ao mês). Qual o valor do desconto e qual o valor recebido pelo detentor do título?

Sumário de dados: $FV = 5.000$, $n = 2$ meses, $i = 4\%$ am, $D_r = ?$

Solução: problema do tipo 1 – aplicar a fórmula (2.14); a taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo também será expresso nessa base e $n = 2$ meses.

a) Aplicação da fórmula: $D_c = FV * i_c * n$

$$D_c = 5.000 * 0,04 * 2 = \$ 400,00$$

b) O portador do título receberá: $PV = FV - D_c = 5.000 - 400,00 = \$ 4.600,00$

Compare estes resultados com os obtidos no exemplo 3.8.

Tipo 2: conhecidos D_c , i_c e n , calcular FV . O problema é resolvido pela mesma fórmula anterior, só que devidamente reordenada:

$$D_c = FV * i_c * n \quad FV = \frac{D_c}{i_c * n}$$

Exemplo 2.12: um título com vencimento em 60 dias foi descontado em um banco e o valor do desconto foi \$ 400,00. O banco opera em desconto comercial simples e cobra juros de 4% am (ao mês). Qual o valor nominal e o valor preste desse título?

Sumário de dados: $FV = ?$, $D_c = 400,00$, $n = 2$ meses, $i = 4\%$ am, $Dr = ?$

Solução: problema do tipo 2 – aplicar a fórmula (2.14); a taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo também será expresso nessa base e $n = 2$ meses.

a) Aplicação da fórmula: $FV = \frac{D_c}{i_c * n} = \frac{400,00}{0,04 * 2} = \$ 5.000,00$

b) O portador do título receberá: $PV = FV - D_c = 5.000 - 400,00 = \$ 4.600,00$

Compare estes resultados com os resultados do exemplo 3.9.

Tipo 3: conhecidos FV ou PV , D_r e i_c , calcular n . O problema é resolvido com o auxílio da fórmula básica de desconto (2.9) e a fórmula (2.15):

$$FV = PV + D_c$$

$$PV = FV * (1 - i_c * n)$$

Exemplo 2.13: um título de valor nominal \$ 5.000,00 foi descontado em um banco e o valor do desconto foi \$ 400,00. O banco opera em desconto comercial simples e cobra juros de 4%

a.m. (ao mês). Qual o valor presente e o prazo de antecipação do título?

Sumário de dados: $FV = 5.000,00$, $D_c = 400,00$, $n = ?$, $i = 4\%$ a.m., $Dr = ?$

Solução: problema do tipo 3 – aplicar as fórmulas (2.9) e (2.15); a taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo n também será expresso em meses.

b) Pode-se calcular PV com a fórmula básica de descontos e a seguir aplicar a fórmula (2.15):

$$FV = PV + D_c$$

$$5.000 = PV + 400,00 \quad PV = 5.000 - 400,00 = \$ 4.600,00$$

$$PV = FV * (1 - i_c * n) \quad 4.600 = 5.000 * (1 - 0,04 * n)$$

substituindo os valores, tem-se,

$$4.600 = 5.000 * (1 - 0,04 * n) \quad n = 2 \text{ meses}$$

Compare os resultados obtidos com o exemplo 2.10.

Observações

Como definido, o desconto comercial pode conduzir a valores negativos para o PV. Com efeito, analisando a fórmula (2.15),

$$PV = FV * (1 - i_c * n)$$

você pode perceber que a condição necessária para que o PV seja positivo é que o fator:

$$(1 - i_c * n) > 0 \text{ ou, o que é a mesma coisa que: } i_c * n < 1$$

Assim, se a taxa de desconto for 8% am (0,08 am), o maior prazo possível para que não se tenha um valor negativo para PV é dado por:

$$0,08 * n < 1 \quad \text{ou} \quad n < 1/0,08 = 12,5 \text{ meses}$$

Essa questão só é relevante em operações de longo prazo. Como os descontos são operações típicas de curto prazo, tal assunto perde a sua relevância.

Em desconto comercial simples considera-se como custo efetivo da operação - *a taxa de juros do desconto racional que produz o mesmo valor presente (PV)*. O valor dessa taxa de juros racional (custo efetivo) é diretamente dependente do prazo do desconto comercial, embora seja sempre superior à taxa de desconto comercial. Uma operação conduzida com taxa de desconto comercial de 10% am produz as seguintes taxas de desconto racional, conforme o prazo da operação:

$$n = 1 \text{ mês} \quad i_{dr} = 11,11\% \text{ am}$$

$$n = 2 \text{ meses} \quad i_{dr} = 11,80\% \text{ am}$$

$$n = 3 \text{ meses} \quad i_{dr} = 12,62\% \text{ am}$$

$$n = 4 \text{ meses} \quad i_{dr} = 13,62\% \text{ am}$$

O custo efetivo de uma operação de desconto comercial é a taxa de juros que aplicada ao modelo de desconto racional produz o mesmo valor do desconto.

Exemplo 2.14: Com os dados e respostas do exemplo 2.13 determinar o custo da operação de desconto.

Sumário de dados: $D_c = 400,00$ $FV = 5.000,00$ $i_c = 4\% \text{ am}$ $n = 2 \text{ m}$ $i_r = ?$

Solução: deve-se determinar qual a taxa de desconto racional i_r que produz um desconto racional de \$ 400,00.

Da definição de desconto racional tem-se a fórmula (2.10):

$$D_r = PV * i_r * n$$

porém, o valor presente pode ser calculado da seguinte forma:

$$PV = FV - D = 5.000,00 - 400,00 = 4.600,00$$

valor que levado à fórmula do D_r produz:

$$400,00 = 4.600,00 * i_r * 2 \quad i_r = 0,0435 \text{ ou } 4,35\% \text{ am}$$

Fique esperto

Normalmente as instituições de crédito informam ao cliente a taxa de juros nominal e não a taxa de juros que informa o custo efetivo da operação. A operação deve ser sempre avaliada pelo seu custo efetivo.

Exercícios resolvidos para fixação de conceitos.

Exercício 2.5: um título foi resgatado 145 dias antes do vencimento sendo negociada uma taxa de desconto de 23% a.a., sendo recebido um valor atual de \$ 1.921,95. Qual é o valor nominal do título?

Sumário de dados: $n = 145 \text{ d}$, $i = 23\% \text{ aa}$, $PV = 1.921,95$, $FV = ?$

Solução: a) aplicar a fórmula do valor presente do desconto comercial,

$$PV = FV * (1 - i * n) \quad \text{substituindo os valores}$$

$$1.921,95 = FV * \left(1 - \frac{0,23}{360} * 145\right)$$

$$FV = \$ 2.118,17$$

Exercício 2.6: Calcular o desconto comercial das hipóteses seguintes:

FV(VN)	Taxa	Prazo
a) \$ 18.000,00	35% a.a.	3 meses
b) \$ 22.000,00	27% a.a.	4 meses e 12 dias

Solução: aplicar a fórmula de desconto comercial, $D_c = FV \cdot i_c \cdot n$

a) $D_c = 18.000 \cdot 0,35 \cdot (3/12) = \$ 1.575,00$

observe que o prazo de 3 meses foi convertido em 0,25 anos para compatibilizar com a taxa de juros.

b) $D_c = 22.000 \cdot (0,27/360) \cdot (132) = \$ 2.178,00$

observe que a taxa de juros foi convertida para sua proporcional diária (ano comercial) e o prazo contado em dias.

A seguir um conjunto de atividades propostas a você com o intuito de sedimentar o seu conhecimento e desenvolver sua habilidade para lidar com o modelo de desconto comercial simples estudado.

Atividades de aprendizagem

14. Determinar a taxa mensal de desconto comercial que um banco deve aplicar para que o "custo da operação" corresponda a uma taxa de desconto racional de 6,5% am, para os seguintes prazos de desconto: (a) 1 (um) mês, (b) 2 (dois) meses e (c) 3 (três) meses. Resp.: (a) $i_c = 6,10\%$ am, (b) $i_c = 5,75\%$ am, (c) $i_c = 5,43\%$ am

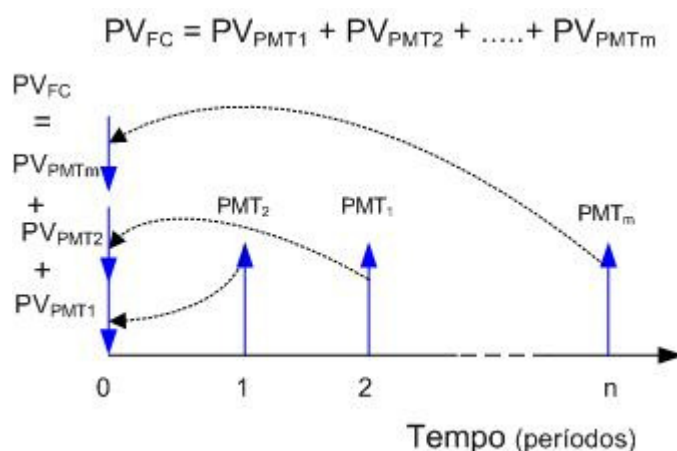
15. Um banco propõe a um cliente duas alternativas de empréstimo com base em desconto comercial: (a) 5,5% am e prazo de 4 (quatro) meses, e (b) 6% am com prazo de 2 (dois) meses. Qual das alternativas é mais vantajosa para o cliente? Resp.: (b). (dica: determine o custo efetivo mensal das duas operações).

16. Um capital é aplicado por um período de 4 (quatro) meses a uma determinada taxa de juros, gerando um montante de \$ 12.000,00. Um segundo capital foi aplicado, na mesma data, por um período de 3 (três) meses a uma outra taxa de juros, gerando um montante de \$ 8.960,00. Sabe-se que a soma dos capitais é \$ 18.000,00 e que a diferença dos juros gerados é \$ 1.040,00; os juros da segunda operação são maiores que os da primeira operação. Determinar os capitais aplicados e as taxas de juros das duas operações. (a) modelo racional (b) modelo comercial.
 Resp.: Rac.- $C_1 = \$ 11.040,00$, $i_1 = 2,17\%$ am, $C_2 = \$ 6.960,00$, $i_2 = 9,578\%$ am; Com. $C_1 = \$ 11.040,00$, $i_1 = 2,00\%$ am, $C_2 = \$ 6.960,00$, $i_2 = 7,44\%$ am.

Valor presente de um fluxo de caixa

O valor presente de um fluxo de caixa é a soma dos valores de cada um dos seus componentes descontados para a data focal 0 (ou presente).

Veja o fluxo de caixa representado na figura 11 e os descontos feitos em cada uma das parcelas componentes.



GLOSSÁRIO

Valor presente (PV_{FC}) - de um fluxo de caixa é a soma dos valores de cada um dos seus componentes descontados para a data focal zero (ou presente).

Figura 11: Valor presente de um fluxo de caixa

Fonte: elaborada pelo autor.

Os valores presentes de cada uma das parcelas será representado por:

de PMT_1 por PV_{PMT1}

de PMT_2 por PV_{PMT2}

de PMT_m por PV_{PMTm}

E o valor presente do fluxo de caixa será dado pela soma desses valores presentes:

$$PV_{FC} = PV_{PMT1} + PV_{PMT2} + \dots + PV_{PMTm}$$

Observe que esse conceito de valor presente pode ser aplicado tanto ao modelo de desconto racional como ao modelo de desconto comercial.

Você verá a aplicação desses conceitos no próximo tópico de estudo que é equivalência de capitais em regime de juros simples.

Equivalência de capitais

Considere agora os dois fluxos de caixa representados na figura 12.

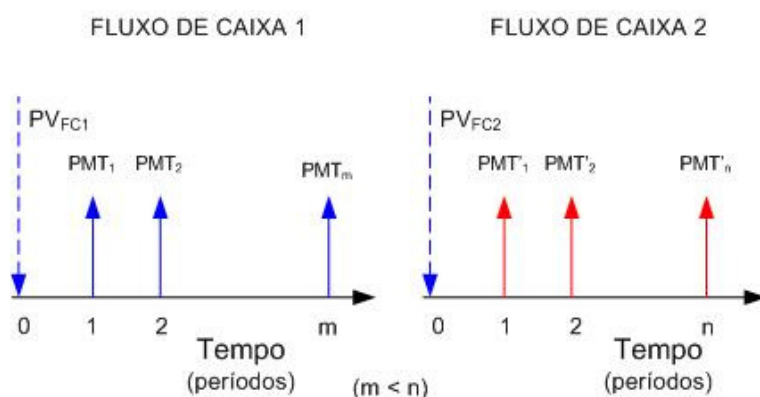


Figura 12: Equivalência de Capitais – RJS

Fonte: elaborada pelo autor.

Esses fluxos de caixa FC_1 e FC_2 têm suas entradas de caixa dadas respectivamente por $PMT_1, PMT_2, \dots, PMT_m$ e $PMT'_1, PMT'_2, \dots, PMT'_n$. O subscrito representa o ponto temporal em que se dá a entrada de caixa.

Para comparar esses dois fluxos de caixa em regime de juros simples você deve se comparar os seus valores presentes.

Para que os dois fluxos de caixa, mostrados na figura 12, sejam equivalentes eles devem produzir valores presentes iguais quando descontados a uma mesma taxa de juros. A taxa que garante essa igualdade é denominada *taxa de juros (ou de desconto) de equivalência*.

Dois fluxos de caixa serão definidos como equivalentes quando os seus valores presentes, calculados para a mesma taxa de juros, forem iguais, ou seja:

se Fluxo de caixa 1 $\approx$ Fluxo de caixa 2 então,

$$PV_{FC1} = PV_{FC2}$$

Esse conceito de equivalência permite comparar fluxos de caixa (por exemplo, para decidir entre alternativas de financiamento) através da comparação dos seus valores presentes.

Os descontos podem ser feitos tanto no modelo racional como no modelo comercial e, por simplificação, deste ponto em diante nos referiremos simplesmente a uma taxa que poderá: taxa de juros no modelo racional ou taxa de desconto no modelo comercial, conforme a situação em análise.

Equivalência de fluxos de caixa em desconto racional

Você pode obter as relações de equivalência calculando os valores atuais dos dois fluxos de caixa, representados na figura

12, pelo critério do desconto racional (utilizando a fórmula: $C = M/(1+i*n)$) e lembrando que:

$$PV_{PMT_1} = \frac{PMT_1}{(1+i*1)}; PV_{PMT_2} = \frac{PMT_2}{(1+i*2)}; \dots; PV_{PMT_m} = \frac{PMT_m}{(1+i*m)}$$

$$PV_{PMT'_1} = \frac{PMT'_1}{(1+i*1)}; PV_{PMT'_2} = \frac{PMT'_2}{(1+i*2)}; \dots; PV_{PMT'_n} = \frac{PMT'_n}{(1+i*n)}$$

tem-se:

$$PV_{FC1} = \frac{PMT_1}{(1+1*i)} + \frac{PMT_2}{(1+2*i)} + \dots + \frac{PMT_m}{(1+m*i)}$$

$$PV_{FC2} = \frac{PMT'_1}{(1+1*i)} + \frac{PMT'_2}{(1+2*i)} + \dots + \frac{PMT'_n}{(1+n*i)}$$

De acordo com a definição de equivalência, esses dois fluxos de caixa serão equivalentes, em desconto racional, quando os seus valores atuais forem iguais (para a taxa de juros i), ou seja:

$$PV_{FC1} = PV_{FC2}$$

Equivalência de fluxos de caixa em desconto comercial

De modo análogo, para determinar as relações de equivalência, em desconto comercial, os valores atuais dos fluxos de caixa são calculados com a aplicação das fórmulas do desconto comercial ($PV = FV*(1 - i*n)$). Assim:

$$PV_{FC1} = PMT_1*(1 - 1*i) + PMT_2*(1 - 2*i) + \dots + PMT_m*(1 - m*i)$$

$$PV_{FC2} = PMT'_1*(1 - 1*i) + PMT'_2*(1 - 2*i) + \dots + PMT'_n*(1 - n*i)$$

Como já dito anteriormente, os dois fluxos de caixa serão equivalentes, em desconto comercial, se os seus valores atuais forem iguais (para a mesma taxa de desconto i), ou seja:

$$PV_{FC1} = PV_{FC2}$$

Atenção: Os valores atuais dos dois fluxos de caixa

dependem da taxa de juros; portanto, a comparação desses fluxos só faz sentido quando os cálculos forem efetuados com uma mesma taxa de juros; essa taxa será a taxa de juros (ou de desconto) de equivalência.

Exemplo 2.15: dois títulos de \$ 1.000 que seus vencimentos daqui a 30 e 60 dias devem ser substituídos por outros dois títulos com vencimentos para 60 e 90 dias. Sabendo-se que esses títulos têm o mesmo valor de face e que a taxa de juros é 2% am, calcular os seus novos valores. Modelo Racional.

Sumário de dados: $PMT_1 = 1.000$, $n_1 = 1$ m, $PMT_2 = 1.000$, $n_2 = 2$ m, $PMT_3 = PMT = ?$, $n_3 = 2$ m, $PMT_4 = PMT = ?$, $n_4 = 3$ m, $i = 2\%$ am, mod. rac.

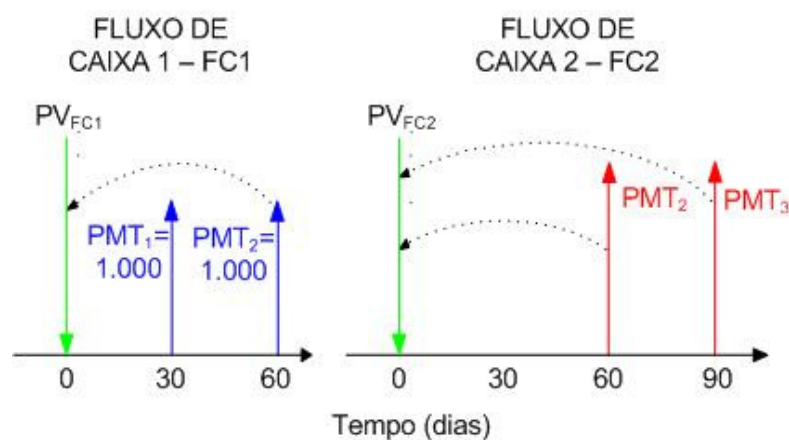


Figura 13: Repactuação de pagamentos.

Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: a figura 13 mostra o valor dos novos títulos designado por PMT. Do ponto de vista financeiro, os fluxos de caixa das duas alternativas de pagamento devem ser equivalentes. Assim, a condição do problema impõe que os valores presentes dessas duas alternativas de pagamento sejam iguais.

Aplicando-se a fórmula do valor atual – modelo racional - para um fluxo de caixa de dois elementos, tem-se:

para o primeiro fluxo de caixa ($n_1 = 1$ mês, $n_2 = 2$ meses),

$$PV_{FC1} = \frac{PMT_1}{(1+i*1)} + \frac{PMT_2}{(1+i*2)}$$

$$PV_{FC1} = \frac{1.000}{(1+0,02*1)} + \frac{1.000}{(1+0,02*2)}$$

$$PV_{FC1} = 980,39 + 961,53 = \$ 1.941,92$$

para o segundo fluxo de caixa ($m_1 = 2$ meses, $m_2 = 3$ meses),

$$PV_{FC2} = \frac{PMT}{(1+0,02*2)} + \frac{PMT}{(1+0,02*3)}$$

$$PV_{FC2} = \frac{PMT}{1,04} + \frac{PMT}{1,06} = \frac{1,06 * PMT + 1,04 * PMT}{1,04 * 1,06}$$

$$PV_{FC2} = 1,9049 * PMT$$

c) Aplicando-se a condição de equivalência para os dois fluxos de caixa, tem-se: $PV_{FC1} = \$ 1.941,92 = PV_{FC2} = 1,9049 * PMT$

decorre: $PMT = \$ 1.019,43$

E se o modelo fosse o comercial? a solução seria análoga, apenas com a aplicação da fórmula de desconto comercial, qual seja: $PV_{FC} = FV * (1 - i * n)$

$$PV_{FC1} = 1.000 * (1 - 0,02 * 1) + 1.000 * (1 - 0,02 * 2)$$

$$PV_{FC1} = 980 + 960 = \$ 1.940$$

$$PV_{FC2} = PMT * (1 - 0,02 * 2) + PMT * (1 - 0,02 * 3)$$

$$PV_{FC2} = 0,96 * PMT + 0,94 * PMT = 1,90 * PMT$$

Igualando-se os dois valores atuais:

$$PV_{FC1} = 1.940 = PV_{FC2} = 1,90 * PMT$$

tem-se:

$$\text{PMT} = \$ 1.021,05$$

Exemplo 2.16: compra-se um produto cujo preço à vista é \$ 10.000,00. Deseja-se financiar a compra em quatro parcelas iguais com vencimentos a 30, 60, 90 e 120 dias. Se a taxa de juros é 5% am e o modelo de descontos racional, qual o valor dessas parcelas?

Sumário de dados: $PV = 10.000,00$, $n = 4$, $i = 5\%$ am, $\text{PMT}?$

Solução: a) a figura 14 mostra o problema graficamente; ela indica claramente a existência de dois fluxos de caixa: o primeiro que representa o valor à vista da mercadoria e o segundo que representa o parcelamento da compra em quatro prestações,

b) calcular o valor atual do fluxo de caixa das parcelas e

c) impor a condição de equivalência entre os dois fluxos de caixa: o primeiro que representa o valor à vista da mercadoria (PV_{FC1}) e o segundo que representa o pagamento em quatro parcelas (PV_{FC2}).

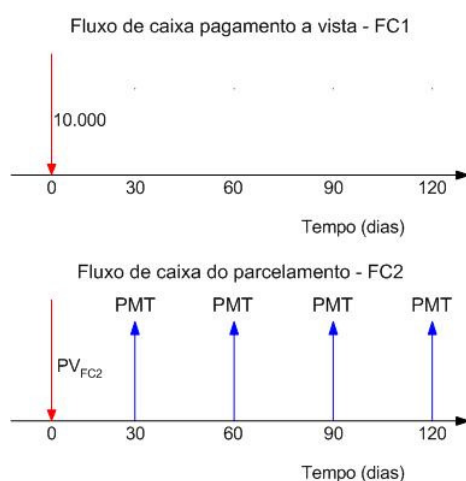


Figura 14: Financiamento em quatro parcelas iguais

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor presente do primeiro fluxo de caixa é \$ 10.000,00 por representar o preço à vista da mercadoria,

$$PV_{FC1} = 10.000$$

O valor presente do segundo fluxo de caixa representativo do pagamento em quatro parcelas, em modelo de desconto racional, é dado por:

$$PV_{FC2} = \frac{PMT_1}{(1+i \cdot n_1)} + \frac{PMT_2}{(1+i \cdot n_2)} + \frac{PMT_3}{(1+i \cdot n_3)} + \frac{PMT_4}{(1+i \cdot n_4)}$$

porém:

$$PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = PMT_4 = PMT \text{ e}$$

$i = 0,05$ am (forma unitária), $n_1 = 1$ m, $n_2 = 2$ m, $n_3 = 3$ m e $n_4 = 4$ m. Estes valores substituídos na expressão de PV_{FC2} resulta,

$$PV_{FC2} = \frac{PMT}{(1+0,05 \cdot 1)} + \frac{PMT}{(1+0,05 \cdot 2)} + \frac{PMT}{(1+0,05 \cdot 3)} + \frac{PMT}{(1+0,05 \cdot 4)}$$

colocando em evidencia o fator comum “PMT”, tem-se,

$$PV_{FC2} = PMT \cdot \left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,10} + \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,20} \right)$$

$$PV_{FC2} = PMT \cdot 5,6812/1,5939$$

Para solucionar o problema basta estabelecer a equivalência entre os dois fluxos de caixa, ou seja:

$$PV_{FC1} = 10.000 = PV_{FC2} = PMT \cdot 5,6812/1,5939$$

$$PMT = 1,5939/5,6812 \cdot 10.000$$

$$PMT = \$ 2.805,56$$

Exemplo 2.17: Uma loja abre aos seus clientes três opções de pagamento para a venda de um eletrodoméstico: a) à vista por \$ 1.100,00, b) uma entrada de \$ 200,00 e quatro prestações mensais e sucessivas no valor de \$ 250,00 e c) uma entrada de \$ 400,00 e duas prestações mensais e sucessivas no valor de \$ 350,00. Sabendo que a taxa de juros de mercado é de 3% am,

qual das três propostas lhe é mais favorável? Modelos racional e comercial.

Sumário de dados: 1) $PV = 1.100,00$, 2) $E = 200,00$, $PMT = 250,00$, $n = 4$, 3) $E = 400,00$, $PMT = 350,00$, $n = 2$, $i = 3\%$ am p as três situações.

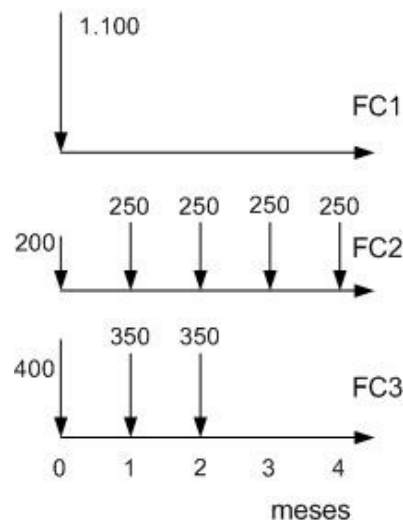


Figura 15: Alternativas de financiamento.

Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: a) a figura 15 mostra o problema graficamente e indica os três fluxos de caixa; o primeiro que representa o valor a vista da mercadoria e os demais que representam os parcelamentos da compra em quatro e duas prestações,

b) calcular o valor atual do fluxo de caixa das parcelas usando como taxa de juros 3% am e

c) escolher a opção que lhe der o menor valor presente

Cálculos: a) modelo racional

O fluxo de caixa 1 já está expresso em valor presente (a vista):

$$VP_{FC1} = 1.100,00$$

Para os fluxos de caixa 2 e 3 deve-se aplicar a fórmula de desconto racional, para as condições dadas:

$$PV_{FC} = \frac{PMT_1}{(1+i*1)} + \frac{PMT_2}{(1+i*2)} + \dots + \frac{PMT_m}{(1+i*m)}$$

$$PV_{FC2} = 200 + \frac{250}{(1+0,03*1)} + \frac{250}{(1+0,03*2)} + \frac{250}{(1+0,03*3)} + \frac{250}{(1+0,03*4)}$$

$$PV_{FC2} = 1.135,12$$

$$PV_{FC3} = \frac{400}{(1+0,03*0)} + \frac{350}{(1+0,03*1)} + \frac{350}{(1+0,03*2)}$$

$$VP_{FC3} = 1.069,99$$

Nessas condições, para o modelo de desconto racional, a opção mais vantajosa é a que corresponde ao fluxo de caixa 3 por apresentar o menor valor presente.

b) modelo comercial. Aqui os cálculos se repetem, porém com a fórmula do desconto comercial:

$$VP_{FC1} = 1.100,00$$

$$PV_{FC} = PMT_1 * (1 - i * 1) + PMT_2 * (1 - i * 2) + \dots + PMT_m * (1 - i * m)$$

$$VP_{FC2} = 200 + 250*(1 - 0,03*1) + 250*(1 - 0,03*2) + 250*(1 - 0,03*3) + 250 * (1 - 0,03*4)$$

$$VP_{FC2} = 1.125,00$$

$$VP_{FC3} = 400*(1-0,03*0) + 350*(1 - 0,03*1) + 350*(1- 0,03*2)$$

$$VP_{FC3} = 1.068,50$$

O modelo comercial de desconto confirma a decisão apontada pelo modelo racional: a melhor opção é a que corresponde ao fluxo de caixa 3.

Atividades de aprendizagem

17. Um produto é ofertado por uma loja em duas condições alternativas; (a) \$ 20.000,00 à vista, e (b) dois pagamentos iguais no valor de \$ 10.299,00 para 30 (trinta) e 60 (sessenta) dias da data da compra. Qual a taxa mensal de juros cobrada pela loja? (resolver pelos modelos racional e comercial). Resp.: $i_r = 1,99\%$ am, $i_b = 1,935\%$ am

18. Uma loja vende um videocassete por \$ 500,00, à vista. Alternativamente, contempla a venda a prazo com uma entrada de \$ 50,00 e um pagamento adicional de \$ 531,00 após 6 meses. Qual a taxa de juros anual cobrada? Resolver pelos modelos comercial e racional. Resp.: $i_a = 36$ aa (mod. rac.), $i_a = 30,50$ %aa (mod. banc.)

19. Aplicam-se \$ 50.000,00 à taxa de juros de 12% aa e por um período de 4 (quatro) meses. Um mês após essa aplicação, faz-se nova aplicação à taxa de juros de 20% aa e por três meses. Qual o valor desta segunda aplicação para que os montantes das duas operações sejam iguais? (a) modelo racional (b) modelo comercial. Resp.: $C_r = \$ 49.523,80$, $C_b = \$ 49.479,16$

20. Uma mercadoria, cujo valor à vista é \$ 20.000,00, foi vendida em 3 (três) pagamentos para 30 (trinta), 60 (sessenta) e 90 (noventa) dias da data da venda. Sabendo que cada pagamento supera o anterior em \$ 2.000,00 e que a taxa de juros da operação é 24% aa, determinar o valor de cada pagamento. (a) modelo racional (b) modelo comercial. Resp.: Rac. $R_1 = \$ 4.958,12$, $R_2 = \$ 6.958,12$, $R_3 = \$ 8.958,12$; Com. $R_1 = \$ 4.972,22$, $R_2 = \$ 6.972,22$, $R_3 = \$ 8.972,22$

Resumo

Esta unidade levou-o a estudar o regime de juros simples ou de capitalização simples. Em primeiro lugar você estudou a

modelagem do regime e deduziu suas fórmulas básicas. A seguir você entrou em contato com os conceitos de taxas de juros proporcionais e equivalentes concluindo que ambas são iguais nesse regime de juros. Você prosseguiu seus estudos aprendendo a distinguir taxas de juros diárias: exata e comercial. Após esses conceitos básicos você se debruçou no estudo dos descontos segundo os modelos racional e bancário e, por fim, estudou a equivalência de fluxos de caixa. Neste último tópico, você estudou primeiramente o conceito geral de equivalência para depois aplicar a esse conceito os modelos de desconto racional e comercial.

Você cumpriu todas as atividades propostas na unidade? Entendeu todos os conceitos abordados? Se a resposta for negativa, volte ao texto, consulte seu tutor, refaça as atividades! Se a resposta for positiva e você apreendeu perfeitamente o conteúdo, parabéns! Você está apto a seguir em frente e estudar o regime de juros compostos, objeto da unidade 3.

Unidade 3

Regime de juros compostos

Objetivos

Esta unidade lhe apresentará a modelagem do regime de juros compostos, os conceitos de proporcionalidade e equivalência de taxas de juros, as bases das operações de desconto de títulos e os conceitos de equivalência de capitais nesse regime de juros. Por conseqüência, esperamos que ao final do mesmo você possa:

- conhecer a modelagem matemática do regime de capitalização composta;
- identificar taxas de juros nominais e efetiva;
- conhecer o conceito de descontos e suas modelagens básicas;
- estudar a equivalência de capitais no regime de capitalização composta.

Para facilitar seu aprendizado você deverá dominar com segurança os seguintes assuntos:

- álgebra elementar;
- representação gráfica de funções;
- conceitos vistos na unidade 1 e 2.

Caso tenha alguma dificuldade com esses pontos faça uma revisão prévia. O site <http://www.somatematica.com.br/index2.php> é excelente para orientar o aprendizado de matemática em nível médio e superior.

Introdução

A unidade 1 lhe apresentou de maneira sucinta o regime de juros compostos. Naquela unidade você aprendeu que o juro produzido em cada período é agregado ao saldo do início desse período constituindo uma nova base para o cálculo do juro no período seguinte; a este processo de agregação de juro aos saldos iniciais de cada período, dá-se o nome de capitalização de juros ou simplesmente capitalização. Período de capitalização é o período ao final do qual se processa essa agregação do juro produzido ao capital.

Nesta unidade você analisará o problema da **capitalização*** dos valores financeiros em regime de juros compostos, isto é, do crescimento desses valores com o tempo e, a seguir, o problema oposto da diminuição desses valores futuros quando trazidos para o presente, ou seja, o desconto de valores financeiros futuros.

GLOSSÁRIO

**Capitalização é a agregação do juro gerado em um período ao saldo inicial do período posterior estabelecendo uma nova base para o cálculo de juros.*

Fórmulas básicas

Montante

Primeiramente, você vai se apropriar da fórmula relativa a capitalização de valores financeiros no tempo; para tanto, suponha um valor financeiro presente (C), aplicado durante n períodos a uma taxa de juros periódica i_p . Essa aplicação gera um montante (M) ao final da aplicação cujo valor se deseja conhecer.

A tabela 5, construída a partir do conceito básico de juros compostos, permite a você deduzir, por recorrência, a fórmula geral deste regime de juros. Nessa tabela, os períodos de tempo estão apresentados na primeira coluna (data), os saldos

existentes no início de cada período (SDi_k) estão apresentados na segunda coluna, a terceira e quarta colunas mostram a fórmula de cálculo dos juros e o resultado do cálculo e a quinta coluna mostra o saldo no final de cada período (SDf_k). A construção da quinta coluna SDf_k obedece à fórmula básica da matemática financeira $M = C + J$, sendo o resultado da soma ordenada dos valores da segunda com a quarta colunas. As expressões finais que aparecem na coluna 3 são o resultado de operações de fatoração algébrica (k representa os diversos períodos da operação).

Data	SDi_k	Juro (J_k)	$SDf_k = SDi_k + J_k$
		$J_k = SDi_k * i_p$	
1	C	$C * i_p$	$C + C * i_p = C * (1 + i_p)$
2	$C * (1 + i_p)$	$C * (1 + i_p) * i_p$	$C * (1 + i_p) + C * (1 + i_p) * i_p = C * (1 + i_p)^2$
3	$C * (1 + i_p)^2$	$C * (1 + i_p)^2 * i_p$	$C * (1 + i_p)^2 + C * (1 + i_p)^2 * i_p = C * (1 + i_p)^3$
.	.	.	.
..	..	..	..
n-2	...	...	$= C * (1 + i_p)^{n-2}$
n-1	$C * (1 + i_p)^{n-2}$	$C * (1 + i_p)^{n-2} * i_p$	$C * (1 + i_p)^{n-2} + C * (1 + i_p)^{n-2} * i_p = C * (1 + i_p)^{n-1}$

Tabela 5: Capitalização de juros

Por recorrência, foi-lhe mostrado que o capital inicial ($C = PV$), ao final de n períodos de aplicação, a uma taxa de juros i_p ao período, gerará um montante (**M**) ou valor futuro (**FV**) de:

$$M = C * (1 + i_p)^n \quad (3.1)$$

Saiba mais...

Para apoio ao entendimento da Tabela 5, veja a leitura complementar LC21 em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC21.doc

Veja também:

<http://br.youtube.com/watch?v=cal8qhF1N8&feature=related>.

Capital ou valor presente

O problema inverso ao da capitalização é o desconto, ou seja, dado um determinado montante (M) conhecido, determinar qual o valor do capital (C) a ele equivalente, para uma taxa de juros i_p e para o tempo a decorrer n , expresso em períodos; a resposta é imediata e decorre de (3.1):

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \quad (3.2)$$

A dificuldade de cálculo inerente a essas fórmulas é a operação de potenciação $(1+i)^n$ e pode exigir o uso de calculadoras. Entretanto, a expressão entre parênteses depende apenas do par taxa de juros e número de períodos $[i\%;n]$ e pode ser tabulada para vários desses pares, simplificando assim as operações de cálculo.

Deve-se observar que a taxa de juros unitária i se refere ao período de capitalização e é, como se verá a seguir, uma taxa efetiva de juros.

As expressões $[1+i]^n$ e $[1+i]^{-n}$ pela freqüência com que são utilizadas recebem denominações específicas, diferentes de autor para autor. Este livro adotará as denominações:

$FVF[i\%;n] = [1+i]^n$ - Fator de Valor Futuro

$FVP[i\%;n] = [1+i]^{-n}$ - Fator de Valor Presente.

A expressão $[i\%;n]$ indica a taxa de juros e o período a que se refere o fator.

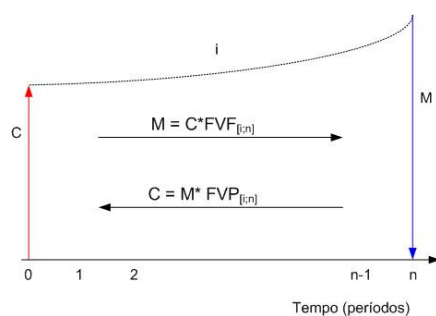


Figura 16: Fatores de cálculo

Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa maneira, você pode escrever as expressões (3.1) e (3.2) da seguinte maneira:

$$C = M * FVP_{[i\%;n]} \quad (3.3)$$

Os valores de FVF e FVP podem ser vistos em tabelas financeiras para vários pares $[i\%;n]$.

A solução desses problemas pode ser visualizada na figura 16 na qual se considerou n como variável contínua.

Capitalização e descontos

Ao trabalharmos com capitalização e descontos, a nomenclatura utilizada será aquela vista em descontos simples:

PV valor presente (ao invés de C)

FV valor futuro (ao invés de M)

E as fórmulas de juros compostos já vistas se transformam em:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \quad PV = FV * FVP_{[i\%;n]} \quad (3.3)$$

$$FV = PV * (1+i_p)^n \quad FV = PV * FVF_{[i\%;n]} \quad (3.4)$$

Os problemas de capitalização e descontos podem ser reduzidos a quatro grupos específicos:

1. conhecidos PV, n e i - calcular FV;
2. conhecidos FV, n e i - calcular PV);
3. conhecidos PV, FV e n - calcular i;
4. conhecidos PV, FV e i - calcular n.

Os dois primeiros problemas por terem $[i\%;n]$ conhecido, podem ser expressos diferentemente:

1. conhecidos PV e $FVF_{[i\%;n]}$ - calcular FV;
2. conhecidos FV e $FVP_{[i\%;n]}$ - calcular PV.

E suas soluções são simples com a utilização de tabelas financeiras.

Os problemas dos grupos 3 e 4 demandam soluções de aproximação, na ausência de calculadoras com funções exponenciais. Seguem alguns exemplos numéricos representativos dos quatro tipos de problemas apontados.

Saiba mais...

Sobre tabelas financeiras, ver em http://www.proativams.com.br/index.php?modulo=arquivos&id_pasta=5.

Exemplo 3.1: calcular o montante de um capital de \$ 1.000,00 aplicado por 6 meses a uma taxa de juros de 3% am, sabendo-se que a capitalização é mensal.

Sumário de dados: PV = 1.000,00, n = 6 m, i = 3% am, FV = ?

Solução: aplicando-se a fórmula (3.4):

$$FV = PV * FVF_{[i\%;n]} = PV * FVF_{[3\%;6]}$$

Em tabelas financeiras se vê que $FVF_{[3\%;6]} = 1,19405$ para o par $[i\%;n] = [3;6]$. Substituindo esses valores na expressão acima:

$$FV = 1.000 * 1,19405$$

$$FV = \$ 1.194,05$$

Exemplo 3.2: qual o valor de um capital que aplicado por 6 meses a uma taxa de juros de 3% am e capitalização mensal rendeu um montante de \$ 1.000,00 ?

Sumário de dados: $PV = ?$, $n = 6$ m, $i = 3\%$ am, $FV = 1.000,00$

Solução: aplicando-se a fórmula (3.3):

$$PV = FV * FVP_{[i\%;n]} = FV * FVP_{[3\%;6]}$$

Em tabelas financeiras você pode ver que $FVP_{[3\%;6]} = 0,83748$ para o par $[i\%;n] = [3;6]$. Substituindo os valores já identificados na expressão acima:

$$PV = 1.000 * 0,83748$$

$$PV = \$ 837,48$$

Saiba mais...

A capitalização de juros pode se dar de modo contínuo ou de modo discreto. Para saber um pouco mais sobre este assunto faça a LC22 em http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC22.doc.

Taxas de juros em regime de juros compostos

Você se lembra de que, conforme visto no tópico sobre regime de juros simples, as taxas de juros proporcionais são também equivalentes? No regime de juros compostos isto não acontece; veja isto a partir de um exemplo:

Lembrete!

Duas taxas de juros são equivalentes quando ao serem aplicadas ao mesmo capital e pelo mesmo prazo, gerarem montantes iguais.

Exemplo 3.3: qual o montante gerado por um capital de \$ 1.000,00 aplicado por 12 meses a taxa de juros de 36% aa ?

Sumário de dados: $PV = 1.000,00$, $n = 12$ m, $i = 36\%$ aa, $FV = ?$

Solução: você vai verificar que existem duas possibilidades para o cálculo de FV gerando dois valores que serão comparados porque a taxa de juros não está definida com precisão.

Possibilidade 1: você vai admitir que a capitalização dos juros é mensal e que a taxa de juros mensal - i_m - seja a taxa proporcional à taxa anual de juros dada, tem-se;

$i_m = \text{taxa mensal proporcional} = 36/12 = 3\%$ am

e com a utilização da fórmula de capitalização (3.4),

$$FV = PV * FVF_{[i\%,n]}$$

$$FV_1 = PV * FVF_{[3\%,12]} = 1.000 * 1,42676 = \$ 1.426,76$$

Tirando de tabela financeira a 3% o valor de $FVF_{[3\%,12]} = 1,42676$.

Com a fórmula algébrica você teria;

$$FV_1 = PV * (1 + i)^n = 1.000 * (1 + 0,03)^{12} = \$ 1.426,76$$

Possibilidade 2: você vai admitir que a capitalização dos juros é anual sendo a taxa de juros de entrada 36% aa; tem-se o seguinte montante:

$$FV = PV * FVF_{[i\%,n]}$$

$$FV_2 = PV * FVF_{[36\%,1]} = 1.000 * 1,36 = \$ 1.360,00$$

Tirando de tabela financeira a 36% o valor de $FVF_{[36\%,1]} = 1,36$.

Com a fórmula algébrica você teria;

$$FV_2 = PV * (1+i)^n = 1.000 * (1+0,36)^1 = \$ 1.360,00$$

Você pode constatar agora que os montantes gerados pelas duas alternativas de cálculo FV_1 e FV_2 , são diferentes. Isto significa que as taxas de juros de 3% am com capitalização mensal e de 36% aa com capitalização anual, apesar de serem proporcionais, não são equivalentes, pois geram montantes diferentes em tempos iguais.

Então você se pergunta: O que ocorreu? A resposta é que o exemplo 3.3 formulou de forma imprecisa a taxa de juros e ensejou essa dupla interpretação. A taxa de juros em regime de juros compostos precisa ser definida com clareza e precisão.

Em regime de juros compostos taxas de juros proporcionais não são equivalentes. Em consequência, o primeiro passo para se trabalhar em regime de juros compostos é compatibilizar taxas de juros e períodos de capitalização.

Taxa de juros efetiva

Uma taxa de juros é dita efetiva, quando está expressa em unidade de tempo igual à unidade de tempo do período de capitalização.

Assim, são taxas efetivas de juros:

1% am com capitalização mensal;

3% at com capitalização trimestral;

6% as com capitalização semestral; e

9% aa com capitalização anual.

Taxa de juros nominal

Uma taxa de juros é dita nominal quando está expressa em unidade de tempo diferente da unidade de tempo do período de capitalização.

Assim, são taxas nominais de juros:

36% aa com capitalização trimestral;

10% at com capitalização mensal e

10% as com capitalização anual .

Portanto, em regime de juros compostos é necessário que se conheça a taxa de juros efetiva que é a utilizada nas fórmulas; isso exige a explicitação do período de capitalização.

Com estes conceitos retome o exemplo 3.3: a solução proposta para a **possibilidade 1** adotou como taxa efetiva a taxa mensal proporcional de 3% am, e a solução proposta para a **possibilidade 2** adotou como efetiva a taxa de 36% aa; entretanto, o enunciado do exemplo 3.3 deixam dúvidas sobre qual a taxa efetiva verdadeira.

Nesse exemplo, se taxa efetiva for a taxa mensal proporcional à taxa anual, a solução dada para a possibilidade 1 será a correta. Porém, se a taxa efetiva for a taxa anual de 36 %aa, a solução apresentada para a possibilidade 2 é que estará correta.

O montante gerado numa operação financeira, em regime de juros compostos, é sempre calculado a partir da taxa de juros efetiva. Se a taxa de juros dada for nominal calcule a taxa efetiva por proporcionalidade tomando como fator de proporcionalidade o número de

períodos de capitalização contido no tempo a que se refere a taxa de juros.

Taxas de juros equivalentes

Conforme você viu em regime de juros simples, duas taxas de juros são ditas equivalentes quando aplicadas ao mesmo capital pelo mesmo prazo gerarem o mesmo montante. Para relacionar de modo sistemático essas equivalências considerem-se as seguintes nomenclaturas:

i_a taxa de juros anual;

i_t taxa de juros trimestral;

i_s taxa de juros semestral;

i_m taxa de juros mensal; e

i_d taxa de juros diária.

Os montantes gerados por um capital unitário em 1 ano, considerando as taxas acima como efetivas, e calculados a partir de (3.4) são:

$$FV_a = 1 * (1 + i_a)^1 \quad \text{com} \quad PV = 1 \quad n = 1 \text{ ano}$$

$$FV_s = 1 * (1 + i_s)^2 \quad \text{com} \quad PV = 1 \quad n = 2 \text{ semestres}$$

$$FV_t = 1 * (1 + i_t)^4 \quad \text{com} \quad PV = 1 \quad n = 4 \text{ trimestres}$$

$$FV_m = 1 * (1 + i_m)^{12} \quad \text{com} \quad PV = 1 \quad n = 12 \text{ meses}$$

$$FV_d = 1 * (1 + i_d)^{360} \quad \text{com} \quad PV = 1 \quad n = 360 \text{ dias}$$

A hipótese de que as diversas taxas sejam equivalentes, faz com que os montantes (FV_d , FV_m , FV_t , FV_s e FV_a) sejam todos iguais; dessa consideração decorre:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360} \quad (3.5)$$

A expressão acima permite transformar taxas de juros efetivas de uma temporalidade para outra.

Exemplo 3.4: calcular i_d , i_m e i_s equivalentes a 45% aa.

Solução: a partir de (3.5),

a) para taxa diária:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_d)^{360} \quad i_d = (1 + i_a)^{1/360} - 1$$

$$i_d = (1 + 0,45)^{1/360} - 1 \quad i_d = 0,00103 \text{ ad ou } 0,103\% \text{ ad}$$

b) para taxa mensal:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12} \quad i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1$$

$$i_m = (1 + 0,45)^{1/12} - 1 \quad i_m = 0,0314 \text{ am ou } 3,14\% \text{ am}$$

c) para taxa semestral:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_s)^2 \quad i_s = (1 + i_a)^{1/2} - 1$$

$$i_s = 0,204 \text{ as ou } 21,4\% \text{ as}$$

Observação: O mercado financeiro costuma divulgar suas taxas de juros em bases anuais nominais; nesses casos, a taxa efetiva de juros é a taxa proporcional calculada pela proporcionalidade ia/k , sendo k o número de capitalizações de juros que irão ocorrer no ano.

Até este ponto, você estudou a modelagem básica do regime de capitalização composta, tomou contato com suas fórmulas básicas e sobretudo estudou a diferenças existente entre taxas de juros proporcionais e equivalentes. Antes de avançar seus

estudos, resolva as atividades propostas para apoiá-lo na sedimentação do conhecimento adquirido.

Atividades de aprendizagem

1. Determinar as taxas diária, mensal, trimestral e semestral equivalentes a 36% aa. Compare os valores obtidos com as respectivas taxas proporcionais. Resp:

Taxas equivalentes: $i_d = 0,085449\%$ ad, $i_m = 2,5954\%$ am, $i_t = 7,99\%$ at, $i_s = 16,619\%$ as.

Taxas proporcionais: $i_d = 0,10\%$ ad, $i_m = 3,00\%$ am, $i_t = 9,00\%$ at, $i_s = 18,00\%$ as.

2. Um capital de \$ 10.000,00 foi aplicado durante 5 anos à taxa de juros de 3% aa. Dizer: (a) quais os juros totais produzidos, e (b) o valor atingido pelo capital ao final de 5 anos. Resp. (a) \$ 1.592,74, (b) 11.592,74.

3. Que taxa nominal de juros anual, capitalizada trimestralmente, produz juros totais iguais a 60% do capital ao final de 5 anos? Resp. $i_a = 9,51\%$ aa.

4. Quanto devo aplicar numa instituição financeira, em caderneta de poupança, que paga uma taxa de juros de 6% aa, para obter \$ 10.000,00 ao final de 5 anos? Resp.: \$ 7.413,72.

5. Qual o montante produzido por um capital de \$ 10.000,00 aplicado durante 4 anos e três meses, à taxa efetiva de 18% aa ? utilize as duas convenções. Dica: Quando o período de tempo não é inteiro (4a3m do ex. 5) você pode calcular os juros referentes à parte não inteira por duas formas distintas: a) convenção linear: o juro referente a esse período não inteiro é calculado em regime de juros simples; e b) convenção exponencial: o juro referente a esse período não inteiro é

calculado em regime de juros compostos. Resp.: C. Linear $M = \$ 20.260,21$, C. Exp. $M = \$ 20.206,84$.

6. Determinar a taxa de juros compostos que dobra um capital ao final de 11 anos. Utilize as tabelas financeiras. Resp.: $i_a = 6,5\%$ aa.

Desconto em juros compostos

Em juros compostos utiliza-se mais freqüentemente o modelo de desconto racional, isto é, aquele em que a base de cálculo dos juros é o valor presente (PV).

Desconto racional ou desconto real

Para o estudo do desconto racional em juros compostos a nomenclatura utilizada será:

- PV = capital ou valor presente;
- FV = montante ou valor futuro;
- i = taxa de juros *efetiva* por período;
- D_r = desconto racional; e,
- n = número de períodos.

A figura 17 ilustra bem o problema.

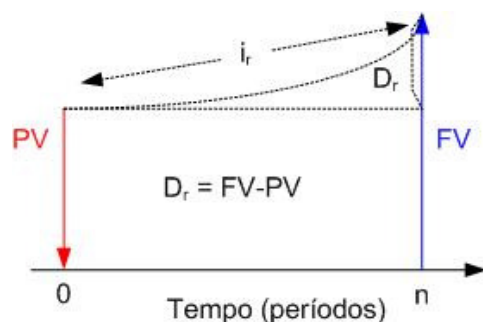


Figura 17: Modelo de desconto em juros compostos

Fonte: elaborada pelo autor.

Saiba mais....

O modelo de desconto comercial composto pode ser visto em LC23 disponível em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC23.doc.

O desconto racional (D_r) é definido como:

$$D_r = FV - PV$$

De (3.4) tem-se:

$$FV = PV * (1 + i)^n$$

do que decorre:

$$D_r = PV * (1 + i)^n - PV$$

que, por fatoração

resulta em:

$$D_r = PV * [(1 + i)^n - 1] \quad (3.6)$$

Também decorre de (3.2):

$$D_r = FV - \frac{FV}{(1 + i)^n}$$

resultando por fatoração,

$$D_r = FV * \left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n} \right] = FV * \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n} \right]$$

e,

$$D_r = FV * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \quad (3.7)$$

(3.6) e (3.7) são expressões do desconto racional composto a partir de PV e de FV.

Observe-se que, como em regime de juros simples, $D_r = J$.

O valor presente ou valor descontado (PV), conhecidos FV, i e n , é calculado da seguinte forma:

$$PV = FV - D_r$$

substituindo D_r pela sua expressão em (3.7), vem:

$$PV = FV - FV * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \right]$$

$$PV = FV * \left[1 - \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \right] = FV * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^n + 1}{(1+i)^n} \right]$$

$$PV = FV * \frac{1}{(1+i)^n} = FV * FVP_{[i\%; n]} \quad (3.8)$$

Saiba mais...

O desconto composto também pode ser feito no modelo comercial. Para conhecê-lo vá à leitura complementar LC23 em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC23.doc.

Exercícios resolvidos para ajudá-lo a fixar conceitos.

Exercício 3.1: um título de valor nominal \$ 12.000,00 foi descontado três meses antes do seu vencimento. Sabendo que a taxa de juros é 2,5% am, qual o valor atual recebido em modelo racional?

No desconto racional composto o valor do desconto coincide com o juro composto e o valor descontado coincide com o valor presente da operação.

Sumário de dados: $FV = 12.000,00$, $n = 3$ m, $i = 2,5\%$ am

Solução: aplicação da fórmula do desconto racional

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = FV * FVP_{[i\%;n]}$$

$$PV = \frac{12.000}{(1+0,025)^3} = 12.000 * FVP_{[2,5\%;3]} = 12.000 * 0,928599$$

$$PV = 12.000 * 0,928599 = 11.143,19$$

Exercício 3.2: uma nota promissória no valor de \$ 30.000,00 foi descontada 120 dias antes do seu vencimento à taxa de 4% am. Qual foi o desconto racional composto?

Sumário de dados: $FV = 30.000,00$, $n = 120$ d = 4 m, $i = 4\%$, $D_r = ?$

Solução: aplicação da fórmula do desconto racional.

$$PV = FV * \frac{1}{(1+i)^n} = 30.000 * \frac{1}{1+0,04)^4} = 25.644,12$$

O valor do desconto é dado por:

$$D_r = FV - PV = 30.000,00 - 25.355,88 = 4.355,88$$

Exercício 3.3: o vencimento de um compromisso de \$ 20.168,40 foi prorrogado por dois meses, sendo o valor da renovação \$ 21.000,00. Qual a taxa mensal de desconto para o desconto racional composto?

Sumário de dados: $PV = 20.168,40$, $FV = 21.000,00$, $n = 2$ m, $i = ?$

Solução: aplicação da fórmula de desconto racional composto

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \quad (1+i)^n = \frac{FV}{PV}$$

$$(1+i) = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{(1/n)} = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}$$

$$(1+i) = \sqrt[2]{\frac{21.000}{20.168,40}} = 1,020408$$

$$i = 1,020408 - 1 = 0,020408 \text{ ou } 2,04 \% \text{ am}$$

Exercício 3.4: um título de \$ 6.000,00 foi renovado por mais 180 dias com uma taxa de desconto de 3,5% am. Qual o valor nominal do novo título em desconto racional composto?

Sumário de dados: PV = 6.000,00, n = 180 d = 6 m, i = 3,5% am, FV=?

Solução: aplicação da fórmula de desconto racional composto

$$Dr = FV - PV = PV * (1+i)^n - PV = PV * FVF_{[3,5\%;6]} - PV$$

$$Dr = 6.000 * (1+0,035)^6 - 6000 = 6000 * 1,229355 = 1.375,53$$

Exercício 3.5: numa operação de desconto racional composto, o valor atual recebido foi de \$ 128.860,24 sendo o valor de vencimento \$ 150.000,00. O prazo de antecipação foi de 6 meses. Determinar a taxa anual de juros dessa operação.

Sumário de dados: FV = 150.000, PV = 128.860,24, n = 6 meses, i = ?

Solução: aplicar a fórmula geral de juros compostos para determinar o custo da operação Como se quer a taxa anual o período deve ser expresso em anos, ou seja, n = 6 m = 0,5 a

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \quad (1+i)^n = \frac{FV}{PV} \quad 1+i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[0,5]{\frac{150.000}{128.860,24}} - 1 = 0,355017 \text{ ou } 35,50 \% \text{ aa}$$

Como complemento você pode resolver este exercício utilizando o prazo em meses (6 meses) e determinando primeiro a taxa de juros mensal e depois, por equivalência, a taxa de juros anual efetiva.

Exercício 3.6: um estabelecimento financeiro renova um título de valor nominal \$ 4.000,00 por outro de \$ 4.472,14. Qual é o prazo de prorrogação, sabendo-se que a taxa de juros do desconto é de 36% aa?

Sumário de dados: PV= 4.000, FV = 4.472,14, i = 36% aa ou 0,36 aa, n = ?

Solução: aplicação da fórmula de desconto comercial composto

$$FV = PV * (1+i)^n \qquad \frac{FV}{PV} = (1+i)^n$$

Substituindo os valores:

$$\frac{4.472,14}{4.000} = (1+0,36)^n \quad \text{ou} \quad (1+0,36)^n = 1,36^n = 1,118035$$

Uma solução algébrica demanda a aplicação de logaritmos:

$$n \cdot \log 1,36 = \log 1,118035$$

$$n = \log 1,118035 / \log 1,36 =$$

$$n = 0,048455399 / 0,1335389 = 0,3628 \text{ a}$$

(taxa de juros em ano produz resposta em ano).

Para expressar em meses: $12 \cdot 0,3628 = 4,35$ meses ou ainda $360 \cdot 0,3628 = 130,6$ dias.

Saiba mais...

Veja logaritmos em:

<http://br.youtube.com/watch?v=ELy7nXpgYYw>.

<http://br.youtube.com/watch?v=ca18qhF71N8&feature=related>.

Exercício 3.7: uma empresa contraiu um empréstimo de \$ 10.000,00 a uma taxa efetiva de 5% aa. Passado algum tempo, tomou novo empréstimo a uma taxa efetiva de 3% aa e liquidou a dívida inicial. Esta nova dívida foi quitada 14 anos após a tomada do primeiro empréstimo por \$ 16.975,92. Determinar os prazos das duas operações. Resp.: $n_1 = 6$ a, $n_2 = 8$ a. Sugestão: usar logaritmos.

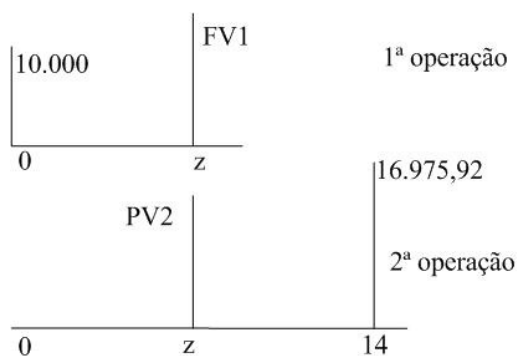


Figura 18: Gráfico do exercício 3.7

Fonte: elaborada pelo autor.

Solução gráfica: na primeira operação houve um empréstimo de \$ 10.000,00 que foi pago após um período (desconhecido) z . Para quitar esse empréstimo foi tomado outro no valor de PV_2 (também desconhecido) que foi quitado 14 anos após a tomada do primeiro empréstimo pelo valor de \$ 16.975,92. A condição imposta pelo enunciado é que $PV_2 = FV_1$.

Solução analítica: determina-se FV_1 a partir da fórmula de juros compostos (lembre que $i_1 = 5\%$ aa)

$$FV_1 = PV_1 \cdot (1 + i_1)^z$$

$$FV_1 = 10.000 \cdot (1 + 0,05)^z$$

A seguir determina-se o capital da segunda operação a partir da fórmula de juros compostos ($i_2 = 3\%$ aa):

$$FV_2 = PV_2 * (1+i_2)^{14-z}$$

$$16.975,92 = PV_2 * (1+0,03)^{14-z}$$

$$PV_2 = \frac{16.975,92}{1,03^{14-z}}$$

Como por hipótese $PV_2 = FV_1$ pode-se escrever:

$$FV_1 = 10.000 * (1+0,05)^z = PV_2 = \frac{16.975,92}{1,03^{14-z}}$$

Decorre:

$$16.975,92 = 10.000 * 1,05^z * 1,03^{14-z}$$

$$\frac{16.975,92}{10.000,00} = 1,697592 = 1,05^z * 1,03^{14-z}$$

Aplicando-se logaritmos aos dois ambos membros da equação tem-se:

$$\text{Log } 1,697592 = \text{log } 1,05^z + \text{log } 1,03^{(14-z)}$$

Seguindo-se,

$$\text{Log } 1,697592 = z * \text{log } 1,05 + (14 - z) * \text{log } 1,03$$

De calculadoras ou de tabela de logaritmos tira-se:

$$\text{Log } 1,697592 = 0,229833$$

$$\text{Log } 1,05 = 0,021189$$

$$\text{Log } 1,03 = 0,012837$$

$$0,229833 = z * 0,021189 + (14-z) * 0,012837$$

$$0,229833 = z * 0,021189 + 0,179718 - z * 0,012837$$

$$0,229833 - 0,179718 = z * 0,021189 - z * 0,012837$$

$$0,050115 = z * 0,008352$$

$z = 6,000359195402$ anos ou seja $z = 6$ anos (este é o tempo que decorreu para o encerramento da primeira operação). A duração da segunda operação foi de $14 - 6 = 8$ anos.

As atividades propostas a seguir pretendem ajudá-lo a internalizar os conteúdos estudados até este ponto, com ênfase para as operações de desconto.

Antes de resolver os exercícios vá à:
<http://www.youtube.com/watch?v=JMMTpwwew>

Atividades de aprendizagem

7. Aplica-se um determinado capital a 24% aa, com capitalizações mensais, obtendo-se um montante de \$ 12.900,00 ao final de 4 anos. Qual o valor do capital? Qual a taxa efetiva anual? Resp.: (a) \$ 4.986,33, (b) $i_{\text{aef}} = 26,82\%$ aa.

8. Um capital de \$ 10.000,00 foi aplicado por 10 anos rendendo juros de 12% aa nos primeiros 5 anos e de 18% aa nos anos subseqüentes. Determinar o valor do montante nas seguintes condições: (a) os juros são capitalizados até o final, e (b) os juros correspondentes aos primeiros 5 anos são pagos ao final desse tempo. (a) $M = \$ 40.318,10$, (b) $M = \$ 22.877,58$.

9. Um título de valor nominal \$ 10.000,00 foi descontado à uma taxa efetiva de 12% aa e gerou um desconto de \$ 1.563,30. Determinar o prazo desse título. Resp.: $n = 1,5$ a.

Valor presente de um fluxo de caixa

O conceito de valor presente de um fluxo de caixa é exatamente o mesmo que você aprendeu em regime de juros simples: valor presente (PV_{FC}) de um fluxo de caixa é a soma dos valores descontados de cada um dos seus componentes para a data zero

(ou atual), para uma dada taxa de juros. Um exemplo ilustra o conceito.

Exemplo 3.5: uma pessoa vendeu um carro nas seguintes condições: 01 parcela de \$ 10.000,00 vencível em 30 dias, uma segunda parcela de \$ 10.000,00 vencível em 60 dias e uma última parcela de \$ 15.000,00 vencível em 90 dias, representadas por três notas promissórias. Se esta pessoa negociar essas notas promissórias para transformá-las em dinheiro, na mesma data da venda do carro, quanto deverá receber pelas mesmas? (em outras palavras, qual o valor à vista do carro, equivalente às três parcelas?).

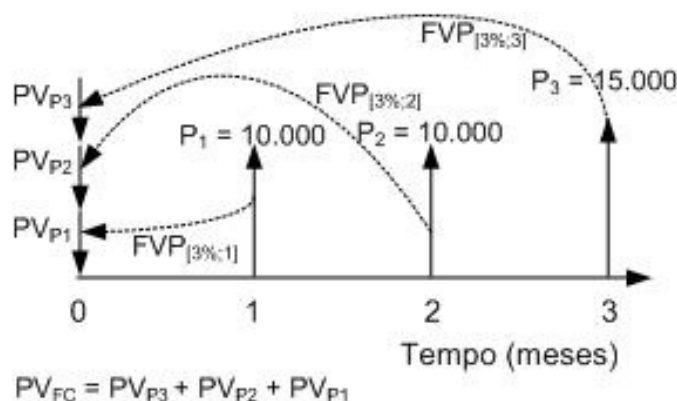


Figura 19: Valor presente de um fluxo de caixa.

Fonte: elaborada pelo autor.

O problema pode ser visualizado na figura 19, que mostra os valores das parcelas e o seu desconto para a data da operação de compra (data focal zero).

Para responder a esta questão, deveremos descontar cada parcela para a data presente (ou data focal atual) com a utilização do Fator de Valor Presente ($FVP_{[i\%;n]}$) para uma determinada taxa de juros (a vigente no mercado, por exemplo).

Tomemos $i = 3\%$ am como a taxa efetiva vigente no mercado. O valor presente ou valor descontado de cada uma das parcelas será:

$$PV_{P1} = P_1 \cdot FVP_{[3\%;1]} = 10.000 \cdot 0,97087 = \$ 9.708,70$$

$$PV_{P2} = P_2 \cdot FVP_{[3\%;2]} = 10.000 \cdot 0,94260 = \$ 9.426,00$$

$$PV_{P3} = P_3 \cdot FVP_{[3\%;3]} = 15.000 \cdot 0,91514 = \$ 13.727,10$$

$$PV_{FC} = PV_{R1} + PV_{R2} + PV_{R3} =$$

$$PV_{FC} = 9.708,70 + 9.426,00 + 13.727,10 = \$ 32.861,80$$

Nesse exemplo, para um valor nominal de \$ 35.000,00 chegou-se a um valor presente de \$ 32.861,80 com base numa taxa de juros efetiva de 3% am. Se você retomar a definição de valor presente de um fluxo de caixa,

Valor presente de um fluxo de caixa é a soma algébrica dos valores presentes ou atuais de cada uma das parcelas do fluxo de caixa, para uma dada taxa de juros (Mathias, W.F. & Gomes, J.M., 2.004).

e se valer da figura 20, poderá deduzir a expressão geral para o valor presente do fluxo de caixa (PV_{FC}), como se vê a seguir:

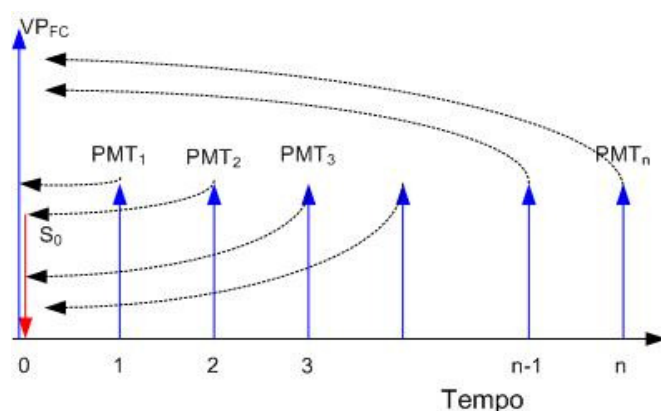


Figura 20: Valor presente de fluxo de caixa.

Fonte: elaborada pelo autor.

$$VP_{FC} = \frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT_n}{(1+i)^n} - S_0 = \sum_{k=1}^n \frac{PMT_k}{(1+i)^k} - S_0$$

Em palavras: valor presente do fluxo de caixa é a "soma dos valores presentes das entradas de caixa futuras menos a saída de caixa inicial (quando houver)".

Dada a fórmula utilizada para descontos em juros compostos, conclui-se: quanto maior for a taxa de juros, tanto menor será o valor presente do fluxo de caixa e, conseqüentemente, maior o "desconto" exigido na operação.

Taxa interna de retorno de um fluxo de caixa

O conceito de taxa interna de retorno também é muito importante em análise de investimentos, e por isso precisa ser bem entendido. A taxa interna de retorno (TIR ou IRR) é definida como sendo a taxa de juros que torna nulo o valor presente de um fluxo de caixa. Reportando-nos à figura 20, essa definição nos leva a seguinte expressão algébrica:

$$\sum_{k=1}^n \frac{PMT_k}{(1+i)^k} - S_0 = 0 \text{ ou } VP_{FC} = 0$$

Colocando essa expressão em fórmulas de juros compostos, tem-se:

$$\frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n} - S_0 = 0$$

A taxa interna de retorno é a raiz dessa equação e seu cálculo é, usualmente, feito com o auxílio de calculadoras financeiras ou planilhas eletrônicas; na ausência destas, pode-se utilizar o método de tentativa e erro que consiste em experimentar diversas taxas de juros até que se identifique aquela que produza a condição de igualdade mencionada.

O uso da taxa interna de retorno é dificultado quando o fluxo de caixa apresenta mais de uma mudança de sinal (fluxos de caixa não convencionais) porque nesses casos pode não haver solução para a equação ou mesmo pode haver várias soluções.

Exemplo 3.6: calcule a taxa interna de retorno para o seguinte fluxo de caixa: $S_0 = 1.000,00$; $PMT_1 = 400,00$; $PMT_2 = 400,00$; $PMT_3 = 400,00$. Períodos em meses.

Sumário de dados: $S_0 = 1.000,00$; $PMT_1 = 400,00$; $PMT_2 = 400,00$; $PMT_3 = 400,00$, IRR=?

Solução: aplicar a definição de TIR,

$$\frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \frac{PMT_3}{(1+i)^3} = S_0$$

substituindo os valores dados no enunciado vem,

$$\frac{400}{(1+i)} + \frac{400}{(1+i)^2} + \frac{400}{(1+i)^3} = 1.000$$

A solução dessa equação nos dá como resposta 9,70% an que é a TIR (IRR) desse fluxo de caixa.

A solução com o uso da HP 12C:

f	CLx		limpa as memórias superiores
f	X<>Y		limpa as memórias financeiras
g	end		adota o modo fim (é default)
1.000	CHS	PV	entra c/ valor S_0 c/ sinal (-) visor = -1.000
400	g	PMT	entra c/ valor dos pagamentos
3	g	n	entra c/ número de pagamentos
?	i		procura a resposta; visor = 9,70%

Abaixo, você pode ver o teclado de uma calculadora HP 12C.



Figura 21: Teclado da calculadora HP-12C

A tecla “g” é uma tecla de função que aciona as funções escritas em azul no teclado: 12x, 12/, CF₀, CF_j, N_j, DATE, BEG,END e outras. Do mesmo modo a tecla “f” aciona as funções em amarelo no teclado. A tecla CHS troca o sinal do número. A conjugação das teclas f e X<>Y limpa as memórias financeiras da calculadora, a conjugação das teclas g e CLx limpa as memórias numéricas superiores e a tecla CLx isoladamente limpa o que está no visor. Com estas informações básicas você pode treinar a operação desta calculadora.

Saiba mais...

O manual da calculadora HP12C está disponível em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/ManualHP12C.pdf.

Equivalência de fluxos de caixa

Reporte-se a definição de equivalência em regime de juros simples; a definição é idêntica: diz-se que dois fluxos de caixa são

equivalentes para uma dada taxa de juros, quando os seus valores presentes (atuais), calculados para aquela taxa de juros, forem iguais.

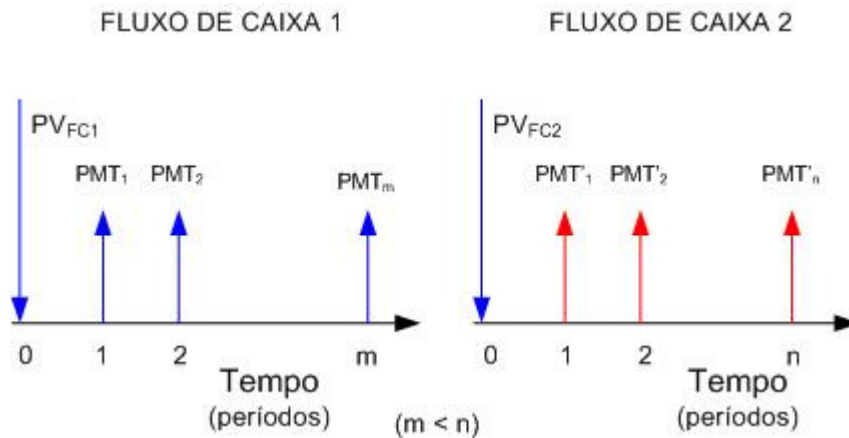


Figura 22: Equivalência de fluxos de caixa

Fonte: elaborada pelo autor.

Considerem-se os dois fluxos de caixa genéricos ($PMT_1, PMT_2, \dots, PMT_n, \dots, PMT_m$ e $PMT'_1, PMT'_2, \dots, PMT'_n$; ($n < m$) representados na figura 22. Esses dois fluxos de caixa serão equivalentes quando os seus valores presentes forem iguais, isto é:

$$PV_{FC_1} = PV_{FC_2}$$

$$\frac{PMT_1}{(1+i)} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT_m}{(1+i)^m} = \frac{PMT'_1}{(1+i)} + \frac{PMT'_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT'_n}{(1+i)^n}$$

Em regime de juros compostos a equivalência de dois fluxos de caixa pode também ser verificada por seus valores em qualquer data focal k , $1 \leq k \leq n$.

Por exemplo, a equivalência dos dois fluxos de caixa anteriores foi verificada na data focal “0” mas, poderia ser verificada também na data focal 2 (ou em qualquer outra data focal). E como se faz isto? simplesmente transformando todos os seus elementos para seus respectivos equivalentes financeiros na data focal 2 (ou na

data focal escolhida), determinando os valores dos dois fluxos de caixa nessa data e comparando-os. Denominemos de:

$V_{FC_1}^2$ valor do fluxo de caixa 1 na data focal 2 e

$V_{FC_2}^2$ valor do fluxo de caixa 2 na data focal 2.

Esses valores serão respectivamente:

$$V_{FC_1}^2 = PMT_1 * (1+i) + PMT_2 + \frac{PMT_3}{(1+i)^{3-2}} + \dots + \frac{PMT_m}{(1+i)^{m-2}}$$

$$V_{FC_2}^2 = PMT_1' * (1+i) + PMT_2' + \frac{PMT_3'}{(1+i)^{3-2}} + \dots + \frac{PMT_n'}{(1+i)^{n-2}}$$

Observe que o primeiro termo foi capitalizado para a data 2, o segundo por estar na data focal 2 permanece invariante e os demais termos são descontados para a data focal 2.

Exemplo 3.7: considere o fluxo de caixa abaixo e determine seu valor atual considerando a taxa de juros efetiva de 3% am.

Período	Fluxo de caixa (\$)
1	412
2	318,28
3	327,81

Solução: a partir da definição de valor atual de fluxo de caixa, escreve-se:

$$PV_{FC} = PV_{PMT1} + PV_{PMT2} + PV_{PMT3}$$

$$PV_{FC} = PMT_1 * FVP_{[3\%;1]} + PMT_2 * FVP_{[3\%;2]} + PMT_3 * FVP_{[3\%;3]}$$

Os valores $FVP_{[\%,n]}$ podem ser tirados de tabelas financeiras ou determinados em calculadoras. Procedendo-se as substituições, vem:

$$PV_{FC} = 412,00 * 0,97087 + 318,28 * 0,94260 + 327,81 * 0,91514$$

$$PV_{FC} = \$ 1.000,00$$

Exemplo 3.8: considere o fluxo de caixa abaixo e determine o seu valor atual considerando uma taxa de juros efetiva de 3% am.

Período	Fluxo de caixa (\$)
1	309
2	318,28
3	437,09

Solução: a partir da definição de valor atual de fluxo de caixa, escreve-se:

$$PV_{FC} = PV_{PMT1} + PV_{PMT2} + PV_{PMT3}$$

$$PV_{FC} = PMT_1 * FVP_{[3\%;1]} + PMT_2 * FVP_{[3\%;2]} + PMT_3 * FVP_{[3\%;3]}$$

Os valores $FVP_{[i\%;n]}$ podem ser tirados de tabelas financeiras ou determinados em calculadoras. Procedendo-se as substituições, vem:

$$PV_{FC} = 309,00 * 0,97087 + 318,28 * 0,94260 + 437,09 * 0,91514$$

$$PV_{FC} = \$ 1.000,00$$

Conclusão: Os exemplos anteriores mostram fluxos de caixa com entradas de dinheiro diferentes no tempo, mas com o mesmo valor atual; ou seja, esses dois fluxos são equivalentes para a taxa de juros efetiva de 3% am. Experimente comparar os valores desses fluxos de caixa na data focal 60 dias.

Atividades de aprendizagem

10. Uma pessoa toma um empréstimo de \$ 10.000,00, com prazo de um ano, à uma taxa de juros de 12% aa, com capitalização mensal, assinando um título de dívida. Decorridos três meses o devedor resolve quitar o empréstimo, por um único pagamento. Considerando que a taxa corrente de juros é de 3% at, determinar: (a) o valor do pagamento, e (b) que taxa efetiva anual foi efetivamente auferida pelo credor. (Dica: 12% aa é uma taxa nominal.) Resp.: (a) \$ 10.312,04, (b) $i_a = 13,07\%$ aa.

11. Uma pessoa toma um empréstimo no valor de \$ 8.000,00 à uma taxa de juros de 12% aa, com capitalização mensal, por 5 anos. Qual o estado da dívida ao final do contrato, se no final do 3º ano foi antecipado o pagamento de \$ 3.000,00 por conta da dívida? Resp.: \$ 10.724,36.

12. Um capital de \$ 10.000,00 é aplicado a 5% aa numa determinada data; um ano após outro capital é aplicado a 8% aa. Depois de 4 anos da primeira aplicação os montantes gerados pelas duas aplicações foram idênticos. Determinar o valor do segundo capital. Resp.: \$ 9.649,07.

13. Quanto devo depositar hoje em uma conta de poupança remunerada a uma taxa de 6% aa para que possa retirar \$ 1.000,00 em 4 meses e \$ 2.000,00 em 8 meses, deixando um saldo final de \$ 500,00? Resp.: $C = \$ 3.382,45$.

14. Uma pessoa tem os seguintes compromissos financeiros a pagar: \$ 1.000,00 vencível daqui a 4 meses, \$ 2.000,00 daqui a 8 meses e \$ 1.500,00 daqui a 18 meses. Essa pessoa quer reprogramar esses compromissos para dois (2) pagamentos iguais daqui a 6 e 12 meses. Determinar o valor desses pagamentos admitindo que a taxa de juros do mercado é de 3% am. Resp.: $R = \$ 2.175,87$.

15. Comprou-se um terreno cujo valor à vista é \$ 100.000,00. Como entrada foram dados dois títulos: o primeiro de valor nominal \$ 20.000,00 vencível em 6 meses, e o segundo de valor nominal \$ 10.000,00 vencível em 12 meses, o restante devendo ser pago ao final de 2 anos. Determinar o valor a ser pago ao final, admitindo o custo do dinheiro em 2% am. Resp.: $M = \$ 119.596,49$.

16. Quer-se substituir dois títulos, um com valor nominal de \$ 10.000,00 vencível em 2 anos e outro de valor nominal \$ 5.000,00 vencível em 5 anos, por um único título vencível em três anos. Determinar o valor nominal desse título para uma taxa de juros de 8% aa. Resp.: $R = \$ 15.086,69$.

Resumo

Esta unidade levou-o a estudar o regime de juros compostos ou de capitalização composta. Em primeiro lugar você estudou a modelagem do regime e deduziu suas fórmulas básicas. A seguir você entrou em contato com os conceitos de taxas de juros nominais e efetivas; neste regime de juros essas taxas não são equivalentes como no regime de juros simples e se trabalha sempre com a taxa efetiva nas fórmulas. Após esses conceitos básicos você se debruçou no estudo do desconto racional composto e, por fim, estudou a equivalência de fluxos de caixa. Neste último tópico, você estudou primeiramente o conceito geral de equivalência para depois aplicar a esse conceito ao desconto racional. Estudou também os conceitos de valor presente líquido e taxa interna de retorno, que são muito importantes no campo dos estudos econômicos.

Você chegou ao final de mais uma unidade! Pergunte-se se entendeu perfeitamente todos os pontos abordados. Em caso de

alguma dúvida, retorne ao texto até que você tenha a certeza de dominar completamente as idéias e conceitos desenvolvidos. Se a resposta for positiva você está mais uma vez de parabéns! Como resultado do seu esforço você conheceu o regime de capitalização composta, o mecanismo de desconto racional, o conceito de valor presente de um fluxo de caixa e o de equivalência de fluxos de caixa neste regime de juros e o conceito de taxa interna de retorno e de valor presente líquido. Portanto, você está apto a iniciar os estudos da quarta unidade deste livro.

Unidade 4

Rendas ou anuidades

Objetivos

Esta unidade lhe apresentará os modelos conceituais de anuidades ou rendas que são as bases para os principais modelos de financiamentos de dívidas existentes no mercado. Você também entrará em contato com as relações existentes entre os diversos elementos que compõem uma renda: número de pagamentos, valor dos pagamentos, taxa de juros e as equivalências financeiras que permitem determinar o valor presente e o valor futuro equivalente da renda. Como resultado do seu trabalho, esperamos que você possa:

- compreender o significado do termo “rendas” e conhecer os seus modelos básicos;
- aprender a calcular os valores presentes e futuros equivalentes de uma renda; e
- desvendar as armadilhas das taxas de juros existentes no mercado.

Para facilitar, você deverá dominar com segurança os seguintes assuntos:

- álgebra elementar;
- representação gráfica de funções; e
- conceitos vistos nas unidades 1,2 e 3, em especial, os de taxas de juros efetiva e nominal e de equivalência de capitais.

Uma boa referência para o aprendizado da matemática é o site <http://www.somatematica.com.br>. Vá até ele, cadastre-se e desfrute do conteúdo que é de excelente qualidade.

Rendas ou anuidades

Você já deve ter-se visto frente a um ou aos dois fatos seguintes:

- você financiou a compra de um bem em 24 prestações mensais iguais; e/ou
- resolveu fazer doze (12) depósitos mensais iguais numa caderneta de poupança para com o resultado comprar algum produto.

Nesses dois casos, tem-se uma sucessão de pagamentos (ou recebimentos) à qual se dá genericamente o nome de renda*. No primeiro fato você se valeu do conjunto de pagamentos da para amortizar uma dívida e no segundo, para acumular uma poupança. Acumular uma poupança significa efetuar vários pagamentos ou depósitos sucessivos numa conta para utilização futura do resultado; esse resultado é o montante equivalente da renda (FV). Já o pagamento de uma dívida significa que o gasto ou dispêndio inicial foi substituído por um conjunto de pagamentos futuros que lhe é equivalente; assim, o valor presente da renda (PV) equivale ao conjunto de prestações futuras que serão pagas. A figura 23 ilustra uma anuidade ou renda genérica; você deve perceber que os valores PV e FV não são parte da renda e apenas representam o valor equivalente da renda naqueles pontos.

GLOSSÁRIO

**Renda ou anuidade é um conjunto, finito ou infinito, de pagamentos (recebimentos), PMT_1 , PMT_2 , ..., PMT_j , ..., cujos elementos denominados termos da renda devem ocorrer em datas preestabelecidas, 1, 2, 3, ..., j, n ($n \geq j$).*

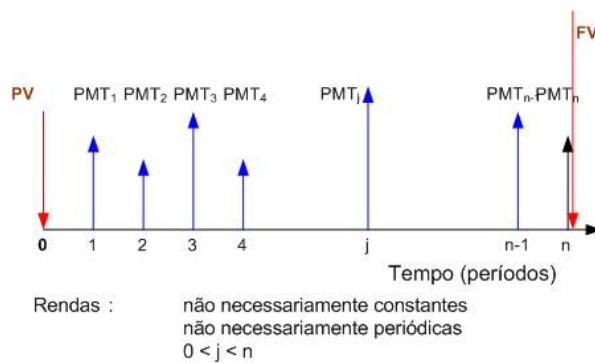


Figura 23: Renda (anuidade) – modelo geral.

Fonte: elaborada pelo autor.

Uma renda é caracterizada por alguns parâmetros principais evidenciados a seguir:

- número de termos da renda: número de pagamentos (recebimentos) da renda;
- valores dos termos da renda: valor de cada termo da renda; e,
- vencimentos da renda: data do pagamento (recebimento) de cada termo da renda.

A definição é bastante genérica e nada diz sobre a periodicidade dos pagamentos e sobre os seus valores. Ao longo desta unidade as diversas situações particulares lhe serão apresentadas.

Classificação das rendas

As anuidades ou rendas podem ser classificadas segundo vários critérios ou pontos de vista, a saber: duração da renda, variação dos elementos da renda, valor dos termos da renda, periodicidade dos pagamentos, vencimento dos termos e início dos pagamentos.

Quanto à duração da rendas ou anuidades

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- rendas temporárias: quando o número dos termos que compõe a renda é finito. Exemplo: o conjunto de 12 prestações iguais de uma compra feita a prazo; e,
- rendas perpétuas: quando o número dos termos que compõem a renda é infinito.

Exemplo: uma pessoa muito rica deixa como herança ao seu filho o rendimento mensal perpétuo de um capital aplicado em uma instituição financeira (IF).

Quanto à variação dos seus elementos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- rendas certas: quando todos os seus elementos - número de termos, vencimentos dos termos e valores dos termos - estão previamente fixados; e,
- rendas aleatórias: quando pelo menos um dos seus elementos não está determinado.

Exemplo de anuidade aleatória é o conjunto de pagamentos dos prêmios de um seguro de vida; o número de pagamentos (número de termos da renda) não é conhecido por não se saber antecipadamente quanto tempo o segurado irá viver.

Quanto ao valor dos termos da renda

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- rendas constantes: quando os valores dos termos que as compõem são constantes. Exemplo: prestações iguais em uma compra a crédito; e,
- rendas variáveis: quando os valores dos termos que as compõem são variáveis. Exemplo: depósitos crescentes em uma conta de poupança.

Quanto à periodicidade dos pagamentos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- rendas periódicas: quando o intervalo entre dois termos consecutivos é constante (pagamentos mensais, semestrais ou anuais, por exemplo); e,
- rendas não periódicas: quando o intervalo entre dois termos consecutivos é variável.

Quanto ao vencimento dos termos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- rendas postecipadas: quando os pagamentos ocorrem no fim de cada período. Exemplo: compra financiada em três pagamentos mensais, ocorrendo o primeiro pagamento 30 dias após a compra; e,
- rendas antecipadas: quando os pagamentos ocorrem no início de cada período. Exemplo: compra financiada em três pagamentos mensais, ocorrendo o primeiro pagamento no ato da compra.

Quanto ao início dos pagamentos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- rendas imediatas: quando o primeiro pagamento é devido no primeiro período contado da origem da renda; e,
- rendas diferidas: quando o primeiro pagamento só é devido no período subsequente ao período **m**, denominado **período de diferimento**. Quando os pagamentos são devidos ao início de cada período tem-se um modelo de **renda diferida antecipada**;

quando os pagamentos são devidos ao final de cada período tem-se um modelo de **renda diferida postecipada**.

Este livro lhe apresentará somente as **rendas temporárias, certas, constantes e periódicas** dos tipos postecipado e antecipado, tanto as imediatas como as diferidas; isto porque esses tipos de renda podem ser generalizados, gerando fórmulas de aplicação relativamente imediata. As figuras 24, 25 e 26 ilustram os tipos básicos de rendas que serão estudadas.

A figura 24 mostra uma renda certa, constante, imediata e postecipada cujos termos - PMT_j - estão representados por setas com orientação positiva.

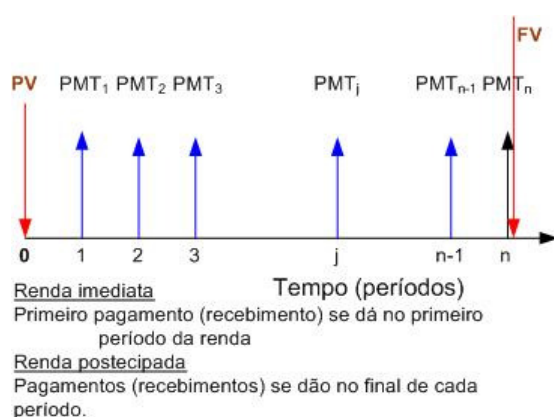
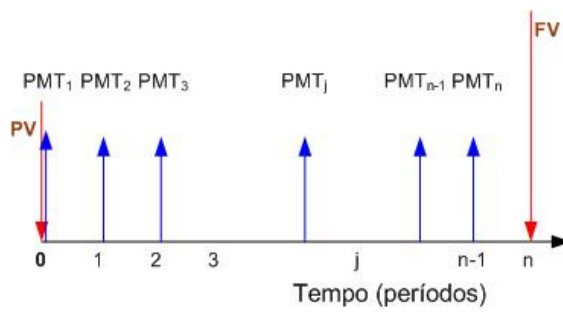


Figura 24: Renda temporária, certa, imediata e postecipada.

Fonte: elaborada pelo autor.

Essa renda é equivalente a um valor presente (PV) ou a um montante (FV) para uma dada taxa de juros i conforme se vê nas figuras 24 a 27. Essa condição de equivalência é comum a todos os tipos de rendas; a partir dela serão estabelecidas as relações básicas entre seus diversos elementos.



Renda imediata

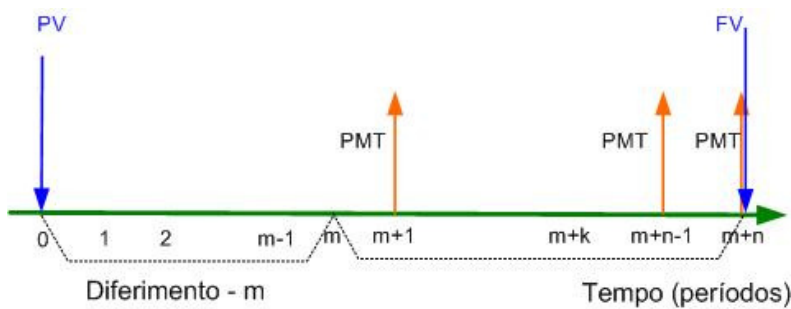
Primeiro pagamento se dá no primeiro período da renda.

Renda antecipada

Pagamentos: no início de cada período.

Figura 25: Renda temporária, certa, imediata e antecipada

Fonte: elaborada pelo autor.



PV - valor presente equivalente da renda;

FV - montante equivalente da renda

Renda diferida: pagamentos se iniciam após o período de diferimento m

Renda postecipada: pagamentos no final de cada período

Figura 26: Renda temporária, certa, diferida e postecipada.

Fonte: elaborada pelo autor.

Observe bem: a figura 27 mostra que a renda é constituída somente pelos seus termos (PMT_k). O conjunto desses termos é equivalente a um capital no início ou a um montante no final da operação. A relação básica de juros compostos continua válida: $FV = PV \cdot (1+i)^n$.

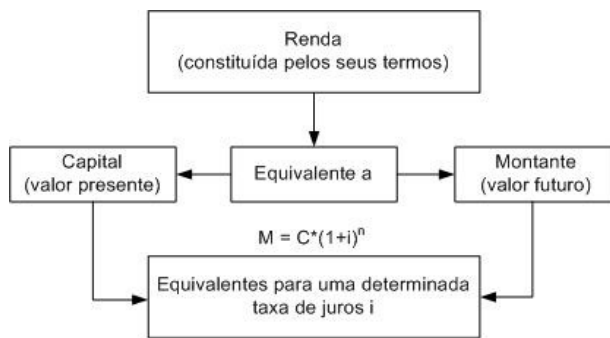


Figura 27: Equivalência em rendas

Fonte: do autor.

Estudo das rendas ou anuidades

Você será levado a focar sua atenção no estudo das rendas certas, temporárias, periódicas e constantes e a identificar as relações existentes entre os seus elementos componentes; esses elementos serão representados a partir de agora pela notação das calculadoras financeiras, a saber:

PMT valor dos termos da renda devido em cada período;

n número de pagamentos da renda;

m período de diferimento da renda;

i taxa de juros efetiva de cada período;

PV valor da renda na data focal 0; e

FV valor da renda na data focal (**n + m**).

Renda temporária, certa, periódica, e postecipada

Este tópico abordará as rendas temporárias, certas, periódicas dos tipos imediato e diferido e procurará identificar as relações entre as suas variáveis relevantes: PMT, n, i, e PV ou FV.

Renda temporária, certa, periódica, postecipada e imediata (modelo básico)

Em renda imediata o primeiro pagamento se dá no primeiro período e, conseqüentemente, o período de diferimento é nulo, isto é $m = 0$.

O número de termos da renda é finito, seus termos são todos iguais em valor, periódicos e devidos ao final dos respectivos períodos. A seguir lhe serão mostradas as relações entre PV/PMT e entre FV/PMT para este tipo de renda

Relação entre valor dos pagamentos (PMT) e valor atual (PV)

Você agora verá para o modelo básico de renda representado na figura 28 a relação existente entre o seu valor presente (PV) e o valor dos seus termos da renda (PMT), de n e de i .

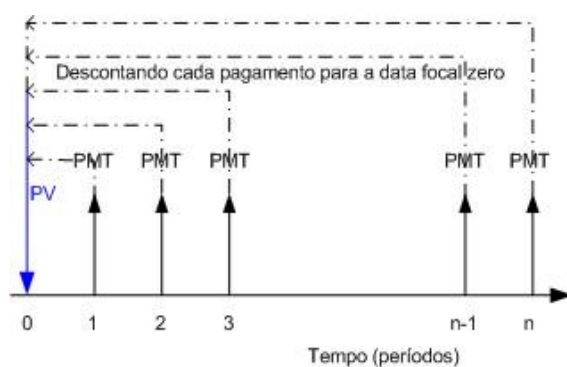


Figura 28: Valor atual de uma renda.

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor presente equivalente dessa renda nada mais é do que a soma dos valores de todos os termos descontados para a data focal 0 por uma dada taxa de juros i , conforme mostra a equação a seguir:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Colocando PMT em evidência e aplicando a **fórmula** da soma de progressões geométricas chega-se a:

$$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \quad (4.1)$$

A demonstração completa da fórmula se encontra em leitura complementar LC51 disponível em: http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC51.doc.

Observe a expressão (4.1) acima: ela mostra a relação entre o valor atual da renda (PV) e o valor de cada termo da renda (PMT) em função de n e de i. O valor entre colchetes depende apenas de n e de i e está tabelado para várias situações. Vamos denominar esta expressão de $a_{[i\%;n]}$ (porque essa expressão deriva da soma dos termos de uma progressão geométrica). Os diversos valores que esse fator assume podem ser vistos em tabelas financeiras. A expressão deduzida acima pode ser reescrita, com a utilização desse fator:

$$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} = PMT * a_{[i\%;n]} \quad (4.2)$$

Por vezes conhece-se o valor presente devendo-se calcular o valor do pagamento (PMT). A fórmula acima pode ser escrita de maneira diferente:

$$PMT = PV * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = PV * \frac{1}{a_{[i\%;n]}} = PV * a_{[i\%;n]}^{-1} \quad (4.3)$$

Esse novo fator $a_{[i\%;n]}^{-1}$ é o inverso de $a_{[i\%;n]}$ e também está tabulado em tabelas financeiras.

Saiba mais...

Ver tabelas financeira em:

http://www.proativams.com.br/index.php?modulo=arquivos&id_pasta=5.

Exemplo 4.1: uma pessoa comprou uma mercadoria cujo valor a vista é \$ 1.350,00. A loja permite o pagamento em quatro prestações, mensais, iguais e sucessivas com o primeiro pagamento se dando depois de decorridos trinta dias da compra. Qual o valor das prestações mensais devidas se a loja operar com taxa de juros de 5% am.

Sumário de dados: PV = 1.350,00, i = 5% am. ou 0,05 am., n = 4

Solução: trata-se de uma renda imediata, certa, periódica, constante e postecipada sendo aplicáveis as fórmulas vistas anteriormente.

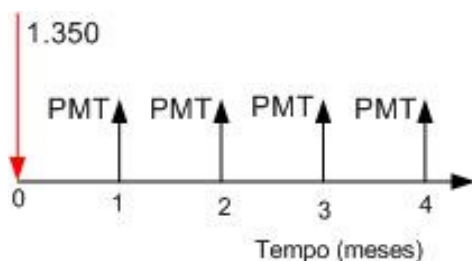


Figura 29: Compra a prestação.

Fonte: elaborada pelo autor.

dispor os dados graficamente conforme a figura 29:

b) aplicar as fórmulas de interesse:

$$PMT = PV * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT = 1.350 * \frac{0,05 * (1+0,05)^4}{(1+0,05)^4 - 1}$$

$$\text{PMT} = 1.350 * \frac{0,060775}{0,215506} =$$

$$\text{PMT} = 1.350 * 0,282011 = 380,71$$

O número 0,282011 pode ser tirado em tabelas financeiras para $i = 5\%$ e na linha que corresponde ao $n = 5$:

$$a_{[5\%;4]}^{-1} = 0,282011$$

Utilizando-se a calculadora financeira HP-12C os passos seriam os seguintes:

f	X<>Y		limpa as memórias financeiras
f	CLx		limpa as memórias superiores
g	end		adota o modo fim (default)
1.350	CHS	PV	entra PV c/ sinal (-); visor = -1.350
4	n		entra c/ número de pagamentos
5	i		entra c/ a taxa de juros
?	PMT		procura a resposta; visor = 380,71

Atividades de aprendizagem

1. Determine o valor presente para a renda postecipada constituída por 10 (dez) prestações mensais de \$ 10.000,00 e taxa de juros de 5% am. R: 77.217,35.
2. Determine o valor presente para a renda postecipada constituída de 5 (cinco) prestações anuais de \$ 50.000,00 e taxa de juros de 12% aa. R: 180.238,81.

3. Determine o valor presente para a renda postecipada constituída por (c) 8 (oito) prestações semestrais de \$ 30.000,00 e taxa de juros de 6% as. R: 186.293,81.

Relação entre valor dos pagamentos (PMT) e montante (FV)

De maneira análoga ao item anterior, você poderá conhecer, para este modelo básico de renda, a relação que existe entre o valor dos termos da renda (PMT) e o respectivo montante (FV) para um dado par de valores $[i\%;n]$.

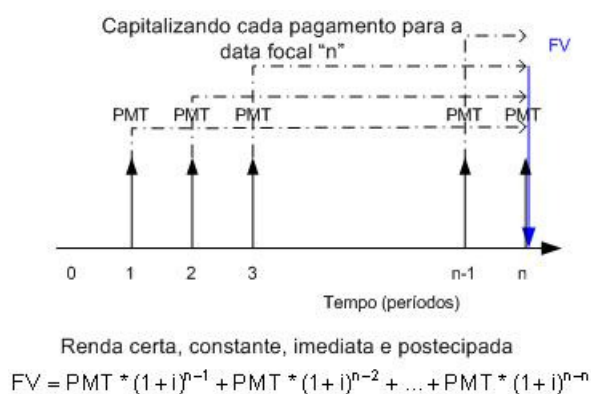


Figura 30: Relação entre renda em montante

Fonte: elaborada pelo autor.

O montante ou valor futuro (FV) de um fluxo de caixa nada mais é do que a soma dos valores futuros de cada um dos pagamentos da anuidade, ou seja, a soma dos valores de todos os pagamentos capitalizados para a data focal n para uma dada taxa de juros i. A figura 30 ilustra a capitalização dos termos para a data "n".

O montante (FV) da renda é dado pela soma dos valores futuros ou capitalizados de cada pagamento, ou seja, pela soma dos valores FV_{PMTk} ($1 \leq k \leq n$):

$$FV = FV_{PMT_1} + FV_{PMT_2} + \dots + FV_{PMT_n} =$$

$$FV = PMT * (1+i)^{n-1} + \dots + PMT * (1+i)^1 + PMT$$

fatorando o valor dos pagamentos e aplicando-se a fórmula da soma de uma progressão geométrica, chega-se a:

$$FV = PMT * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (4.4)$$

A demonstração completa da fórmula pode ser vista em LC 52 disponível em http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC51.doc.

A expressão entre colchetes, na fórmula acima, depende apenas do par $[i\%;n]$ e se encontra tabelada para vários pares de interesse. Como no caso anterior, a nomenclatura desse termo varia de autor para autor sendo adotada para este livro a notação $S_{[i\%;n]}$ (por derivar também da soma de termos de uma progressão geométrica).

A fórmula (4.4) pode também ser escrita da seguinte forma:

$$FV = PMT * S_{[i\%;n]} \quad (4.5)$$

E a expressão de PMT em função de FV se escreve:

$$PMT = FV * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] = FV * S_{[i\%;n]}^{-1} \quad (4.6)$$

O fator $S_{[i\%;n]}^{-1}$ é exatamente o inverso do fator $S_{[i\%;n]}$ e seus valores para diversos pares $[i\%;n]$ também se encontram tabulados nas tabelas financeiras.

Saiba mais....

Veja videoaulas a respeito da relação entre PMT e FV em:

http://www.youtube.com/watch?v=4_4X41smlO4A.

<http://www.youtube.com/watch?v=z3Jt3w4euW8>.

Exemplo 4.2: uma pessoa deseja constituir uma poupança futura para adquirir uma mercadoria cujo valor é \$ 5.000,00. Para tanto ele resolve efetuar quatro depósitos mensais iguais e postecipados numa conta remunerada a uma taxa de juros de 5% am. Qual o valor desses depósitos mensais? Admita que o preço da mercadoria permaneça constante.

Sumário de dados: FV = 5.000,00, $i = 5\%$ a.m. ou 0,05 aa., $n = 4$

Solução: trata-se de uma renda imediata, certa, periódica, constante e postecipada sendo aplicáveis as fórmulas vistas anteriormente.

a) dispor os dados graficamente conforme figura (5.9):

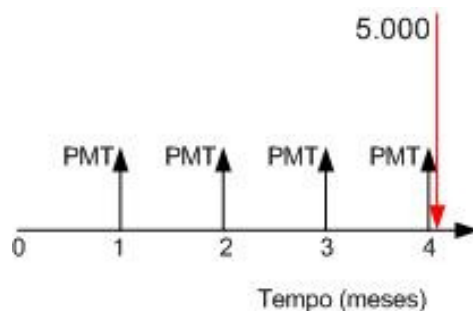


Figura 31: Constituição de uma poupança

Fonte: elaborada pelo autor.

b) aplicar as fórmulas de interesse:

$$PMT = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT = 5.000 \cdot \frac{0,05}{(1+0,05)^4 - 1}$$

$$PMT = 5.000 \cdot \frac{0,05}{0,215506}$$

$$PMT = 5.000 \cdot 0,232012 = 1.160,06$$

O número 0,232012 pode ser extraído de tabelas financeiras para $i = 5\%$ na linha que corresponde ao $n = 5$:

$$S_{[5\%;4]} = 0,232012$$

Utilizando-se a calculadora financeira HP-12C os passos seriam os seguintes:

f	X<>Y		limpa as memórias financeiras
f	CLx		limpa as memórias superiores
5.000	CHS	FV	entra FV c/ sinal (-); visor = -5.000
4	n		entra c/ número de pagamentos
5	i		entra c/ a taxa de juros
?	PMT		procura a resposta; visor = 1.160,06

Em modelos de renda postecipados a calculadora HP deverá ser operada no modo “fim” ou “end” (**g** **end**).

Exemplo 4.3: considere uma renda imediata postecipada constituída por uma série de 4 pagamentos mensais, iguais e sucessivos, no valor de \$ 3.000,00. Determine o capital e o montante equivalentes dessa renda para uma taxa de juros de 3% am

Sumário de dados: PMT = 3.000,00, $n = 4$ meses, $i = 3\%$ am, PV = ? FV = ?

Solução: a) dispor os dados graficamente conforme figura 32:

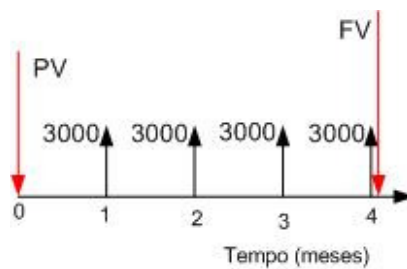


Figura 32: Renda com quatro pagamentos postecipados.

Fonte: elaborada pelo autor.

b) aplicar as fórmulas de interesse:

$$PV = PMT \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n} = PMT \cdot a_{[i\%;n]}$$

$$PV = 3.000 \cdot \frac{(1 + 0,03)^4 - 1}{0,03 \cdot (1 + 0,03)^4} = PV = 3.000 \cdot \frac{1,125509 - 1}{0,03 \cdot 1,125509}$$

$$PV = 3.000 \cdot 3,717103$$

$$PV = \$11.151,31$$

Observe que o valor 3,717103 pode ser extraído diretamente de tabelas financeiras para o par [3%;4], ou seja, $s_{[3\%;4]} = 3,717103$.

Analogamente, se resolve a questão do cálculo do montante (FV):

$$M = PMT \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = PMT \cdot S_{[i\%;n]}$$

$$FV = 3.000 \cdot \left[\frac{(1 + 0,03)^4 - 1}{0,03} \right]$$

$$FV = 3.000 \cdot 4,183627$$

$$FV = \$12.550,88$$

Também aqui o valor 4,183627 pode ser extraído de tabelas financeiras para o par [3%;4], ou seja, $S_{[3\%;4]} = 4,183627$.

Uma possível solução com a calculadora HP 12C é:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
3.000	CHS	entra FV c/ sinal (-); visor = -3.000
4	n	entra c/ número de pagamentos
3	i	entra c/ a taxa de juros
?	PV	procura a resposta; visor = 11.151,29 ou refaz todos os passos e
?	FV	procura a resposta; visor = 12.550,88

Exemplo 4.4: considere a compra de um bem, cujo valor a vista é de \$ 11.151,31. O comprador deseja pagar essa compra em 4 pagamentos mensais, iguais, sucessivos, imediatos e postecipados. Determine o valor desses pagamentos para uma taxa de juros de 3% am.

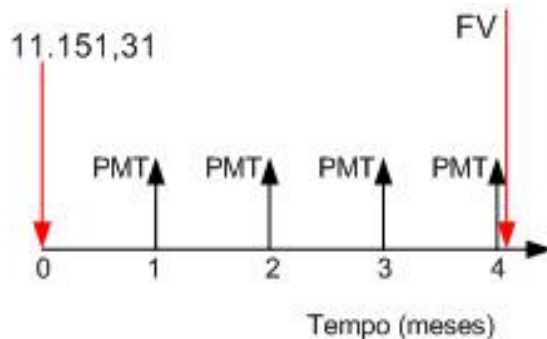


Figura 33: Compra: financiamento em quatro mensalidades postecipadas, iguais.

Fonte: elaborada pelo autor.

Sumário de dados: $i = 3\%$ am, $PV = 11.151,31$, $PMT = ?$, $n = 4$ meses

Solução: a) dispor os dados graficamente conforme figura 33; e.

b) aplicar as fórmulas de interesse

$$PV = PMT * \frac{(1 + i)^n - 1}{i * (1 + i)^n} = PMT * a_{[i\%;n]} \quad \text{que escrita de forma a}$$

evidenciar PMT, resulta em:

$$PMT = PV * \frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} = \frac{PV}{a_{[i\%;n]}}$$

$$PMT = PV * a_{[i\%;n]}^{-1}$$

$$PMT = 1151,31 * \frac{0,03 * (1 + 0,03)^4}{(1 + 0,03)^4 - 1}$$

$$PMT = 11.151,31 * \frac{0,03 * 1,125509}{1,125509 - 1}$$

$$PMT = \frac{11.151,31}{3,717103} = 11.151,31 * 3,717103^{-1} = \$3.000,00$$

Observe que o valor $a_{[3\%;4]} = 3,717103$ poderia ser extraído diretamente de tabelas financeiras para $i = 3\%$ e $n = 4$; idem para o valor $a_{[i\%;n]}^{-1} = 0,26903$.

Utilizando-se a calculadora financeira HP 12C a solução é a seguinte:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
11.151,31	PV	entra PV c/ sinal (-); visor = -11.151,31
4	n	entra c/ número de pagamentos
3	i	entra c/ a taxa de juros
?	PMT	procura a resposta; visor = -3.000,00

Saiba mais...

Veja um vídeo muito interessante em:

<http://br.youtube.com/watch?v=iZqtUSmjEuw>.

Atividades de aprendizagem

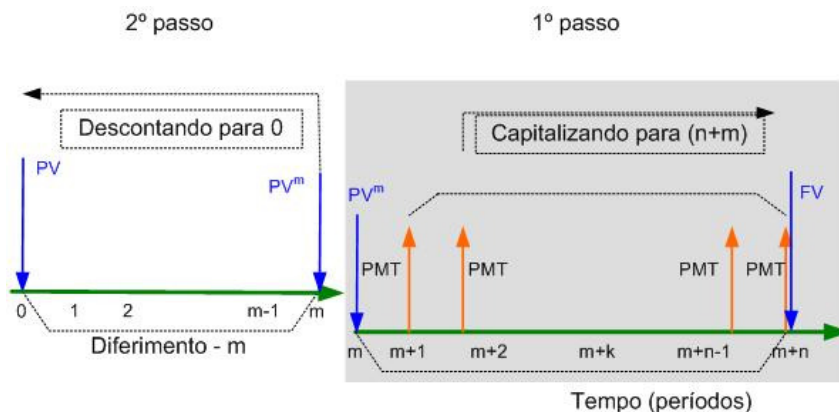
4. Determine o montante (valor futuro) para a renda postecipada constituída por 10 (dez) prestações mensais de \$ 10.000,00 e taxa de juros de 5% am. R: 125.778,90.
5. Determine o montante (valor futuro) para a renda postecipada constituída de 5 (cinco) prestações anuais de \$ 50.000,00 e taxa de juros de 12% aa. R: 317.642,40.
6. Determine o montante (valor futuro) para a renda postecipada constituída por (c) 8 (oito) prestações semestrais de \$ 30.000,00 e taxa de juros de 6% as. R: 296.924,04.

Renda temporária, certa, periódica, postecipada e diferida

Você já aprendeu que em renda diferida o primeiro pagamento é efetuado no primeiro período após o diferimento m e os pagamentos são feitos ao final de cada período porque a renda é também postecipada. A figura 34, a seguir, mostra um caso genérico e permite visualizar as equivalências que serão feitas para resolver o problema.

Relação entre valor dos pagamentos (PMT) e valor atual (PV)

A relação entre o valor dos pagamentos (PMT) e o valor atual (PV) é determinada de modo análogo aos casos anteriores e se



PV - valor presente equivalente da renda; FV - montante equivalente da renda

Postecipada: início dos pagamentos depois do período de diferimento m

Figura 34: Renda postecipada e diferida

Fonte: elaborada pelo autor.

faz a partir da consideração do valor presente dos pagamentos da renda.

O valor presente equivalente da renda é a soma de todos os pagamentos descontados para a data focal 0 para uma dada taxa de juros. Na figura 34 está visualizada essa operação de desconto para o conjunto de pagamentos da renda. Observe que a parte mais escura da figura é uma renda imediata postecipada cujo valor presente em “m” é $PV^{\#}$; portanto, $PV^{\#}$ pode ser calculado coma fórmula (4.1); em seguida, se determina PV descontando-se $PV^{\#}$ para a data focal 0. Tem-se:

$$PV^{\#} = PMT * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

que descontado para a data focal 0 produz,

$$PV = \frac{1}{(1+i)^m} * PMT * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right] \quad (4.7)$$

Você se recorda que:

$$a_{[i\%;n]} = \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \text{ e que } FVP_{[i\%;m]} = \frac{1}{(1+i)^m}$$

Então a expressão (4.7) pode ser escrita como:

$$PV = FVP_{[i\%;m]} * PMT * a_{[i\%;n]} \quad (4.8)$$

*Regra mnemônica: o PV do modelo diferido postecipado = $FVP_{[i\%;m]} * PV$ do modelo imediato postecipado.*

Saiba mais...

A dedução das fórmulas (4.7) e (4.8) pode ser vista em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC51.doc

Relação entre valor dos pagamentos (PMT) e montante (FV)

Observe na figura 34 que entre os pontos 0 e m, não há ocorrência de pagamentos; assim, ainda que intuitivamente é possível perceber que o valor futuro dessa renda é exatamente igual àquele dado pelo modelo imediato postecipado, qual seja.

$$FV = PMT * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (4.9)$$

Observando a expressão e associando-o com o fator financeiro S, pode-se escrever:

$$FV = PMT * S_{[i; n]}$$

Regra mnemônica: o montante de uma renda diferida e postecipada é igual ao montante da renda imediata, mantidos constantes os demais parâmetros da renda.

Exemplo 4.5: considere uma compra financiada em quatro pagamentos mensais, iguais, sucessivos, postecipados e constantes no valor de \$ 3.000,00. Considerando-se um diferimento de 2 meses e uma taxa de juros de 3% am, determine qual o valor a vista da compra efetuada.

Sumário de dados: PMT = 3.000, n = 4 m, m = 2 meses, i = 3% am, PV = ?

Solução: a) dispor os dados graficamente conforme figura 35:

b) aplicar a fórmula de interesse (4.7):

$$PV = \frac{1}{(1+i)^m} * PMT * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

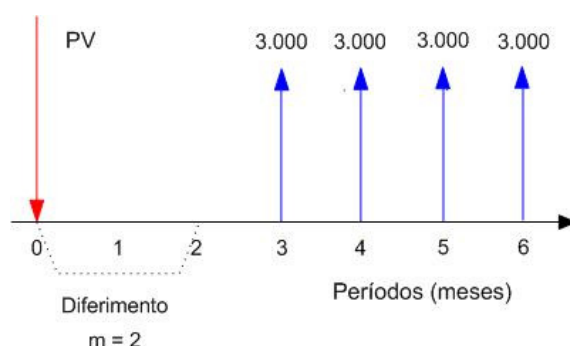


Figura 35: Renda diferida postecipada

Fonte: do autor.

$$PV = \frac{3.000}{(1+0,03)^2} * \left[\frac{(1+0,03)^4 - 1}{0,03 * (1+0,03)^4} \right]$$

$$PV = 10.511,16$$

Observe que o problema também pode ser resolvido pela fórmula (4.8) com a aplicação de fatores financeiros:

$$PV = FVP_{[i\%;m]} * PMT * a_{[i\%;n]}$$

As tabelas financeiras fornecem:

para o par $[i\%;n] = [3\%;4]$ $a_{[3\%;4]} = 3,717098$

e para o par $[i\%;m] = [3\%;2]$ $FVP_{[3\%;2]} = 0,942596$

que substituídos na fórmula anterior, gera:

$$PV = 0,942596 * 3,717098 * 3.000 = \$ 10.511,16$$

Utilizando-se a calculadora financeira HP 12C a solução é a seguinte:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
2	n	entra c/ período de diferimento; visor = 2
3	i	entra c/ taxa de juros; visor = 3
1	FV	entra c/ FV unitário: visor = 1
?	PV	Calcula $FVP_{[3\%;2]}$; visor = -0,942596 (fica armazenado na memória)
f	X<>Y	limpa as memórias financeiras

Esse valor ficará armazenado na memória superior Y e será utilizado quando as operações continuarem. Continuando com a segunda parte da equação:

4	n	entra c/ período de diferimento; visor = 4
3	i	entra c/ taxa de juros; visor = 3
3.000	PMT	entra c/ PV unitário: visor = 3.000
?	PV	calcula PV^m ; visor = -11.151,29
X<>Y		chama valor armazenado na memória; visor = -0,942596
x		Multiplica o valor anterior por PV^m ; visor = 10.511,16 (PV)

Até este momento você teve a oportunidade de entrar em contato com as rendas postecipadas, periódicas, certas, limitadas e dos tipos imediato e diferido. A seguir a tabela 6 faz um resumo das fórmulas principais que são utilizadas para a resolução de problemas envolvendo estes modelos de renda. Esses modelos de rendas têm larga aplicação nos processos de financiamento nos mercados financeiros.

Rendas postecipadas		
Tipo	Cálculo de PV	Cálculo de FV
Imediata	$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$	$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	$PV = PMT * a_{[i\%,n]}$	$FV = PMT * S_{[i\%,n]}$
Diferida	$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} * \frac{1}{(1+i)^m}$	$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	$PV = PMT * a_{[i\%,n]} * FVP_{[i\%,m]}$	$FV = PMT * S_{[i\%,n]}$

Tabela 6: Rendas postecipadas – resumo das fórmulas

Fonte: elaborada pelo autor.

Atividades de aprendizagem

7. Determine o valor presente para a renda postecipada constituída por 10 (dez) prestações mensais de \$ 10.000,00, diferidas em 3 meses e com taxa de juros de 5% am. R: 66.703,25.
8. Determine o valor presente para a renda postecipada constituída 5 (cinco) prestações anuais de \$ 50.000,00, diferidas em 2 meses e com taxa de juros de 12% aa. R: 143.685,28.
9. Determine o valor presente para a renda postecipada constituída por (c) 8 (oito) prestações semestrais de \$ 30.000,00, diferidas em cinco semestres e com taxa de juros de 6% as. R: 139.209,53.

Renda, temporária, certa, periódica e antecipada

Você já viu anteriormente que rendas antecipadas são aquelas nas quais os pagamentos se dão ao início de cada período; exemplos deste tipo de rendas são as compras financiadas em que o primeiro pagamento se dá no ato da compra (entrada) ou uma operação de arrendamento mercantil (leasing) na qual os pagamentos se dão no início de cada período. A representação gráfica de uma renda genérica foi mostrada na figura 25; observe atentamente a posição do primeiro pagamento. Pode-se ter os modelos imediatos e diferidos que serão estudados a seguir.

Renda, temporária, certa, periódica, antecipada e imediata

Relação entre valor dos pagamentos (PMT) e valor atual (PV)

Você pode intuir que a determinação da relação entre valor dos pagamentos e valor atual pode ser análoga à vista em rendas postecipadas, isto é, com o raciocínio de que o valor presente da renda é a soma dos valores de todos os pagamentos devidamente descontados para a data focal 0.

A figura 36 a seguir ilustra os descontos feitos em cada pagamento.

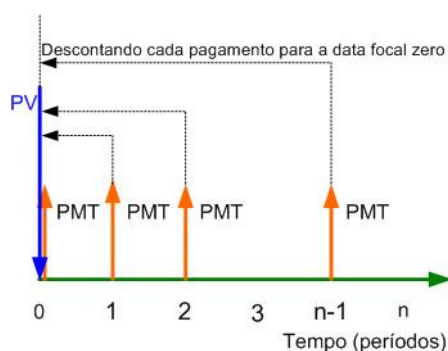


Figura 36: Renda imediata e antecipada - PV.

Fonte: elaborada pelo autor.

Procedendo-se aos descontos dos pagamentos (PMT) e somando-se os valores tem-se:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^0} + \frac{PMT}{(1+i)^1} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}}$$

Observe que o primeiro pagamento não sofre desconto por estar na data focal 0. Tratando-se algebricamente essa expressão, conforme já visto anteriormente, chega-se a:

$$PV = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \quad (4.10)$$

Saiba mais...

A dedução completa da fórmula pode ser vista em LC 55, disponível em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC51.doc.

Lembra-se dos fatores financeiros?

$$a_{[i\%;n]} = \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$$

a expressão 4.7 assume a forma abaixo:

$$PV = (1+i) * PMT * a_{[i\%;n]} \quad (4.11)$$

Se você comparar esta fórmula com aquela deduzida para o modelo postecipado (4.1) vai perceber que elas são muito semelhantes e diferem apenas pelo fator $(1 + i)$. Este fato pode lhe ajudar a criar uma regra mnemônica para facilitar o cálculo do PV do modelo antecipado.

Relação entre valor dos pagamentos (PV) e montante (FV)

De modo análogo se faz a determinação da relação valor dos pagamentos (PMT) e montante (FV): o montante é obtido a partir da soma dos valores de cada um dos pagamentos capitalizados para a data focal n , conforme se vê na figura 37

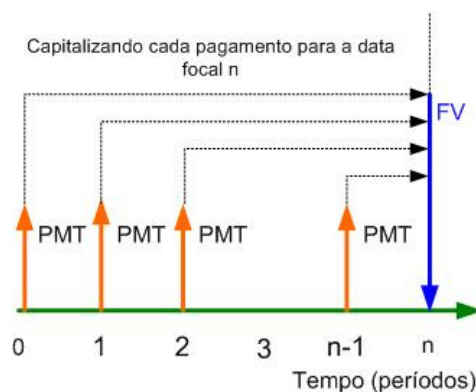


Figura 37: Renda antecipada e imediata – FV

Fonte: elaborada pelo autor.

Essa consideração conduz à expressão:

$$FV = PMT * (1+i)^n + PMT * (1+i)^{n-1} + \dots + PMT * (1+i)^1$$

que trabalhada algebricamente e com a consideração da soma de uma progressão geométrica conduz a:

$$FV = (1 + i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i) * PMT * S[i\%;n] \quad (4.12)$$

Saiba mais...

A dedução completa da fórmula 4.12 pode ser vista em LC56 disponível em: http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC51.doc.

As calculadoras financeiras deverão ser operadas no modo “início” ou “bgn” (“f” e “bgn”) para o cálculo de rendas antecipadas.

Exemplo 4.6: considere uma renda antecipada constituída por uma série de 4 pagamentos mensais, iguais, antecipados e sucessivos, no valor de \$ 3.000,00. Determine o capital e o montante equivalentes dessa renda para uma taxa de juros de 3% am.

Sumário de dados: PMT = 3.000, n = 4 m, i = 3% am, PV = ?, FV = ?

Solução: a) dispor os dados graficamente – faça como exercício.

aplicar as fórmulas de interesse:

$$PV = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$$

$$PV = (1+0,03) * 3.000 * \frac{(1+0,03)^4 - 1}{0,03 * (1+0,03)^4}$$

$$PV = 1,03 * 3.000 * \frac{1,125509 - 1}{0,03 * 1,125509}$$

$$PV = 1,03 * 3.000 * 3,717103 = \$11.485,84$$

Observe que o valor 3,717103, como mostrado anteriormente, pode ser extraído diretamente de tabelas financeiras para $i = 3\%$ e $n = 4$, ou seja, $a_{[3\%;4]} = 3,717103$.

$$PV = (1+i) * PMT * a_{[i;n]} = 1,03 * 3.000 * 3,717103 = \$11.485,84$$

Analogamente, se resolve a questão do cálculo do montante (M):

$$FV = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$FV = (1+0,03) * 3.000 * \frac{(1+0,03)^4 - 1}{0,03} = 12.927,41$$

Também aqui, do mesmo modo já visto em rendas postecipadas, o valor 4,183627 pode ser extraído de tabelas financeiras para o par $[3\%;4]$, ou seja, $S_{[3\%;4]} = 4,183627$.

$$FV = (1+i) * PMT * S_{[i\%;n]}$$

$$FV = (1+0,03) * 3.000 * 4,183627 = 12.927,41$$

Uma possível solução com a calculadora financeira HP 12C é:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
g	beg	coloca no modo "início": visor mostra "begin"
3.000	CHS	entra PMT c/ sinal (-); visor = -3.000
4	n	entra c/ número de pagamentos; visor = 4
3	i	entra c/ a taxa de juros; visor = 3
?	PV	procura a resposta; visor = 11.485,84
?	FV	ou refaz todos os passos e procura a resposta; visor = 12.927,41

Exemplo 4.7: considere a compra de um bem, cujo valor a vista é de \$ 11.151,31. O comprador deseja pagar essa compra em 4 pagamentos mensais, iguais, sucessivos e antecipados. Determine o valor desses pagamentos para uma taxa de juros de 3% am.

Sumário de dados: $PMT = ?$, $n = 4 \text{ m}$, $i = 3\% \text{ am}$, $PV = 11.151,31$

Solução: a) dispor os dados graficamente conforme figura 38;

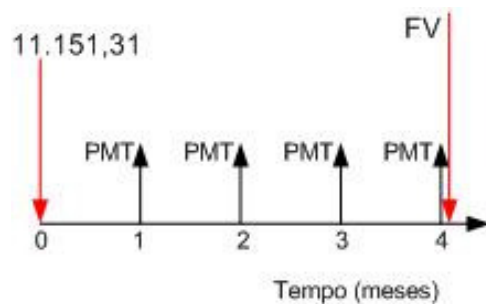


Figura 38: Renda antecipada: PMT.

Fonte: elaborada pelo autor.

b) aplicar a fórmula de interesse (4.9):

$$PMT = \frac{1}{(1+i)} * PV * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

substituindo os valores,

$$PMT = \frac{1}{(1+0,03)} * 11.151,31 * \frac{0,03 * (1+0,03)^4}{(1+0,03)^4 - 1}$$

$$PMT = \frac{1}{1,03} * 11.151,31 * \frac{0,03 * 1,125509}{1,125509 - 1}$$

$$PMT = \frac{1}{1,03} * \frac{11.151,31}{3,717103} = \$2.912,62$$

O cálculo pode ser feito com a utilização de tabelas financeiras e da fórmula (4.9)

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * a_{[i\%;n]}^{-1}$$

Observe que o valor $a_{[i\%;n]}^{-1} = 0,269027$ pode ser extraído diretamente de tabelas financeiras para o par $[3\%;4]$. Então:

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * a_{[i\%;n]}^{-1} = \frac{11.151,31}{1,03} * 0,269027 = 2.912,64$$

Uma possível solução com a calculadora financeira HP 12C é:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
g	beg	coloca no modo "início": visor mostra "begin"
11.151,31	CHS	entra PV c/ sinal (-); visor = -11.151,31
4	n	entra c/ número de pagamentos; visor = 4
3	i	entra c/ a taxa de juros; visor = 3
?	PMT	procura a resposta; visor = 2.912,62

Exemplo 4.8: considere a formação de uma poupança no valor de \$ 12.927,40, através de 4 depósitos mensais, iguais, sucessivos e antecipados. Determine o valor desses pagamentos para uma taxa de juros de 3% am.

Sumário de dados: $PMT = ?$, $n = 4$ m, $i = 3\%$ am, $FV = 12.927,40$

Solução: a) dispor os dados graficamente conforme figura 39;

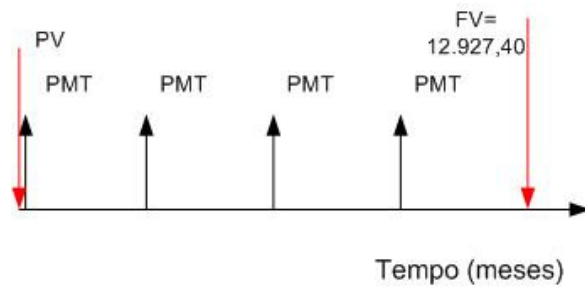


Figura 39: Renda antecipada: PMT.

Fonte: do autor.

b) aplicar a fórmula de interesse (4.11):

$$PMT = \frac{1}{(1+i)} * FV * \frac{i}{(1+i)^n - 1} =$$

$$PMT = \frac{1}{(1+0,03)} * 12.927,40 * \frac{0,03}{(1+0,03)^4 - 1}$$

$$PMT = \frac{1}{1,03} * 12.927,40 * \frac{0,03}{1,125509 - 1}$$

$$PMT = \frac{1}{1,03} * 12.927,40 * 0,239027 = \$2.999,99$$

Ou ainda utilizando os fatores de tabelas financeiras,

$$PMT = \frac{1}{(1+i)} * FV * S_{[i\%;n]}^{-1}$$

O valor $S_{[i\%;n]}^{-1} = 0,239027$ pode ser extraído diretamente de tabelas financeiras para o par $[3\%;4]$; então:

$$PMT = \frac{1}{(1+0,03)} * 12.927,40 * 0,239027 = 2.999,99$$

Uma possível solução com a calculadora financeira HP 12C é:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
g	beg	coloca no modo "início": visor mostra "begin"
12.297,40	FV	entra FV valor futuro da poupança; visor = -12.297,40
4	n	entra c/ número de pagamentos; visor = 4
3	i	entra c/ a taxa de juros; visor = 3
?	PMT	calcula PMT = -2.999,99 (visor)

Atividades de aprendizagem

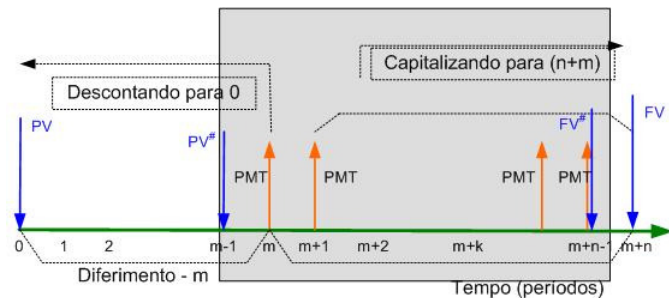
10. Uma pessoa resolve fazer uma poupança para comprar um carro cujo valor à vista é \$ 15.000,00. Sendo a taxa de juros de 6% aa, o prazo da poupança de 24 (vinte e quatro) meses e o modelo de renda antecipado e constante, qual o valor do depósito mensal a ser feito? Considere o preço do carro invariante. R: 586,87.

11. Considere a formação de uma poupança com montante de valor \$ 12.550,88, através de 4 depósitos mensais, iguais, sucessivos e antecipados. Determine o valor desses pagamentos para uma taxa de juros de 3% am. R = 2.912,62.

12. Você comprou uma TV no valor de \$ 1.000,00 a vista; a loja lhe abriu a possibilidade de pagar em quatro pagamentos iguais, mensais, sendo o primeiro no ato da compra. Se a taxa de juros vigente for 2% am, qual será o valor do pagamento? R: 257,47.

Renda temporária, certa, periódica, antecipada e diferida

Convidamos você a refletir sobre a figura 40 mostrada abaixo e que deixa claro que estas rendas podem ser tratadas como rendas diferidas *postecipadas*, mediante alguns ajustes.



PV - valor presente equivalente da renda; FV - montante equivalente da renda

Postecipada: início dos pagamentos depois do período de diferimento m

Figura 40: Rendas diferidas e antecipadas.

Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa figura 40, você vê uma renda antecipada diferida para “m” períodos. Observe que o período “m” se inicia no ponto “m” e vai até “m+1”. A renda é diferida em “m” períodos e os pagamentos se iniciam, portanto, no período “m”; porém, como a renda é antecipada esse pagamento se dá no início do período, ou seja, no ponto temporal “m”. Os valores que se deseja relacionar com PMT são PV e FV.

Observando a parte mais escura da figura 40 você se depara com uma renda postecipada equivalente a $PV^\#$ e a $FV^\#$ que podem ser calculados pelos métodos já vistos para esse modelo. Posteriormente, é só proceder ao desconto de $PV^\#$ para PV por (m-1) períodos e a capitalização de $FV^\#$ para FV por um (1) período para se ter a correspondência desejada. As fórmulas são as seguintes:

$$PV = FVP_{[i\%,m-1]} * PV^\# = FVP_{[i\%,m-1]} * PMT * a_{[i\%,n]} \quad (4.13) \quad e$$

$$FV = FVF_{[i\%;1]} * FV^{\#} = (1+i) * PMT * S_{[i\%;n]} \quad (4.14)$$

Este último tipo de renda foi apresentado a você muito mais com o objetivo de lhe mostrar caminhos alternativos para resolver problemas envolvendo rendas e tem um caráter mais informativo.

A tabela 7 mostra as fórmulas de interesse para os modelos de rendas antecipadas.

Rendas postecipadas		
Tipo	Cálculo de PV	Cálculo de FV
Imediata	$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$	$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	$PV = PMT * a_{[i\%;n]}$	$FV = PMT * S_{[i\%;n]}$
Diferida	$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} * \frac{1}{(1+i)^m}$	$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
	$PV = PMT * a_{[i\%;n]} * FVP_{[i\%;m]}$	$FV = PMT * S_{[i\%;n]}$

Tabela 7: Rendas antecipadas – resumo das fórmula

Fonte: elaborada pelo autor.

A taxa de juros em rendas

Você deve ter observado que as fórmulas deduzidas nesta unidade utilizaram a taxa de juros efetiva da renda (temporalidade da taxa e igual à periodicidade dos pagamentos), expressa em forma unitária. Por vezes, a taxa de juros da renda está expressa para período diferente dos períodos dos pagamentos dos termos da renda; esse fato exige um ajuste nessa taxa de juros para a utilização das fórmulas. Se essa taxa de juros for nominal o ajuste da taxa será feito utilizando-se o critério da proporcionalidade para a mudança de período da taxa; e se a taxa de juros for efetiva o ajuste será feito pelo critério da equivalência. Quando

não houver nenhuma declaração a respeito assume-se que a taxa dada é nominal.

Você pode imaginar uma situação em que a **taxa de juros efetiva** de uma renda seja dada por 9% at (o período da taxa de juros é o trimestre) e que o pagamento da renda seja mensal (o período da renda é o mês). Para aplicar as fórmulas vistas a taxa de juros tem que ser expressa em mês. Como a taxa dada é **efetiva** a conversão se faz por equivalência, ou seja:

$$i_m = 9\% \text{ am ou } i_m = 9/100 = 0,09 \text{ am (forma unitária)}$$

$$(1 + i_m)^3 = (1 + i_t) \quad (1 + i_m)^3 = (1 + 0,09)$$

$$i_m = \sqrt[3]{(1 + 0,09)} - 1 \quad i_m = 0,0291 \text{ am ou } 2,91\% \text{ am}$$

Essa é a taxa de juros efetiva mensal que deverá ser considerada no exemplo para os cálculos pertinentes.

Porém, se a taxa de juros dessa renda de 9% at for nominal (mantidos os pagamentos mensais) deve-se determinar a taxa efetiva mensal da renda pelo critério de proporcionalidade:

$$i_m = i_t/3 \quad i_m = 9/3 = 3\% \text{ am}$$

sendo essa a taxa de juros a ser considerada para os cálculos pertinentes. É este caso que gera as denominadas **rendas fracionárias** que podem ser estudadas com mais detalhes em Mathias, W. F. & Gomes, J. M (2004).

Exemplo 4.9: sendo a taxa de juros nominal 12% aa e o pagamento mensal qual a taxa efetiva dessa renda? Expressões am e aa.

Solução: como a taxa dada é nominal a taxa efetiva é calculada pelo critério da proporcionalidade, ou seja,

$$i_m = i_a/12 = 12/12 = 1\% \text{ am}$$

expressando essa taxa em bases anuais (agora por equivalência):

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12} = (1 + 0,01)^{12} = 1,1268$$

$$i_a = 0,1268 \text{ aa ou } 12,68\% \text{ aa}$$

A taxa efetiva é 1% am ou 12,68% aa.

Exemplo 4.10: sendo a taxa de juros efetiva 12% aa e o pagamento trimestral qual a taxa de juros trimestral efetiva dessa renda?

Solução: como a taxa anual dada é efetiva a taxa trimestral efetiva é calculada pelo critério da equivalência, ou seja,

$$(1+i_a) = (1+i_t)^4$$

$$(1 + 0,12) = (1+i_t)^4 \quad (1+i_t) = 1,12^{1/4} = 1,0287$$

$$i_t = 0,0287 \text{ at ou } 2,87\% \text{ at}$$

Rendas perpétuas

São as rendas cujo número de pagamentos é infinito (ou, em casos práticos, é muito grande). Nesse caso, só há interesse em determinar a relação entre o valor presente da renda e a renda periódica associada.

Para uma renda postecipada imediata, basta determinar matematicamente o valor de PV quando n tende para infinito.

$$PV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$$

fazendo n crescer indefinidamente e valendo-nos da teoria de limites pode-se escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} PV = PMT * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$$

$$PV_{\infty} = PMT * \frac{1}{i} = \frac{PMT}{i} \quad (4.15)$$

Em outras palavras o valor presente de uma renda perpétua é a relação entre o valor do pagamento periódico e a taxa de juros.

Esta relação é muito útil em algumas aplicações práticas importantes a exemplo de avaliação de obrigações e cálculos atuariais.

Exercícios resolvidos para fixação de conceitos

Exercício 4.1: uma loja oferece um eletrodoméstico em 10 prestações mensais de 100 unidades monetárias, sendo a primeira no ato da compra. Se a taxa de juros for de 2% am qual o preço a vista do aparelho?

Sumário de dados: $n = 10$, $PMT = 100$, $i_m = 2\%$ am, $PV = ?$, modelo antecipado

Solução: a) Fórmula a ser utilizada:

$$PV = (1 + i) * PMT * a_{[i\%,n]}$$

b) Aplicação dos dados:

$$PV = (1 + 0,02) * PMT * a_{[2\%;10]} = 1,02 * 1000 * 8,982585 = 916,22$$

Uma possível solução com a calculadora HP 12C é:

f	X<>Y	limpa as memórias financeiras
f	CLx	limpa as memórias superiores
g	beg	coloca no modo "início": visor mostra "begin"
100,00	PMT	entra valor da prestação PMT; visor = 100,00
10	n	entra c/ número de pagamentos; visor = 10
2	i	entra c/ a taxa de juros; visor = 2
?	PV	calcula PV = -916,22 (visor)

Exercício 4.2: você programa a formação de uma poupança com 10 depósitos semestrais no valor de \$ 10.000,00. O banco oferece uma taxa de juros de 20% aa com capitalização trimestral. Qual o montante dessa poupança: a) modelo postecipado imediato e b) modelo antecipado imediato.

Sumário de dados: $n = 10$ (semestrais), $i = 24\%$ aa (capitalização trimestral), $PMT = 10.000$, $FV = ?$

Solução: a taxa de juros dada é nominal e, em primeiro, lugar deve-se determinar a taxa de juros semestral efetiva pelo critério da proporcionalidade (lembre-se que o ano tem 4 semestres):

$$i_a/k = 20/4 = 5\% \text{ at}$$

Porém, os depósitos são semestrais e a taxa de juros deve estar expressa em semestre; agora vai-se converter uma taxa efetiva trimestral em outra taxa efetiva semestral e o critério é o da equivalência:

$$(1 + i_t)^2 = (1 + i_s)$$

$$(1 + 0,05)^2 = (1 + i_s)$$

$$1,1025 = (1 + i_s)$$

$$i_s = 0,1025 \text{ ou } 10,25\% \text{ as}$$

a) Modelo imediato postecipado: fórmula a ser aplicada,

$$FV = PMT * S_{[i\%,n]} = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$FV = 10.000 * \frac{(1+0,1025)^{10} - 1}{0,1025} = \$161.297,33$$

b) Modelo imediato antecipado: fórmula a ser aplicada,

$$FV = (1+i) * PMT * S_{[i\%,n]} = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$FV = 1(1+0,1025) * 10.000 * \frac{(1+0,1025)^{10} - 1}{0,1025} = \$177.830,30$$

Atividades de aprendizagem

13. Um produto é vendido à vista por \$ 3.000,00 ou, alternativamente, em 5 (cinco) prestações de \$ 630,00 vencíveis a 30, 60, 90, 120 e 150 dias. Considerando que o rendimento do capital aplicado no mercado financeiro é de 1% am, determinar:

a) a melhor alternativa de compra para o interessado e b) a decisão seria a mesma se o rendimento do mercado financeiro fosse 2% am? a) à vista b) a prazo. (Dica: menor valor presente).

14. Uma pessoa resolve fazer uma poupança para comprar um carro cujo valor à vista é \$ 15.000,00. Sendo a taxa de juros de 6% aa, o prazo da poupança de 24 (vinte e quatro) meses e o modelo de renda postecipado e constante, qual o valor do depósito mensal a ser feito? Considere o preço do carro invariante. R: 589,81.

15. Uma pessoa resolve fazer uma poupança para comprar um carro cujo valor à vista é \$ 15.000,00. Sendo a taxa de juros de 6% aa, o prazo da poupança de 24 (vinte e quatro) meses e o modelo de renda postecipado e constante, qual o valor do

depósito mensal a ser feito? Considere o preço do carro invariante. R: 589,81.

16. Uma pessoa se comprometeu com 25 (vinte e cinco) pagamentos mensais e sucessivos de \$ 10.000,00, num modelo postecipado. Imediatamente após o pagamento da 15ª prestação, para adequar os pagamentos futuros à sua renda, essa pessoa propõe à outra parte o pagamento da dívida ainda existente em 20 (vinte) pagamentos adicionais, mensais e sucessivos, no mesmo modelo de rendas. Qual o valor dessas prestações considerando uma taxa de juros de 5% am? R: 6.196,15.

17. A empresa ALFA deve ao banco BETA os seguintes montantes: \$ 15.000,00, \$ 25.000,00, \$ 50.000,00 e \$ 10.000,00 que são vencíveis respectivamente a 90, 180, 270 e 360 dias. Qual o valor dos pagamentos se as partes negociaram a transformação desses pagamentos em 10 (dez) pagamentos mensais imediatos, constantes postecipados com taxa de juros de 3% am?. R: 9.378,31.

18. Repita o exercício 17 para 10 (dez) pagamentos mensais, imediatos, constantes antecipados. R. 9.105,15.

19. Repita o exercício 17 para 10 (dez) pagamentos mensais constantes postecipados e diferidos em 3 (três) meses. R: 10.247,93.

Resumo

Nesta unidade você estudou os modelos básicos de rendas (anuidades) e adquiriu a habilidade necessária para trabalhar com outros diferentes modelos de renda, valendo-se dos conhecimentos aqui adquiridos. Na maior parte dos casos, é

possível se reduzir esses outros modelos de rendas a um dos tipos básicos estudados e resolver os problemas de interesse.

No decorrer da unidade, você conheceu o conceito de renda, os seus elementos constitutivos e sua classificação. Para os modelos de rendas certas, periódicas, constantes, limitadas, imediatas ou diferidas você conheceu as relações de interesse entre: PMT, PV e FV observados os valores atribuídos a m (diferimento), n (número de termos) e i (taxa de juros). Também discutiu a questão das taxas de juros em rendas e entrou em contato com o conceito de rendas perpétuas.

A perfeita compreensão desta unidade é essencial porque a unidade seguinte vai tratar de sistemas de amortização que é uma aplicação direta destes modelos.

Você chegou ao final de mais esta unidade! Pergunte-se se entendeu perfeitamente todos os pontos abordados. Em caso de alguma dúvida retorne ao texto. Realizou todas as atividades? Se a resposta for positiva você mais uma vez está de parabéns e apto a iniciar os estudos da quinta unidade do curso, pois já conhece os principais modelos de rendas e as armadilhas das taxas de juros, além de dominar os conceitos vistos nas unidades anteriores.

Unidade 5

Sistemas de amortização

Objetivos

A quinta unidade do curso pretende estudar com você os principais sistemas de amortização de dívidas utilizadas pelo mercado. Neste sentido, vai-se estudar o sistema de prestações constantes (com um caso particular denominado sistema price), o sistema de amortização constante e o sistema americano, além de outros. Assim, esta unidade tem por objetivos auxiliar você a:

- conhecer os modelos básicos de sistemas de amortização de dívidas;
- construir os quadros de amortização de dívidas.

Os conhecimentos prévios exigidos são:

- álgebra elementar;
- representação gráfica de funções;
- conceitos vistos nas unidades 1, 2, 3 e 4, com ênfase para:
- taxas de juros efetiva e nominal;
- modelos de anuidades;
- equivalência de capitais.

Introdução

Você pode perceber intuitivamente que um sistema de amortização nada mais é do que um plano de pagamento de uma dívida contraída. Esses planos de pagamento podem assumir muitas formas, mas são baseados, fundamentalmente, nos modelos de rendas, estudados na unidade anterior.

Exemplos de aplicação de sistemas de amortização: compras a prestação, empréstimos em bancos para pagamento em parcelas periódicas, empréstimos do sistema financeiro da habitação para compra da casa própria e outros.

Nos diversos planos de pagamento possíveis, cada pagamento (PMT) costuma incluir:

- juro do período (J_k) que é calculado sobre o saldo da dívida no início do período; e/ou
- amortização do principal (A_k) que corresponde ao pagamento parcial ou integral do principal da dívida.

Com essas considerações os pagamentos (PMT_k) nesses sistemas de amortização obedecem, de modo geral, a seguinte relação:

$$PMT_k = J_k + A_k$$

Um plano de amortização, cujo primeiro pagamento se dá na origem da dívida, é associado a um modelo de renda imediato e antecipado; nesses casos, o primeiro pagamento se destina totalmente à amortização da dívida porque não há decurso de tempo e, por consequência, não há juro ($PMT_1 = A_1$).

Uma operação financeira envolve necessariamente duas partes - um credor e um devedor - e gera dois fluxos de caixa, um para cada parte envolvida, que são perfeitamente simétricos; então, o conhecimento de um desses fluxos de caixa é o suficiente para esclarecer completamente o problema.

Sem perder de vista que os modelos de sistemas de amortização podem assumir as mais variadas formas, esta unidade será dedicada ao estudo dos modelos mais usuais na vida prática.

Sistema de prestação constante (SPC)

Este sistema é muito utilizado em operações de CDC (crédito direto ao consumidor) e em financiamentos habitacionais. Esse modelo consiste no pagamento da dívida através de prestações ou rendas (PMT), sucessivas, periódicas e *iguais*. O modelo pode ser desenvolvido tanto nas formas postecipada e antecipada.

Modelo postecipado e imediato

Cada prestação ou renda é composta de duas partes:

- juro do período (J), calculado sobre o débito (saldo devedor) do início do período; e
- amortização do principal (A), que corresponde à diferença entre o valor da prestação e o juro do período.

Você pode ver na figura 41 o modelo geral postecipado deste tipo de renda.

Nessa renda o valor presente (PV , SDi_1) corresponde à dívida contraída.

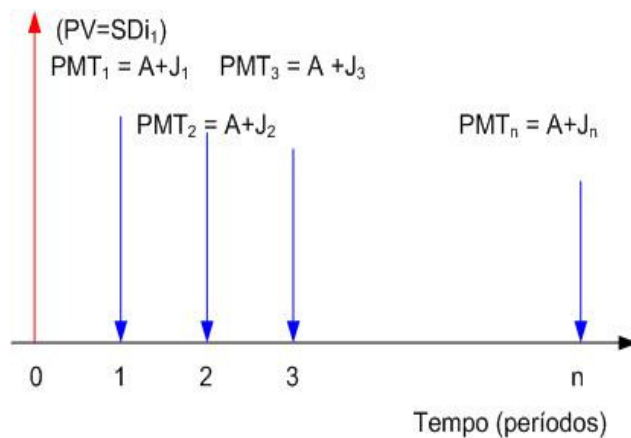


Figura 41: Sistema de prestação constante.

Fonte: elaborada pelo autor.

Cada pagamento periódico ($PMT_k = PMT$) inclui parcelas de juros e de amortização do principal, verificando-se a relação fundamental:

$$PMT_k = A_k + J_k \quad (5.1)$$

onde k indica a ordem do pagamento ou o período em que o pagamento se dá ($1 \leq k \leq n$).

O capital ou principal será denominado PV ou SDi_1 (saldo devedor no início do primeiro período), e o valor dos pagamentos será denominado PMT, adotando a linguagem das calculadoras financeiras, sempre que os pagamentos forem constantes.

Quando você faz um financiamento a sua pergunta básica é: qual o valor dos pagamentos periódicos que devo fazer? Esse problema você resolve com o auxílio das fórmulas deduzidas na unidade 4 para o modelo de rendas postecipado, imediato, constante, periódico e temporário que permite estabelecer as seguintes relações:

$$PV = SDi_1 = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \quad (5.2)$$

$$PMT = PV * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = SDi_1 * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (5.3)$$

Ou recorrendo aos fatores tabulados em tabelas financeiras,

$$PV = SDi_1 = PMT * a_{[i\%;n]} \quad (5.4)$$

$$PMT = PV * a_{[i\%;n]}^{-1} = SDi_1 * a_{[i\%;n]}^{-1} \quad (5.5)$$

Essas fórmulas relacionam o valor da dívida contraída (PV ou SDi_1), o valor dos pagamentos (PMT), a taxa de juros efetiva da operação (i) e o número de pagamentos (n) e respondem à pergunta inicial que você fez. Veja que este problema pode ser colocado de forma inversa, isto é, dada uma sucessão de pagamentos periódicos iguais determinar o estado inicial da dívida.

Uma outra pergunta que você pode fazer: qual será o valor de minha poupança após vários depósitos periódicos de um valor constante? Em outras palavras qual o valor futuro da poupança (ou da dívida) conhecendo-se o número e o valor dos pagamentos, e a taxa de juros efetiva? Mais uma vez, vamos nos valer da fórmula deduzida na unidade 4 que estabelece a relação entre o valor final da dívida (FV), valor dos pagamentos (PMT), taxa de juros (i) e número de pagamentos (n):

$$FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (5.6)$$

Que também podem ser expressas através de fatores financeiros tabulados:

$$FV = PMT * S_{[i\%;n]} \quad (5.7)$$

$$PMT = FV * S_{[i\%;n]}^{-1} \quad (5.8)$$

Saiba mais...

A dedução das fórmulas deste modelo podem ser vista em LC61, disponível em http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC61.doc.

Um aspecto importante do problema, de utilização freqüente, é a determinação dos seguintes valores para a k-ésima prestação ($1 \leq k \leq n$):

- parcela de juros (J_k) nela contida;
- parcela de amortização (A_k) nela contida, e
- saldo devedor que permanece (SDf_k) após o pagamento da parcela.

Essas relações são as seguintes:

$$A_k = PV * i * \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.9)$$

$$J_k = PV * i * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.10)$$

$$SDf_k = PV * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.11)$$

Observações:

- A_k e J_k são os valores da amortização e dos juros contidos na k-ésima parcela,
- SDf_k é o saldo devedor existente imediatamente após o pagamento da k-ésima prestação; em outras

palavras, é o saldo devedor final do período k e inicial do período $k+1$.

Exemplo 5.1: considere um empréstimo de \$ 10.000,00 a ser pago em quatro prestações anuais sucessivas postecipadas, para o qual se convencionou uma taxa de juros efetiva de 10%aa. Qual o valor da prestação anual? Montar um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: $PV = SD_i = 10.000,00$, $n = 4$, $i = 10\%$ aa, $PMT = ?$

Solução: o cálculo da prestação é feito a partir das fórmulas (5.3) ou (5.5):

$$PMT = SD_i \cdot a_{[i\%;n]}^{-1} = 10.000 \cdot a_{[10\%;4]}^{-1}$$

de tabelas de fatores financeiros encontra-se para o par $[i\%;n]$ $= [10\%;4]$:

$$a_{[10\%;4]}^{-1} = 0,3154708$$

então:

$$PMT = 10.000 \cdot 0,3154708 = \$ 3.154,70$$

O quadro geral da operação, também denominado quadro geral de amortização, é o seguinte:

Quadro Geral de Amortização - SPC					
Período	PMT_k	SD_{i_k}	$J_k = SD_{i_k} \cdot i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SD_{f_k} = SD_{i_k} - A_k$
0 – 1	3.154,70	10.000,00	1.000,00	2.154,70	7.845,30
1 – 2	3.154,70	7.845,30	784,53	2.370,17	5.475,13
2 – 3	3.154,70	5.475,13	547,51	2.607,19	2.867,94
3 – 4	3.154,70	2.867,94	286,79	2.867,91	0,04

SD_{i_k} – saldo devedor de início do período k .

SD_{f_k} – saldo devedor de final do período k .

Observe bem esse quadro, pois ele é ilustrativo do modo de operação do sistema: o juro devido do final de cada período é calculado diretamente do saldo devedor do início desses períodos ($J_k = SDi_k \cdot i$), e as amortizações pelas diferenças entre o pagamento devido (PMT) e o juro de cada período. Ao final de cada um dos períodos, resta um saldo devedor SDf_k que é o saldo devedor do início de período seguinte.

Observe que a parcela de juros diminui ao passo que a parcela de amortização aumenta em cada prestação por um fator constante, verificando-se sempre a relação: $PMT = A_k + J_k$.

Isto pode ser mais bem observado na figura 42.

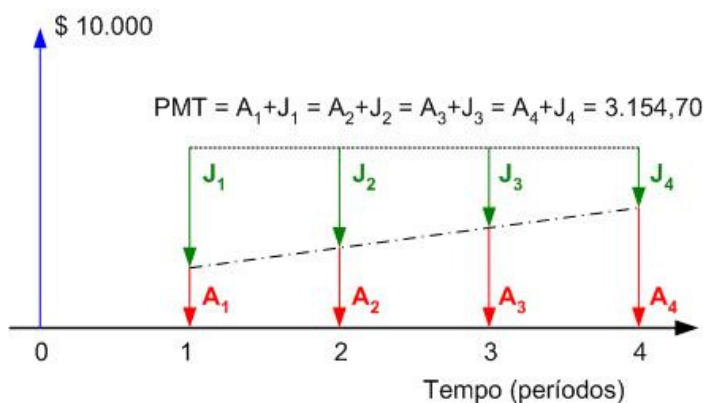


Figura 42: Comportamento de juros e amortização.

Fonte: elaborada pelo autor.

Para calcular os valores de A , J e SD correspondentes à parcela 3, sem construir o quadro geral de amortização, recorre-se às fórmulas (5.9) a (5.11):

$$A_3 = PV \cdot i \cdot \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A_3 = 10.000 \cdot 0,10 \cdot \left[\frac{(1+0,10)^2}{(1+0,10)^4} \right]$$

$$A_3 = \$ 2.607,19$$

$$J_3 = PV * i * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$J_3 = 10.000 * 0,10 * \left[\frac{(1+0,10)^4 - (1+0,10)^{3-1}}{(1+0,10)^4 - 1} \right]$$

$$J_3 = \$ 547,51$$

$$SD_{fk} = PV * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$SD_{f3} = 10.000 * \left[\frac{(1+0,10)^4 - (1+0,10)^3}{(1+0,10)^4 - 1} \right] =$$

$$SD_{f3} = \$ 2.867,91$$

A determinação do valor do montante total, ao final, equivalente à dívida inicial, se faz com a aplicação da expressão (5.6) ou da expressão (5.7).

$$M = PMT * S_{[i\%;n]} = PMT * S_{[10\%;4]} = 3.154,70 * 4,641$$

$$M = \$ 14.640,96$$

tirando-se de tabelas financeiras, para o par [10%;4], o valor :

$$S_{[10\%;4]} = 4,641000$$

Este sistema de amortização tem larga utilização em operações de financiamento imobiliário e de crédito direto ao consumidor.

Com o auxílio da calculadora financeira HP-12C se ganha muito em tempo e praticidade:

f	X<>Y		limpa as memórias financeiras
f	CLx		limpa as memórias superiores
10.000	CHS	PV	entra PV com sinal (-); visor = -10.000,00
4	n		entra c/ número de pagamentos; visor = 4
10	i		entra c/ a taxa de juros; visor = 10
?	PMT		calcula PMT = -3.154,70 (visor)

A utilização de planilhas como a Excel é também muito útil para resolver problemas desta natureza.

Saiba mais...

Veja video-aula sobre tabela price e uso da HP 12C e da planilha excel em:

<http://br.youtube.com/watch?v=oi1KWFrOTxE>

[http://br.youtube.com/watch?v=m_nQcXS9p8k&fe.](http://br.youtube.com/watch?v=m_nQcXS9p8k&feature=related)

[ature=related.](#)

Tabela Price

A Tabela Price é um caso particular do modelo de prestação uniforme, no qual o processo de cálculo é exatamente o mesmo. Dois fatores caracterizam o sistema price:

a prestação é obrigatoriamente mensal e

a taxa de juros dada é uma taxa anual nominal, sendo a taxa efetiva mensal *calculada por proporcionalidade*. Em outras palavras: n é expresso em meses e a taxa efetiva de juros é $i_m = i_a/12$.

Atividade de aprendizagem

1. Qual o valor das prestações do financiamento de \$ 10.000,00 pela tabela price e que deve ser pago em 12 parcelas mensais sucessivas postecipadas e iguais, à taxa de juros nominal de 12% aa. Resolva pela tabela, pela fórmula, pela calculadora. (Dica: a taxa de juros efetiva é taxa mensal proporcional a 12% aa). R: PMT = \$ 888,49

Modelo postecipado e diferido

Você pode imaginar a situação prática seguinte: você financiou a compra de uma TV em 10 pagamentos mensais, iguais, sucessivos, mas com o primeiro pagamento acontecendo daqui a quatro meses. Este é um exemplo de sistema de amortização postecipado e diferido por três períodos ($m=3$), que é bastante comum na prática.

As fórmulas básicas do modelo postecipado diferido em m períodos, com prazo total de $m+n$ períodos e sem pagamento de juro durante o diferimento são mostradas a seguir. Veja bem, as prestações são sucessivas e periódicas e o prazo para pagamento das prestações é de n períodos após o diferimento; então, o número de prestações é também n (n - nº de prestações = n - nº de períodos de pagamento após o diferimento). Como não há pagamento de juro durante o diferimento o seu valor deve ser capitalizado.

Veja bem a figura 43 e procure perceber que: os termos da renda e o ente auxiliar criado e denominado $PV^{\#}$ se constituem em um sistema de amortização imediato, postecipado podendo-se escrever:

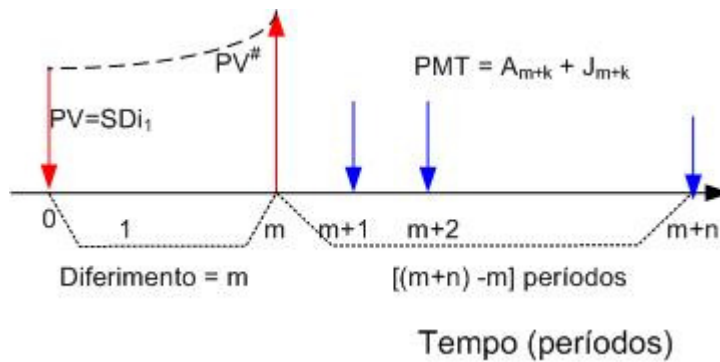


Figura 43: Modelo postecipado e diferido

Fonte: elaborada pelo autor.

Na figura 43 o primeiro pagamento está no ponto (m+1) que é o final do período m que se estende do ponto m até o ponto (m+1).

$$PMT = PV^{\#} * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Observando a figura com atenção você perceberá que $PV^{\#}$ é o valor futuro de PV para m períodos e para a taxa de juros i, ou seja, a relação entre esses valores é dada por:

$$PV^{\#} = PV * (1+i)^m$$

que substituída na expressão acima resulta em,

$$PMT = PV * (1+i)^m * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (512)$$

$$PMT = PV * FVF_{[i\%;m]} * a_{[i\%;n]}^{-1} \quad (5.13)$$

Pode-se mostrar que a expressão do montante é (idêntica ao modelo imediato:

$$M = FV = PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = PMT * S_{[i\%;(m+n)-m]} \quad (5.14)$$

As fórmulas de amortização, juro e saldo devedor intermediários são mostradas a seguir:

$$A_k = PV * i * (1+i)^m * \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.15)$$

$$J_k = PV * i * (1+i)^m * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.16)$$

$$SDfk = PV * (1+i)^m * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.17)$$

para todo k compreendido no intervalo: $0 \leq k \leq (m+n)-m$.

A fórmula do valor futuro para o modelo diferido é exatamente a mesma do modelo imediato porque só os pagamentos efetuados são capitalizados e não há pagamentos no período de diferimento.

Você deve atentar para o fato de que essas fórmulas são muito semelhantes àsquelas do modelo imediato. Essas fórmulas são, em geral, aquelas do modelo postecipado imediato ajustadas pelo fator $(1+i)^m$ que decorre da capitalização do valor PV em 0 para o valor $PV^{\#}$ em m. Em outras palavras, com exceção da fórmula do valor futuro as fórmulas do modelo diferido para o cálculo de A_k , J_k e $SDfk$ são obtidas simplesmente multiplicando-se aquelas fórmulas do modelo imediato pelo fator $(1+i)^m$.

Exemplo 5.2: em uma compra a prazo no valor de \$ 10.000,00 em quatro pagamentos iguais, postecipados e diferido em 3 meses com taxa de juros de 2% am, determine o valor dos pagamentos utilizando: a) as fórmulas e b) as tabelas financeiras. Determine também a amortização e os juros contidos na segunda parcela do pagamento e o saldo devedor

após o pagamento da segunda parcela. Construa a planilha de amortização.

Sumário de dados: PV = 10.000,00, m = 3 meses, i = 2% am, n = 4.

Solução: a) construa a figura representativa do problema (deixa-se ao encargo do leitor);

b) determine o valor de cada pagamento utilizando a fórmula (5.12):

$$PMT = PV * (1+i)^m * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT = 10.000 * (1+0,02)^3 * \frac{0,02 * (1+0,02)^4}{(1+0,02)^4 - 1} = 10.000 * 1,061208 * 0,262624$$

$$PMT = \$ 2.786,98$$

Com a utilização das tabelas financeiras: buscar os valores de $FVF_{[i\%;n]}$ e $a_{[i\%;n]}^{-1}$ em tabelas financeiras com juros de 2% e aplicar a fórmula (5.13). Encontra-se:

$$FVF_{[2\%;3]} = 1,061208 \quad \text{e} \quad a_{[2\%;4]}^{-1} = 0,262624$$

$$PMT = PV * FVF_{[i\%;m]} * a_{[i\%;(m+n)-m]}^{-1}$$

$$PMT = 10.000 * 1,061208 * 0,262624 = \$ 2.786,98$$

$$\text{Observe que } [(m+n)-m] = [(3+4)-3] = 4$$

Cálculo dos juros, da amortização e do saldo devedor com a utilização das fórmulas. Como os valores pretendidos se referem à segunda parcela, tem-se k=2.

$$A_k = PV * i * (1+i)^m * \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A_2 = 10.000 * 0,02 * (1+0,02)^3 * \left[\frac{(1+0,02)^{2-1}}{(1+0,02)^4 - 1} \right]$$

$$A_2 = 10.000 * 0,02 * 1,061208 * 12,373811 = \$ 2.626,23$$

$$J_k = PV * i * (1+i)^m * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$J_2 = 10.000 * 0,02 * (1+0,02)^3 * \frac{(1+0,02)^4 - (1+0,02)^{2-1}}{(1+0,02)^4 - 1}$$

$$J_2 = 200 * 1,061208 * \frac{0,062432}{0,082432} = \$ 160,74$$

Finalmente, o cálculo do saldo devedor remanescente após o pagamento da segunda parcela:

$$SDf_k = PV * (1+i)^m * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$SDf_2 = 10.000 * (1+0,02)^3 * \frac{(1+0,02)^4 - (1+0,02)^2}{(1+0,02)^4 - 1}$$

$$SDf_2 = 10.000 * 1,061208 * \frac{0,042032}{0,082432} = \$ 5.411,08$$

A seguir o quadro de amortização associado.

Quadro geral de amortização - SPC diferido						
Período		SDi _k	J _k	A _k	PMT	SDf _k
k	m+k					
-	1	—10.000,00	—200,00	-	-	10.200,00
-	2	—10.200,00	—204,00	-	-	10.404,00
	3	—10.404,00	—208,08	-	-	10.612,08
1	4=3+1	10.612,08	212,24	2.574,74	2.786,98	8.037,34
2	5=3+2	8.037,34	160,75	2.626,24	2.786,98	5.411,10
3	6=3+3	5.411,10	108,22	2.678,76	2.786,98	2.732,34
4	7=3+4	2.732,34	54,65	2.732,34	2.786,98	(0,00)
k = ordem dos pagamentos			1 ≤ k ≤ n			

Em azul e tachado você pode acompanhar as acumulações de juros que vão se dando durante o diferimento.

Atividades de aprendizagem

2. Você contraiu um empréstimo para ser pago em cinco prestações mensais de \$ 9.547,12, iguais, imediatas e postecipadas. Sabendo que a taxa nominal de juros é de 24% aa, determine o valor do financiamento. Construa a planilha de amortização. Determine com a utilização da fórmula geral o valor dos juros contidos na terceira prestação (J_3). Dica: taxa mensal efetiva $i_m = 2\%$ am. R: $PV = 44.499,96$ $J_3 = 550,66$.

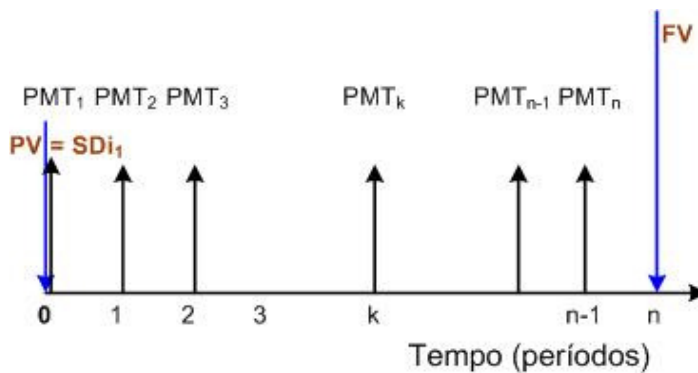
3. Qual o valor dos pagamentos de uma compra a prazo no valor de \$ 10.000,00 à vista, para ser financiada em 6 pagamentos mensais, sucessivos, iguais a uma taxa de juros de 12% aa? quanto deveria pagar se quisesse quitar toda a dívida no terceiro pagamento?. Construa o quadro de amortização.

R: $PMT = 1.725,48$ Valor do pagamento = \$ 6.732,78.

4. Vá a uma loja e procure por ofertas que dizem ter preço à vista parcelados em prestações tais que a soma das prestações é igual ao preço à vista. Discuta com seus colegas o significado destas ofertas.

Modelo antecipado e imediato

Imagine que você financiou a compra de um bem em várias parcelas iguais com um pagamento inicial a título de entrada; este é um modelo de amortização denominado antecipado e que é muito usado no comércio.



Renda imediata

1º pagamento no primeiro período da renda.

Renda antecipada

Pagamentos: no início de cada período.

Figura 44: Renda antecipada e imediata.

Fonte: elaborada pelo autor.

Neste modelo, que você pode visualizar na figura 44, os pagamentos são feitos no início de cada período. Como o primeiro pagamento se dá na própria origem da dívida, ele não inclui juro e é todo ele destinado a amortizar a dívida. O juro devido estará incluído nos demais pagamentos.

Recorrendo às fórmulas de rendas antecipadas da unidade 4, chega-se às seguintes expressões:

$$PV = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \quad (5.18)$$

$$PV = (1+i) * PMT * a_{[i\%;n]}$$

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (5.19)$$

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * a_{[i\%;n]}^{-1}$$

$$FV = (1+i) * PMT * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i) * PMT * S_{[i;n]} \quad (5.20)$$

$$PMT = FV * \frac{1}{(1+i)} * \frac{i}{(1+i)^n - 1} = FV * \frac{1}{(1+i)} * S_{[i\%;n]}^{-1} \quad (5.21)$$

As expressões para juros, amortizações e saldos devedores intermediários são respectivamente:

$$A_k = PV * i * (1+i)^k \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \quad p/ k > 1 \quad (5.22)$$

$$e \quad A_1 = PMT \quad p/ k=1$$

$$J_k = \frac{PV}{(1+i)} * i * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \quad P/ K > 1 \quad (5.23)$$

$$e \quad J_1 = 0 \quad p/ k=1$$

$$SD_{fk} = \frac{PV}{(1+i)} * \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (5.24)$$

Exemplo 5.3: considere um empréstimo de \$ 10.000,00 a ser pago em quatro prestações anuais sucessivas antecipadas, para o qual se convencionou uma taxa de juros efetiva de 10%aa. Qual o valor da prestação anual? Montar um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: $PV = 10.000,00$, $n = 4$, $i = 10\%$ aa, mod. antecipado

Solução: a) o cálculo da prestação é feito a partir da expressão (5.19):

$$PMT = \frac{PV}{(1+i)} * \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$PMT = \frac{10.000}{(1+0,1)} * a_{[10\%;4]}^{-1}$$

em tabelas de fatores financeiros encontra-se para o par $[10\%;4]$:

$$a_{[10\%;4]}^{-1} = 0,3154708$$

então:

$$PMT = \frac{10.000}{(1+0,1)} * 0,3154708 = \$ 2.867,90$$

O quadro geral da operação, também denominado quadro geral de amortização, é o seguinte:

Quadro Geral de Amortização - SPC antecipado					
Período	PMT_k	SDi_k	$J_k = SDi_k * i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SDf_k = SDi_k - A_k$
0 – 1	2.867,92	10.000,00	0,00	2.867,92	7.132,08
1 – 2	2.867,92	7.132,08	713,21	2.154,71	4.977,38
2 – 3	2.867,92	4.977,38	497,74	2.370,18	2.607,20
3 – 4	2.867,92	2.607,20	260,72	2.607,20	0,00

SDi_k – saldo devedor de início do período k.

SDf_k – saldo devedor de final do período k.

Os demais modelos podem ser desenvolvidos teoricamente de forma análoga e são deixados como exercícios para o leitor.

Atividades de aprendizagem

5. Você contraiu um empréstimo para ser pago em cinco prestações mensais de \$ 9.547,12, iguais, imediatas e antecipadas. Sabendo que a taxa nominal de juros é de 24% aa, determine o valor do financiamento. Construa a planilha de amortização. Determine com a utilização da fórmula geral o valor dos juros contidos na terceira prestação (J_3). Dica: taxa mensal efetiva $i_m = 2\%$ am. R: $PV = 45.899,96$ $J_3 = 550,66$.

6. Qual o valor dos pagamentos de uma compra a prazo no valor de \$ 10.000,00 à vista, para ser financiada em 6 pagamentos mensais antecipados, sucessivos, iguais a uma taxa de juros de 12% aa? quanto deveria pagar se quisesse

quitar toda a dívida no terceiro pagamento?. Construa o quadro de amortização. R: $PMT = 1.708,39$ Valor do pagamento = \$ 6.732,76. (Dica: calcule o saldo devedor do final do segundo período)

Sistema de amortização constante - SAC

Você percebeu que, nos modelos anteriores, os pagamentos eram constantes. Neste sistema de amortização os pagamentos são decrescentes no tempo e são compostos, de modo análogo aos casos anteriores, por dois elementos:

amortização (A), esta **constante** ao longo de todo o plano de pagamentos; e,

juro (J), calculados sobre os saldos devedores dos períodos imediatamente anteriores.

O pagamento ou renda devido em cada período é:

$$PMT_k = A_k + J_k = A + J_k \quad (5.25)$$

Importante!

Observe que neste sistema o que permanece constante é a parcela de amortização enquanto que no SPC o que permanece constante é o valor da prestação

Este sistema também pode operar nos modos postecipado, antecipado e diferido sendo tratado, neste livro, o modelo postecipado.

As fórmulas gerais para um sistema de amortização constante, imediato e postecipado, evidenciado na figura 45, estão mostradas a seguir.

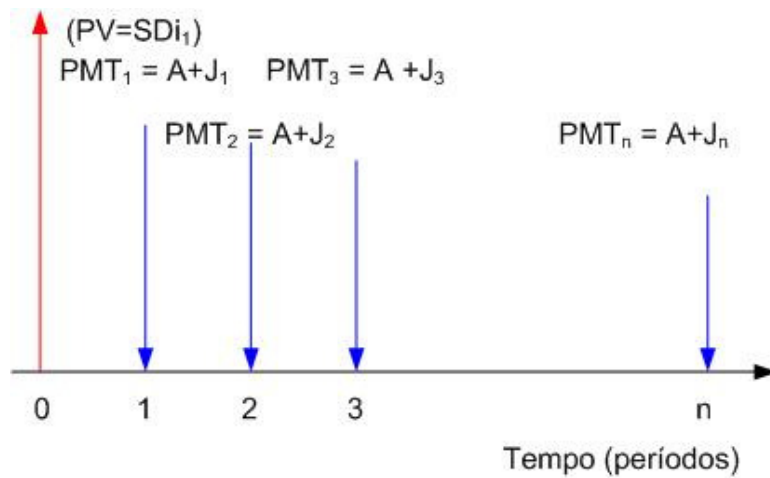


Figura 45: Sistema de amortização constante, imediato e postecipado.

Fonte: elaborada pelo autor.

Chamando de :

$PV (SDi_1)$ - principal ou saldo devedor inicial

i - taxa de juros periódica efetiva

n - prazo em períodos

O valor de cada prestação ou renda está dado por (5.25):

$$PMT_k = A + J_k \quad 1 \leq k \leq n$$

onde,

PMT_k k -ésima prestação ou renda;

A amortização, que é constante em todos os pagamentos;

J_k juros referentes a k -ésima prestação.

O valor da amortização contida em cada pagamento é determinado dividindo-se o principal (o valor da dívida inicial) pelo número de parcelas do plano de pagamento:

$$A = \frac{PV}{n} = \frac{SDi_1}{n} \quad (5.26)$$

O saldo devedor final do período k (pós pagamento da k -ésima prestação), é dado pela diferença entre o saldo devedor inicial e as amortizações contidas em todos os pagamentos, incluso o de ordem k :

$$SDfk = SDi_1 - k * A = SDi_1 - \frac{SDi_1}{n} \quad \text{que por fatoração}$$

simples resulta em,

$$SDfk = SDi_1 * \left[\frac{n-k}{n} \right] \quad (5.27)$$

Os juros referentes a k -ésima prestação ou renda são calculados com base no saldo devedor inicial do próprio período k , ou seja, com base em SDi_k :

$$J_k = SDi_k * i$$

Mas lembrando que SDi_k é igual a SDf_{k-1} e recorrendo a fórmula (5.27) tira-se,

$$SDi_k = SDf_{k-1} = SDi_1 * \left[\frac{n-(k-1)}{n} \right] \quad \text{que substituído na fórmula dos}$$

juros,

$$J_k = SDi_1 * \left[\frac{n-(k-1)}{n} \right] * i \quad \text{e}$$

$$J_k = SDi_1 * i * \left[\frac{n-k+1}{n} \right] \quad (5.28)$$

com $1 \leq k \leq n$

Finalmente, o valor da k -ésima prestação ou renda é dado pela soma da amortização e dos juros da parcela de ordem k :

$$PMT_k = A + J_k = \frac{SDi_1}{n} + SDi_1 * i * \left[\frac{n-k+1}{n} \right] \quad (5.29)$$

Observações:

- J_k é uniformemente decrescente em k ;
- R_k é uniformemente decrescente em k ;
- deste ponto em diante a taxa de juros efetiva será designada simplesmente por i ;
- a taxa de juros e os períodos de pagamento das prestações são expressos em unidades compatíveis; e,
- a primeira prestação ou renda é devida ao final do primeiro período (modelo postecipado).

Saiba mais....

Veja vide-aula do sistema SAC em:

http://br.youtube.com/watch?v=43rns_jHnTA.

Leve em conta também que este é um modelo básico e comporta variações. Existem modelos com prestações antecipadas ou diferidas. Um modelo diferido postecipado pode ser visto na figura 46.

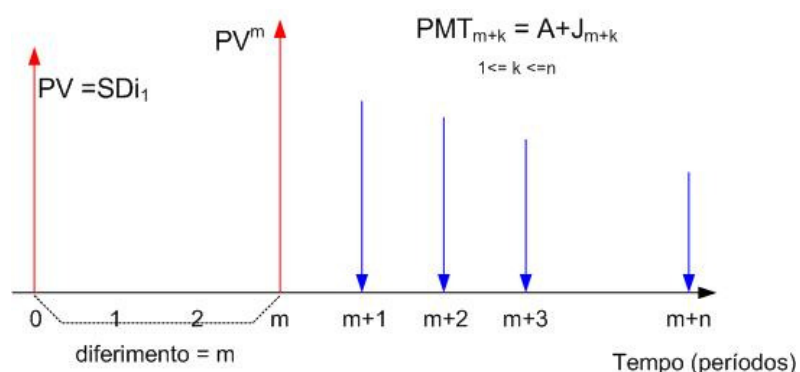


Figura 46: Sistema de amortização constante, diferido e postecipado.

Fonte: elaborada pelo autor.

Como você pode ver nessa figura, há um período de diferimento durante o qual nenhum pagamento é feito.

Neste caso os juros são capitalizados de modo a transformar este plano num modelo convencional postecipado ao qual podem ser aplicadas as fórmulas vistas acima.

As fórmulas gerais para este modelo (diferimento “m”) e postecipado são as seguintes:

$$A = \frac{SDi_1 * (1+i)^m}{n} \quad (5.30)$$

$$J_k = SDi_1 * (1+i)^{m*i * (\frac{n-k+1}{n})} \quad (5.31)$$

$1 \leq k \leq n$

$$PMT_k = A + J_k \quad (5.32)$$

$$SD_k = SDi_1 * (1+i)^m * [\frac{n-k}{n}] \quad (5.33)$$

Exemplo 5.4: considere um empréstimo de \$ 10000,00 a ser pago pelo SAC em quatro prestações anuais sucessivas imediatas e postecipadas, para o qual se convencionou uma taxa de juros de 10%aa. Qual o valor da prestação anual? Montar um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: PV = 10.000,00, $n = 4$, ($k = 1, 2, 3$ e 4), $i = 10\%$ aa, mod.: SAC postecipado.

Solução: a) o cálculo da amortização contida em cada pagamento é feito a partir da expressão (5.24):

$$A = \frac{SDi_1}{n} = 10.000,00/4 = \$ 2.500,00 \quad (\text{constante nos quatro pagamentos})$$

b) o juro, o valor de cada pagamento e o saldo devedor remanescente são calculados a partir das fórmulas mostradas acima.

$$J_k = SDi_1 * i * \left[\frac{n - k + 1}{n} \right]$$

$$J_1 = 10.000 * 0,10 * \left[\frac{4 - 1 + 1}{4} \right] = \$ 1.000,00 \quad (k=1)$$

$$PMT_1 = A + J_1 = 2.500 + 1.000 = \$ 3.500,00$$

$$SDf_k = SDi_1 * \left[\frac{n - k}{n} \right]$$

$$SDf_1 = 10.000 * \left[\frac{4 - 1}{4} \right] = \$ 7.500,00 \quad (k=1)$$

De modo análogo se calculam:

$$J_2 = 10.000 * 0,10 * \left[\frac{4 - 2 + 1}{4} \right] = \$ 750,00 \quad (k=2)$$

$$PMT_2 = A + J_2 = 2.500,00 + 750,00 = \$ 3.250,00$$

$$SDf_2 = 10.000 * \left[\frac{4 - 2}{4} \right] = \$ 5.000,00 \quad (k=2)$$

$$J_3 = 10.000 * 0,10 * \left[\frac{4 - 3 + 1}{4} \right] = \$ 500,00$$

$$PMT_3 = A + J_3 = 2.500,00 + 500,00 = \$ 3.000,00 \quad (k=3)$$

$$SDf_3 = 10.000 * \left[\frac{4 - 3}{4} \right] = \$ 2.500,00 \quad (k=3)$$

$$J_4 = 10.000 * 0,10 * \left[\frac{4 - 4 + 1}{4} \right] = \$ 250,00 \quad (k=4)$$

$$PMT_4 = A + J_4 = 2.500,00 + 250,00 = \$ 3.750,00$$

$$SDf_4 = 10.000 * \left[\frac{4-4}{4} \right] = 0,00 \quad (k=4)$$

O quadro geral de amortização está mostrado a seguir:

Quadro Geral de Amortização - SAC postecipado					
Período	PMT_k	SDi_k	$J_k = SDi_k * i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SDf_k = SDi_k - A_k$
0 – 1	3.500,00	10.000,00	1.000,00	2.500,00	7.500,00
1 – 2	3.250,00	7.500,00	750,00	2.500,00	5.000,00
2 – 3	3.000,00	5.000,00	500,00	2.500,00	2.500,00
3 – 4	2.750,00	2.500,00	250,00	2.500,00	0,00

SDi_k – saldo devedor de início do período k.

SDf_k – saldo devedor de final do período k.

Observe que o valor das prestações é decrescente; as prestações iniciais do SAC superam as prestações do SPC o inverso ocorrendo com as últimas.

Atividades de aprendizagem

7. Você contraiu um empréstimo de \$ 10.000,00 para ser pago em cinco prestações mensais imediatas e postecipadas no sistema SAC. Sabendo que a taxa nominal de juros é de 24% aa, determine o valor das prestações. Construa a planilha de amortização. Dica: taxa mensal efetiva $i_m = 2\%$ am. R: PMT = 2.200, 2.160, 2.120, 2.080, 2.000.

8. Qual o valor dos pagamentos de uma compra a prazo no valor de \$ 10.000,00 à vista, para ser financiada em 5 pagamentos mensais e sucessivos a uma taxa de juros de 12% aa e diferidos em 3 meses, pelo SAC? quanto deveria pagar se quisesse quitar toda a dívida no terceiro pagamento?. Construa o quadro de amortização. R: Valor do pagamento = \$ 8.363,60.

9. Entre no site da CEF www.cef.com.br e veja os planos de financiamento habitacionais oferecidos e os identifique com os modelos vistos até agora. Discuta com seus colegas no wiki.

Sistema do montante

Conforme você pode ver na figura 47 no sistema do montante há um único pagamento (FV) ao final da operação que é a soma do principal e dos juros acumulados.

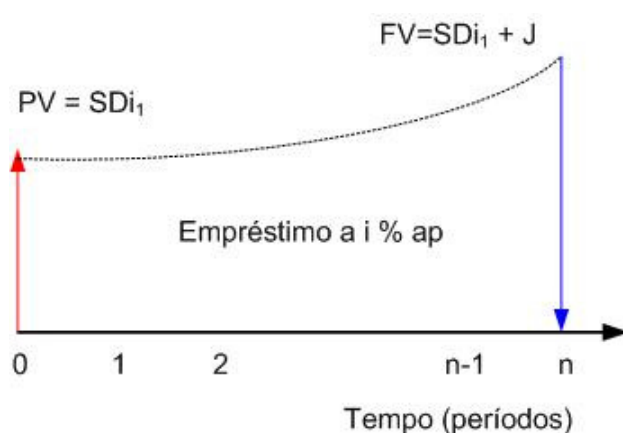


Figura 47: Sistema do montante

Fonte: elaborada pelo autor.

Os cálculos resumem-se à aplicação das fórmulas de juros compostos.

$$FV = SDi_1 \cdot (1+i)^n = SDi_1 + J \quad (5.34)$$

$$FV = SDi_1 \cdot FVF_{[i\%;n]} \quad (5.35)$$

Exemplo 5.5: considere um empréstimo de \$ 10000,00 que deve ser pago ao final de quatro anos, de uma única vez, para o qual se convencionou uma taxa de juros efetiva de 10%aa. Qual o valor do pagamento? Montar um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: $PV = 10.000,00$, $n = 4$, $i = 10\% \text{ aa}$, $FV = ?$
mod.: sistema do montante

Solução: a) o cálculo da prestação é feito a partir da expressão (5.34) ou (5.35):

$$FV = SDi_1 * (1+i)^n = SDi_1 * FVF_{[i\%;n]}$$

$$FV = 10.000 * (1+0,10)^4 = 10.000 * 1,4641 = \$ 14.641,00$$

O quadro geral de amortização da dívida está mostrado abaixo:

Quadro Geral de Amortização - SAC postecipado					
Período	PMT _k	SDi _k	J _k =SDi _k *i	A _k =PMT _k -J _k	SDf _k =SDi _k -A _k
0 – 1	-	10.000,00	1.000,00	-	11.000,00
1 – 2	-	11.000,00	1.100,00	-	12.100,00
2 – 3	-	12.100,00	1.210,00	-	13.310,00
3 – 4	14.641,00	13.310,00	1.331,00	10.000,00	14.641,00
Total de J			4.641,00		

Esse quadro mostra até a sua quarta linha, como se dá a evolução da dívida em função da capitalização dos juros intermediários. A última linha, mostra a forma de liquidação do empréstimo: pagaram-se juros no valor total de \$ 4.641,00 e o principal no valor de \$ 10.000,00.

Sistema americano

O sistema americano é uma variante do sistema do montante na qual o principal é pago de uma só vez ao final do prazo do empréstimo, e o juro devido é pago periodicamente. A figura 48 ilustra o modelo.

Os cálculos neste sistema são bastante simples. Com efeito, como não há capitalização de juro, o saldo devedor não se altera ao longo do tempo.

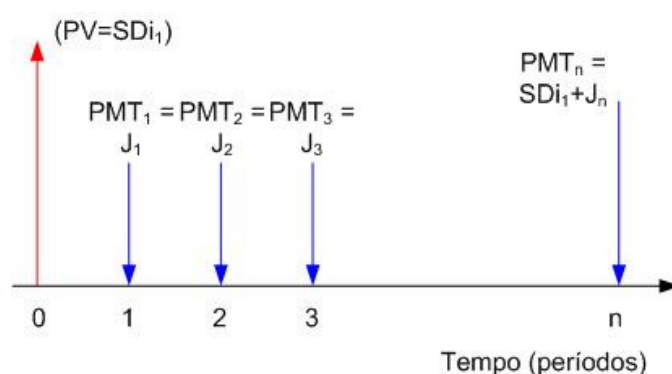


Figura 48: Sistema americano.

Fonte: elaborada pelo autor.

O juro devido em cada período é constante; no vencimento da operação são pagos o principal e a última parcela do juro. Esquemáticamente tem-se:

$$PMT_k = PMT_1 = \dots = PMT_{n-1} = J = SDi_1 * i \quad (5.36)$$

$$PMT_n = SDi_1 + J$$

$$PMT_n = SDi_1 + SDt_1 * i \quad (5.37)$$

$$PMT_n = SDi_1 * (1 + i)$$

Exemplo 5.6: considere um empréstimo de \$ 10.000,00 que deve ser pago em quatro anos pelo sistema americano, para o qual se convencionou uma taxa de juros efetiva de 10%aa. Qual o valor dos pagamentos? Montar um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: $SDi_1 = PV = 10.000,00$, $n = 4$, $i = 10\%$ aa, $PMT_k = ?$, mod.: sistema americano

Solução: a) o cálculo da prestação é feito a partir da expressão (6.36) e (6.37).

$$PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = J = SD_0 * i = 10.000 * 0,10 = \$ 1.000,00$$

$$PMT_4 = SDi_1 + J = SDi_1 + SDi_1 * i = 10.000 + 10.000 * 0,10 = \$ 11.000,00$$

Quadro Geral de Amortização - S. americano					
Período	PMT_k	SDi_k	$J_k = SDi_k * i$	$A_k = PMT_k - J_k$	$SDf_k = SDi_k - A_k$
0 – 1	1.000,00	10.000,00	1.000,00	-	10.000,00
1 – 2	1.000,00	10.000,00	1.000,00	-	10.000,00
2 – 3	1.000,00	10.000,00	1.000,00	-	10.000,00
3 – 4	11.000,00	10.000,00	1.000,00	10.000,00	0,00

Sistema do “sinking fund”

Este sistema de amortização é uma combinação interessante do sistema do montante - pagamento total ao final - e de uma forma de poupança feita pelo tomador (devedor) com o sentido de diminuir o risco financeiro para o credor. Este sistema se materializa da seguinte forma: o tomador contrata um empréstimo para pagamento ao final a uma determinada taxa de juros efetiva “i” e, paralelamente, ele faz com o banco um contrato de depósito remunerado periódico a uma taxa de juros “i[#]”, pelo mesmo período do empréstimo, de tal modo que o montante desses depósitos remunerados seja, ao final, exatamente o suficiente para pagar o empréstimo.

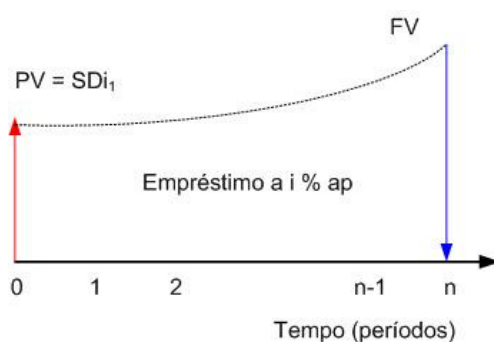


Figura 49: Empréstimo com pagamento ao final.

Fonte: elaborada pelo autor.

Os depósitos remunerados são, evidentemente, feitos na instituição financeira concedente do empréstimo.

As figuras 49 e 50 ilustram essa situação.

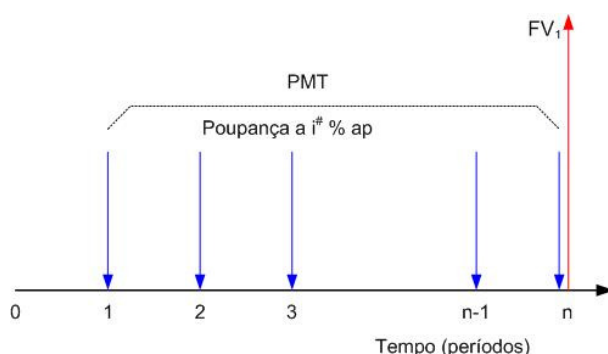


Figura 50: Poupança programada.

Fonte: elaborada pelo autor.

Para que você possa deduzir as fórmulas gerais suponha um empréstimo no valor de SD_0 , por um prazo de n períodos, a uma taxa de juros “ i ”, sem pagamento de juros intermediários.

Como já visto no sistema do montante o valor a ser pago ao final pelo tomador deste empréstimo será:

$$FV = SD_1 * (1+i)^n = SD_1 * FVF_{[i\%;n]} \quad (5.38)$$

A pergunta que você deve colocar é a seguinte: qual deve ser o valor (PMT) dos n depósitos periódicos em conta remunerada à taxa de juros $i^\#$ para que o seu montante final seja exatamente igual a FV ? A resposta a esta questão vem da unidade em que se estudou de rendas; o montante dos seus depósitos (imediato, constante e postecipado) em poupança será, conforme visto na unidade 4:

$$FV_1 = PMT * \frac{(1+i^\#)^n - 1}{i^\#} = PMT * S_{[i^\#;n]} \quad (5.39)$$

Como esses dois montantes (VF e VF_1) devem ser iguais para que o empréstimo possa ser pago, tem-se:

$$FV_1 = PMT * \frac{(1+i^{\#})^n - 1}{i^{\#}} = FV = SDi_1 * (1+i)^n$$

resultando daí para PMT o seguinte valor:

$$PMT = SDi_1 * (1+i)^n * \frac{i^{\#}}{(1+i^{\#})^n - 1} \quad (5.40)$$

ou,

$$PMT = SDi_1 * FVF_{[i;n]} * S_{[i^{\#};n]}^{-1}$$

Exemplo 5.7: considere um empréstimo de \$ 10.000,00 que deve ser pago em quatro anos pelo sistema do sinking fund. A taxa de juros efetiva do empréstimo foi convencionada em 10%aa e a remuneração dos depósitos periódicos em 4%aa. Qual o valor dos pagamentos? Montar um quadro demonstrativo da operação.

Sumário de dados: PV = 10.000,00, n = 4, i = 10% aa, PMT_k = ?, sistema de amortização: sinking fund

Solução: a) encontrar o montante a ser pago pelo tomador do empréstimo com a taxa de juros de 10% aa aplicando a fórmula (5.38). Determinação do montante (PV= 10.000, n = 4, i = 10%aa):

$$FV = PV * (1+i)^n = PV * FVF_{[i;n]} = 10.000 * (1+0,10)^4 = 14.641,00$$

b) determinar as quatro prestações anuais postecipadas e imediatas que produzirão esse montante aplicando a fórmula (5.39) (i[#] = 4% aa, n = 4 a, VF₁ = 14.641,00, PMT= ?).

$$FV_1 = PMT * S_{[i^{\#},n]}$$

$$14.641 = PMT * S_{[4\%,4]} = PMT * 4,246464$$

(o valor $S_{[4\%;4]}$ foi tirado de tabelas de fatores financeiros para $i^{\#} = 4\%$ aa e $n=4$)

$$PMT = \$ 3.447,81$$

Quadro Geral de Amortização – Sinking fund						
Período	Evolução do saldo do empréstimo			Evolução dos depósitos		
	SDi_k	J_k	SDf_k	PMT	J_k	SDf_k
0 - 1	10.000,00	1.000,00	11.000,00	3.447,81		3.447,81
1 - 2	11.000,00	1.100,00	12.100,00	3.447,81	137,91	7.033,44
2 - 3	12.100,00	1.210,00	13.310,00	3.447,81	281,34	10.762,59
3 - 4	13.310,00	1.331,00	14.641,00	3.447,81	430,50	14.640,90

Não incide juros no primeiro período porque os depósitos são postecipados.

Saiba mais....

Sistema de amortização alemão. Você pode vê-lo na LC 62 em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/LC62.doc.

Atividades de aprendizagem

10. Um empréstimo de \$ 25.000,00 deverá ser amortizado em 12 meses pelo sistema do sinking fund. A taxa de juros do empréstimo é de 24% aa e a remuneração de fundo de renda fixa oferecida pelo banco é de 1% am. Determine o valor dos depósitos mensais que o tomador deverá fazer. Construa o quadro de amortização. R: $FV = 31.000,00$, $PMT = 2.444,31$.

11. Você contraiu um empréstimo a ser amortizado pelo sistema americano com pagamento de juros mensais. Determine os pagamentos a serem feitos e construa o quadro de amortização para um valor de empréstimo de \$ 10.000,00 e prazo para pagamento do principal em 6 meses, O banco cobra uma taxa

de juros de 18% aa. Resp.: $PMT_1 = \dots = PMT_5 = 150,00$; $PMT_6 = 10.150,00$.

12. Você financiou a compra de sua casa em 96 prestações mensais pelo sistema SAC. O valor da amortização contida em cada pagamento é de \$ 250,00. A taxa de juros convencionada é de 12% aa. Determine o valor financiado e construa a planilha de amortização para os quatro primeiros pagamentos. Resp.: $SD_0 = 24.000,00$; $PMT_1 = 490,00$, $J_1 = 240,00$, $A_1 = 250,00$.

13. Uma empresa toma um empréstimo de \$ 10.000,00 a ser amortizado pelo sistema de prestações constantes em seis (6) quadrimestres com carência de 2 quadrimestres. A taxa de juros nominal é de 15% aa e a capitalização quadrimestral. Determine o valor da prestação e construa a planilha de amortização. Calcule o saldo devedor remanescente após o pagamento da 4ª prestação, com a utilização da fórmula geral. Resp.: $i_{ef} = 5\% \text{ aq}$; $PMT = 2.068,68$; $SD_4 = 3.846,53$.

14. Um empréstimo de \$ 50.000,00 deverá ser amortizado em cinco (5) prestações pela “Tabela Price”, sem carência. Sabendo que a taxa de juros nominal é de 48% aa determinar o valor das prestações. Construa a planilha de amortização. Determine com o auxílio das fórmulas gerais: SD_3 , J_3 e A_4 . Resp.: $PMT = -10.799,38$; $J_3 = 1.246,72$; $SD_3 = 21.183,40$; $A_4 = 10.384,02$.

15. Construa a planilha de amortização para um empréstimo de \$ 50.000,00 a ser amortizado pelo SAC, em seis (6) prestações mensais, postecipadas, sem prazo de carência. A taxa de juros nominal é de 24% aa. Construa a planilha de amortização desse empréstimo. Resp.: $A = 8.333,33$, $J_1 = 3.000,00$, $PMT_1 = 11.333,33$

16. O preço à vista de um eletro-doméstico é \$ 1.000,00. A loja o está financiando, pelo sistema SAC, em quatro (4) pagamentos mensais, postecipados, a uma taxa de juros efetiva de 42,576% aa. Construa a planilha de financiamento e determine os valores básicos da prestação de ordem três.
Resp.: $i_{ef}=3\%am$; $A= 250,00$.

Resumo

Nesta unidade você estudou os modelos básicos de sistemas de amortização existentes no mercado. Todos os exemplos resolvidos o foram para o mesmo valor de empréstimo, mesmo prazo e mesma taxa de juros e você pode observar que os valores despendidos para pagamento são diferentes nos diversos modelos. Mas, atente para o fato de todos eles são absolutamente equivalentes porque foram solucionados com a utilização da mesma taxa efetiva de juros. O sistema de prestação constante tem larga aplicação no crédito direto ao consumidor e no sistema financeiro da habitação; o sistema de amortização constante é mais largamente utilizado no sistema financeiro da habitação e os demais sistemas em aplicações comerciais diversas.

Bem! Chegamos ao final de mais uma unidade do curso. Você entendeu bem todos os pontos abordados? Cumpriu todas as atividades? Caso as tenha cumprido todas, está uma vez mais de parabéns e apto a ir para a sexta e última unidade do curso.

Unidade 6

Inflação e correção monetária (CM)

Introdução

A inflação é um desajuste de ordem econômica que se reflete em um processo de aumento generalizado de preços de produtos e serviços, que incide de modo diferente em cada setor da economia causando uma redistribuição de renda, quase sempre perversa.

A inflação é um desajuste de ordem econômica que se reflete em um processo de aumento generalizado de preços de produtos e serviços.

A inflação cria uma série de problemas de ordem prática (a par dos problemas de ordem social), alguns dos quais estão listados abaixo:

- dificulta o planejamento financeiro em todos os níveis;
- torna ilusórios os registros contábeis e as projeções econômico-financeiras deles decorrentes;
- cria um imposto inflacionário na medida em que tributa lucros fictícios;
- dificulta as operações do mercado financeiro ao introduzir uma componente de previsão incerta, além de outros.

Para corrigir essas dificuldades e minorar os problemas de ordem social criaram-se mecanismos de indexação econômica que serão em parte estudados nesta unidade.

Índices de preços

Um índice de preços é um *número índice* estruturado e construído para medir a mudança que ocorre nos preços de bens e serviços em um dado período de tempo.

Esses índices são compostos sob critérios metodológicos específicos e tomam como referência uma cesta básica de consumo de bens e/ou serviços que satisfaçam a uma determinada necessidade. É possível construir índices a partir de cestas básicas de construção civil, de cesta básica de alimentos, de cesta básica de consumo de famílias que pertencem à determinada faixa de renda e outros.

Para o entendimento do funcionamento do processo vamos utilizar a tabela 8 de índices de preços.

Mês	19X0	19X1	19X2
Jan	-	108,90	144,21
Fev	-	110,04	146,40
Mar	-	111,69	148,83
Abr	-	113,10	151,62
Mai	100,00	114,95	154,65
Jun	101,26	117,39	-
Jul	102,39	121,30	-
Ago	103,30	126,63	-
Set	104,17	132,67	-
Out	105,18	137,64	-
Nov	105,90	140,61	-
Dez	106,80	142,38	-

Tabela 8: Preços – Números índices (NI)

Observações:

- esta tabela reproduz a inflação ocorrida nos anos 19X0 a 19X2.
- os índices de preço se referem ao início de cada mês.

Se você observar a linha do mês de maio para os três anos, encontrará os valores 100, 114,95 e 154,65. O que você entende por isso? Significa simplesmente o seguinte: para comprar a mesma cesta básica de bens, você precisou de 100 unidades monetárias em 19X0, de 114,95 unidades monetárias em 19X1 e de 154,65 unidades monetárias em 19X2. O dinheiro perdeu valor porque você precisa de mais para comprar a mesma cesta.

Saiba mais...

Vá aos sites:

<http://fipe.com.br/web/index.asp>

http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultnotas.shtm.

Índice e taxa de inflação (ou de correção monetária)

O índice de inflação entre os períodos j e m (tomado como base) é dado por:

$$I_{j/m} = \frac{NI_j}{NI_m} \quad (6.1)$$

NI_j número índice do mês j, e

NI_m número índice do mês m.

Se você quiser saber o índice de inflação entre outubro de 19X0 e maio de 19X2, basta fazer a relação entre os números índices correspondentes, da seguinte maneira:

$$I_{\text{maiX2/outX0}} = \frac{NI_{\text{maiX2}}}{NI_{\text{outX0}}} = \frac{154,65}{137,64} = 1,1235$$

Significado disto? Os preços de maio de 19X2 são 1,1235 vezes mais elevados que os preços de outubro de 19X0; em outras palavras:

Preços de maiX2 = 1,1235*Preços de outX0.

A taxa de inflação pode ser calculada a partir do índice de inflação, do seguinte modo:

$$I = (1 + i) \quad (6.2)$$

Para o período considerado (out X0 a mai X2) a taxa de inflação foi:

$$1,1235 = 1 + i$$

$$i = 0,1235 \quad \text{ou} \quad 12,35\% \text{ ap}$$

Exemplo 6.1: Suponha um empréstimo tomado em maio de 19X0 no valor de \$ 5.000,00 a serem pagos 60 dias depois (julho). Qual o valor corrigido da dívida?

Solução: o índice de correção para o período é dado pela relação entre: $NI_{\text{mai}} = 100$ e $NI_{\text{jul}} = 102,39$,

$$I_{\text{jul/mai}} = 102,39/100 = 1,0239$$

$$\text{Valor da dívida em julho} = 5.000 * 1,0239 = 5.119,50$$

Os indicadores monetários utilizados pelos governos são atualizados permanentemente por algum dos índices de inflação calculados por instituições específicas, a exemplo do IBGE, da FIPE, da FGV e outras.

Em geral, o Governo Federal arbitra um índice que é utilizado para a correção monetária de balanços e obrigações previdenciárias e fiscais. Nos dias de hoje, a correção monetária

oficial é feita pela taxa referencial de juros (TR). Em operações particulares há liberdade para se fixar índices de correção diferenciados.

Taxas de juros aparente e real

Ao se considerar a inflação tem-se um complicador nos cálculos financeiros, porque há duas taxas a serem consideradas: a taxa de inflação ou correção monetária e a taxa real de juros.

Chamando

C capital

i_{cm} taxa de correção monetária periódica

i_{ap} taxa de juros aparente periódica (engloba a inflação e a taxa de juros real)

i_r taxa de juros real (considerando a moeda constante)

O montante aparente (juros mais correção monetária) desse capital em um período será;

$$M = C * (1 + i_{ap}) \quad (6.3)$$

Outra forma de se calcular esse montante é separar a correção monetária da capitalização de juros; assim:

a) corrigir o capital pela taxa de inflação,

$$C^{\#} = C * (1 + i_{cm})$$

b) proceder a capitalização do capital corrigido pela taxa de juros real,

$$M = C^{\#} * (1 + i_r) = C * (1 + i_{cm}) * (1 + i_r) \quad (6.4)$$

Comparando-se as expressões (6.1) e (6.2) vem:

$$(1+i_{ap}) = (1+i_{cm}) * (1+i_r) \quad (6.5)$$

Esta fórmula permite a você relacionar as três taxas consideradas: a aparente, a real e a de correção monetária.

Para os estudos seqüentes utilizaremos os índices de preços constantes da tabela 7.

Saiba mais...

Neste processo capital e juro sofreram correção monetária. Alguns sistemas de correção entendem que o juro só é devido ao final do período e por isso não sofre correção monetária nesse período. Leia sobre isto na leitura complementar LC 71 em:

http://www.proativams.com.br/files_aberto/Leitura%20complementar%2071.doc.

Exemplo 6.2: calcular o índice e a taxa de correção monetária entre os meses de maio e junho de 19X1.

Solução: calcule o índice de correção monetária:

$$I_{(jun/mai)} = \frac{NI_{jun}}{NI_{mai}} = \frac{101,26}{100,00} = 1,0126$$

A taxa de inflação do período será:

$$I = 1 + i$$

$$1,0126 = 1 + i$$

$$i = 0,0126 \text{ am} \quad \text{ou} \quad i = 1,26\% \text{ am}$$

Exemplo 6.3: corrigir monetariamente \$ 1.500,00 de maio de 19X1 para março de 19X2.

Solução: o índice de correção monetária do período é:

$$I_{cm}(FEVX2/MAIX1) = \frac{146,40}{114,95} = 1,273597$$

O valor original deve ser corrigido por esse índice:

$$\text{Valor corrigido}(FEVX2) = 1.500,00 * 1,273597 = \$ 1.910,39$$

Em outras palavras, \$ 1.500,00 de maio de 19X1 é equivalente a \$ 1.910,39 de fevereiro de 19X2.

Índice de correção monetária como inflator e como deflator

Sempre que você se deparar com uma série temporal de valores financeiros, em regime inflacionário, terá a necessidade de reduzi-la a valores financeiros equivalentes para analisar a sua evolução real.

Considere a série temporal abaixo, correspondente ao faturamento da empresa Alfa:

Data	Receita de Alfa (\$)
JanX1	1.524.628,00
FevX1	1.556.700,00
MarX1	1.750.100,00
AbrX1	1.832.100,00
MaiX1	1.850.000,00

Para se conhecer a evolução real do faturamento de Alfa, números devem ser ajustados para refletir o mesmo poder de compra, levando em conta a inflação verificada no período. Os diversos valores são transformados para uma única data de

referência utilizando-se os índices de inflação ou de correção monetária.

Os procedimentos padrões para fazer esse ajustamento são:

converter os valores das receitas de Alfa para valores de janeiro/X1 deflacionando os valores mais recentes. Isto corresponde a utilizar o índice de correção monetária como deflator.

Data	(A) Receita nominal (\$)	NI_i	(B) Deflator (NI_{jan}/NI_i)	(C) Receita deflacionada (p/ Jan/X1)
Jan X1	1.524.628	108,90	1	1.524.628
Fev X1	1.556.700	110,04	0,98964	1.540.572
Mar X1	1.750.100	111,69	0,97502	1.706.382
Abr X1	1.832.100	113,10	0,96286	1.764.055
Mai X1	1.850.000	114,95	0,94736	1.752.616

Obs.: (a) $C = A \cdot B$; (b) foram ignoradas as casas decimais.

Observar que a coluna C deste Quadro nos dá as receitas em valores monetários de janeiro de 19X1.

converter os valores das receitas da Empresa Alfa para valores de maio/X1 inflacionando os valores para a data mais recente. Isto significa utilizar o índice de correção monetária como **inflator**.

Data	(A) Receita nominal (\$)	NI_i	(B) Inflator	(C) Receita inflacionada
Jan X1	1.524.628	108,90	1,05555	1.609.321
Fev X1	1.556.700	110,04	1,04462	1.626.159
Mar X1	1.750.100	111,69	1,02918	1.801.167
Abr X1	1.832.100	113,10	1,01635	1.862.054
Mai X1	1.850.000	114,95	1	1.850.000

Obs: $C = A \cdot B$

Observar que a coluna C deste Quadro nos dá as receitas em valores monetários de maio de 19X1.

A título de exemplo, a taxa de crescimento real do faturamento da Empresa Alfa, entre janeiro e maio de 19X1, será:

por (a) :

$$Y = \frac{1.752.616 - 1.524.628}{1.524.628} * 100 = 14,95\%$$

por (b):

$$Y = \frac{1.850.000 - 1.609.321}{1.609.321} * 100 = 14,95\%$$

ou seja, qualquer dos métodos conduz à mesma conclusão.

Financiamentos com correção monetária

Financiamento com correção pré-fixada

Neste método a taxa de juros do financiamento é aumentada de modo a conter uma componente que reflita a inflação futura *estimada*. Portanto, a taxa de juros praticada contém duas componentes que obedecem à fórmula 6.3

$$(1 + i) = (1 + i_r) * (1 + i_{cm}) = (1 + i_r) * I_{cm}$$

onde:

i = taxa de juros pré-fixada;

i_r = taxa de juros real (c/ moeda constante);

i_{cm} = taxa de correção monetária média prevista; e

I_{cm} = índice de correção monetária médio previsto.

Na prática, tudo se passa como nos modelos de financiamento já vistos para moeda estável, apenas com a utilização de taxas de juros majoradas devido a componente inflacionária.

Atividades de aprendizagem

1. Para taxas de inflação de 5%, 10% e 15% quais as taxas aparentes que um banco deveria praticar para ter um ganho real de 10%? R: 15,5%, 21%, 26,5%.
2. Um banco opera com taxa de juros aparente de 45%. Sabendo que a inflação foi 15%, qual a taxa real de juros cobrada? R: 26,08%.

Financiamento com correção pós-fixada

Neste caso, a taxa de juros do financiamento é mantida em níveis reais e o principal é corrigido monetariamente ao longo do período de empréstimo de modo a preservar o seu poder aquisitivo.

A correção monetária para estes financiamentos se processa pela seguinte forma: os valores monetários são calculados pela taxa de juros real. Quando do efetivo pagamento as prestações, saldos devedores e juros são corrigidos monetariamente para a data do pagamento, de acordo com o índice de correção monetária adotado.

Aplicação: correção monetária em financiamentos

Exemplo 6.4: correção monetária pré-fixada. Considere um empréstimo concedido a uma taxa real de juros de 12% aa para ser pago em 12 parcelas iguais postecipadas. Considerando uma inflação média de 35% aa, a taxa de juros do empréstimo será a seguinte:

$$(1+i) = (1+i_r) * (1+i_{cm}) = (1+0,12) * (1+0,35)$$

$$(1+i) = 1,12 * 1,35 = 1,512$$

$i = 0,512$ aa ou 51,2% aa

e todos os cálculos do modelo de financiamento serão feitos com esta taxa de juros.

Exemplo 6.5: correção monetária pós-fixada. Você tomou um financiamento de Cr\$ 10.000,00 em julho de 19X1 para pagamento em quatro parcelas postecipadas, mensais sucessivas e constantes a uma taxa de juros real de 1% am. Determine o quadro de amortização real e corrija os valores dos pagamentos de acordo com os índices de inflação da tabela 7.

A solução – já vista em sistemas de amortização – é apresentada abaixo para a taxa de juros real de 1% am.

$$PMT = PV \cdot S_{[i\%,n]}^{-1} = 10.000 \cdot 0,256281 = 2.562,81$$

O valor 0,256281 vem de tabelas financeiras para o par [1%;4].

Data	Período	PMT	J	A	SD _i	SD _t
Jul X1	0	-	-	-	10.000,00	10.100,00
Ago X1	1	2.562,81	100	2.462,81	10.000,00	7.537,19
Set X1	2	2.562,81	75,37	2.487,44	7.537,19	5.049,75
Out X1	3	2.562,81	50,49	2.512,32	5.049,75	2.537,43
Nov X1	4	2.562,81	25,37	2.537,44	2.878,74	-0,01

Retomando a tabela 8, pode-se determinar o índice de correção monetária para cada mês, tomando julho como base.

Mês	NI	$I_{i,jul} = NI_i / NI_{jul}$
Jul	102,39	1,00000
Ago	103,30	1,00889
Set	104,17	1,01738
Out	105,18	1,02725
Nov	105,90	1,03428
Dez	106,80	1,04307

Os valores calculados acima para os meses de agosto, setembro, outubro e novembro seriam multiplicados pelos índices de correção correspondentes para efeito de pagamento. Assim, o pagamento da prestação de outubro seria de:

$$\text{PMT}_{\text{out}} = 2.562,81 \cdot 1,02725 = 2.632,65$$

E o saldo devedor corrigido após esse pagamento seria de:

$$\text{SD}_{\text{out}} = 5049,75 \cdot 1,02725 = 5.187,35$$

Este é o processo de correção monetária pós-fixada aplicado quando não se quer arriscar uma estimativa de projeção de inflação. A correção é feita pela inflação que efetivamente ocorrer.

A seguir de mostra o valor dos pagamentos corrigidos.

Mês	NI	$I_{i,jul} = NI_i / NI_{jul}$	PMT	PMTcor.
Jul	102,39	1		
Ago	103,3	1,00889	2.562,81	2.585,59
Set	104,17	1,01738	2.562,81	2.607,35
Out	105,18	1,02725	2.562,81	2.632,65
Nov	105,9	1,03428	2.562,81	2.650,66

Atividades de aprendizagem

- Em um ano no qual a inflação foi 25% uma aplicação de \$ 10.000,00 lhe rendeu \$ 3.200,00. Qual foi o seu ganho real descontada a inflação? \$ 700,00 ou 5,6% aa.
- Considere a venda de um ativo qualquer por um preço a vista de \$ 10.000,00. O cliente aceita uma proposta de pagar uma entrada de \$ 5.000 e o restante depois de 6 meses com uma taxa

de juros real de 2% am. Considerando um inflação média do período de 9% qual será o valor desse pagamento? R: 6.157,38.

5. Você comprou um título com valor nominal de % 50.000,00 e vencimento em 12 meses por \$ 37.037,03. Cinco meses depois você foi ao mercado financeiro e vendeu esse título por \$ 41.000,00. A inflação nesse período de cinco meses foi de 10%. Quanto você ganhou e qual foi a taxa de juros auferida? R: \$ 259,26, $i = 0,63\%$.

6. Você comprou um eletrodoméstico por \$ 5.000,00 comprometendo-se com 12 pagamentos mensais postecipados de \$ 472,79. A inflação do período foi de 12%. Qual a taxa de juros real desse financiamento? R: 14,46 % aa.

7. Dado o quadro de receitas abaixo efetue uma avaliação do crescimento da mesma no período. Use a tabela 8.

Mês	Receita
Ago X0	1.000.000,00
Set X0	1.150.000,00
Out X0	1.080.000,00
Nov X0	1.120.000,00
Dez X0	1.100.000,00
Jan X1	1.050.000,00

Resumo

Esta unidade levou você a tomar conhecimento do fenômeno da inflação, dos índices de preço e índices de inflação e a aplicar esses conceitos para corrigir os valores financeiros e eliminar os efeitos da inflação nos mesmos. Também foram vistos, os conceitos de taxa de juros real e aparente e alguns modelos de

correção monetária pré-fixadas e pós-fixadas de valores monetários, com o uso de índices de correção monetária.

Chegamos ao final da nossa última unidade! Você cumpriu todas as atividades da mesma? Entendeu todas as questões? Caso ainda tenha algumas dúvidas retorne ao texto, consulte o professor tutor, esclareça-as. Se sua resposta for positiva nossos cumprimentos efusivos pois você chegou ao final do nosso curso! Você percorreu um caminho árduo até aqui e merece nossos cumprimentos.

Bibliografia

Assaf Neto, A., *Matemática financeira e suas aplicações*, 9ª ed., Ed. Atlas, SP, 2006, 454 pp.

De Francisco, W., *Matemática financeira*, 7ª ed., Ed. Atlas, SP, 1994, 319 pp.

Faro, C., *Fundamentos de matemática financeira*, 1ª ed., Ed. Atlas, SP, 2006.

Sobrinho, J. D. V., *Matemática financeira*, 7ª ed., Ed. Atlas, 2000, 410 pp..

Mathias, W. F. & Gomes, J. M., *Matemática financeira: com + de 600 exercícios resolvidos e propostos*, 4ª ed., Ed. Atlas, SP, 2004, 460 pp..

Puccini, A. L., *Matemática financeira objetiva e aplicada*, 7ª ed., Ed. Atlas, SP, 2006, 432 pp..



Ernesto Coutinho Puccini é engenheiro metalurgista (EPUSP/SP - 1964), especialista em metalurgia nuclear (EPUSP/SP- IEA/SP - 1965), especialista em matemática (UFMS - 1985) e mestre em Gestão da Produção Agroindustrial (UNIDERP/MS - 2004). É Professor da UFMS desde 1968 e, desde 1980, responsável por disciplinas ligadas à área de finanças empresariais.