

CÁLCULO FINANCEIRO

6. RENDAS

TÓPICOS

☐ **RENDAS TEMPORÁRIAS**

☒ **RENDAS TEMPORÁRIAS DE TERMOS CONSTANTES**

- ☐ **TEMPORÁRIAS IMEDIATAS**
- ☐ **TEMPORÁRIAS DIFERIDAS**

☒ **RENDAS TEMPORÁRIAS DE TERMOS VARIÁVEIS**

- ☐ **TEMPORÁRIAS IMEDIATAS**
- ☐ **TEMPORÁRIAS DIFERIDAS**

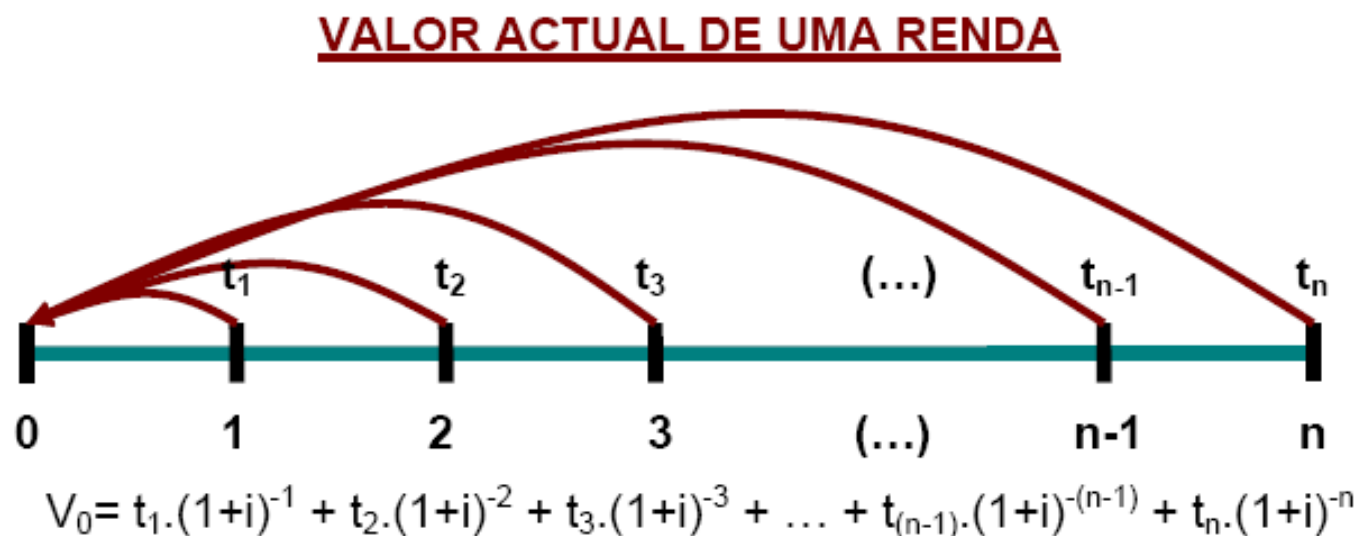
☐ **RENDAS PERPÉTUAS**

Rendas Temporárias

- O **cálculo de uma renda** é, regra geral, feito para um de dois momentos de tempo:
 - Valor Actual da Renda, $R(0)$, que corresponde ao somatório do valor dos seus termos no momento actual (**momento 0**)
 - Teremos que descontar todos os seus termos para o momento 0
 - Valor Acumulado da Renda, $R(w+n)$, que corresponde ao somatório do valor dos seus termos no fim do último período da renda (**momento $w+n$**)
 - Teremos que capitalizar todos os seus termos para o momento $w+n$

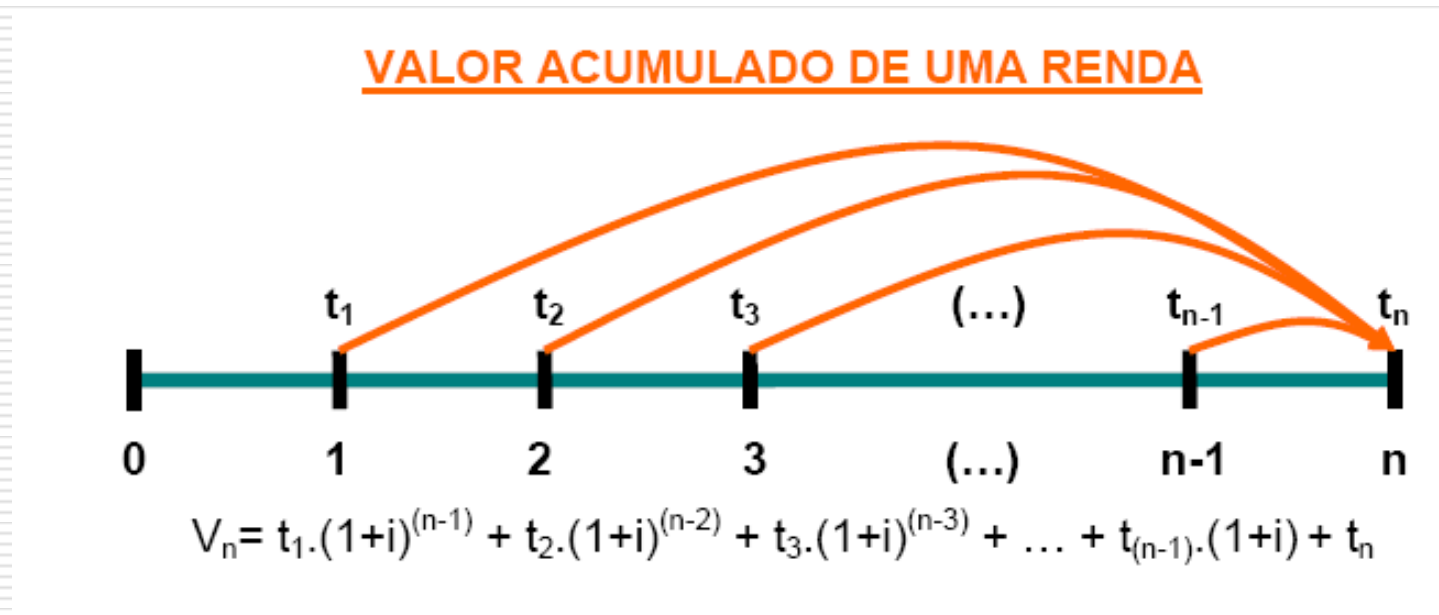
Rendas Temporárias

□ Generalizando teremos:



Rendas Temporárias

□ Generalizando teremos:

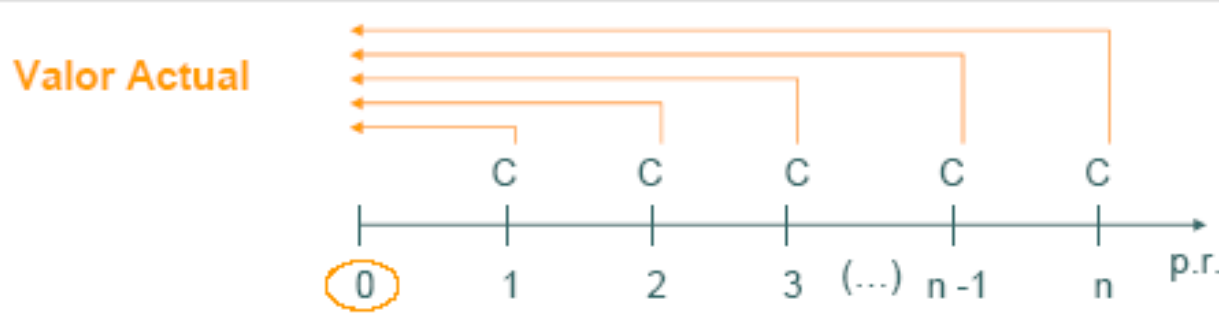


■ Nota: Sendo n o momento em ocorre o último termo

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Postecipada

■ VALOR ACTUAL



□ $R(0) = C \cdot (1+i)^{-1} + C \cdot (1+i)^{-2} + C \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C \cdot (1+i)^{-(n-1)} + C \cdot (1+i)^{-n}$

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Postecipada (cont.)

■ Assim temos

$$□ \quad R(0) = C \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}]$$

Progressão geométrica de razão $(1+i)^{-1}$

$$□ \quad R(0) = C \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$



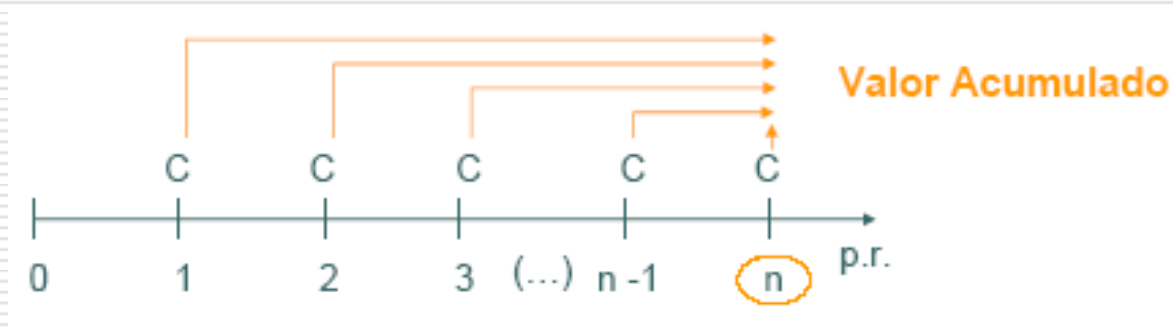
$$R(0) = C \cdot a \overline{n|i}$$

Valor Actual de uma renda temporária de termos constante, imediata e postecipada.

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Postecipada

■ VALOR ACUMULADO



$$□ \quad R(n) = C \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1]$$

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Postecipada (cont.)

■ Assim temos

$$□ \quad R(n) = C \cdot \underline{[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1]}$$

Progressão geométrica de razão $(1+i)^{-1}$

$$□ \quad R(n) = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R(n) = C \cdot s_{n/i}}$$

Valor Acumulado de uma renda de termos constantes, temporária imediata e postecipada.

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Postecipada (cont.)

■ Valor Actual vs. Valor Acumulado

$$□ R(n) = R(0) \cdot (1+i)^n$$

sendo

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n$$

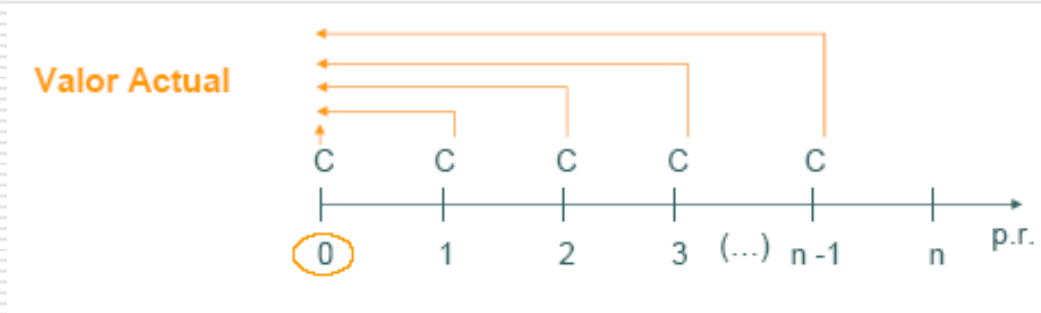
$$□ R(0) = R(n) \cdot (1+i)^{-n}$$

$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-n}$$

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Antecipada

■ VALOR ACTUAL



$$□ \quad \ddot{R}(0) = C + C \cdot (1+i)^{-1} + C \cdot (1+i)^{-2} + C \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C \cdot (1+i)^{-(n-1)}$$

$$□ \quad \ddot{R}(0) = C \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}] \cdot (1+i)$$

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Antecipada (cont.)

■ Assim temos

$$□ \quad \ddot{R}(0) = C \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}] \cdot (1+i)$$

Progressão geométrica de razão $(1+i)^{-1}$

$$□ \quad \ddot{R}(0) = C \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i) \quad \rightarrow \quad \ddot{R}(0) = R(0) \cdot (1+i)$$

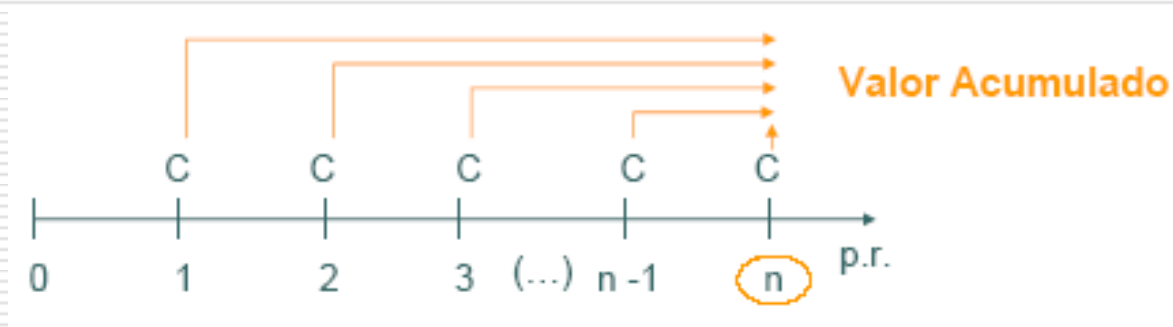
$$\bar{R}(0) = C \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Valor Actual de uma renda antecipada é igual ao valor de uma renda postecipada capitalizada um período.

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Antecipada

■ VALOR ACUMULADO



$$□ \quad \ddot{R}(n) = C \cdot (1+i)^{-n} + C \cdot (1+i)^{n-1} + C \cdot (1+i)^{n-2} + C \cdot (1+i)^{n-3} + \dots + C \cdot (1+i)$$

$$□ \quad \ddot{R}(n) = C \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-4} + \dots + 1] \cdot (1+i)$$

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Antecipada (cont.)

■ Assim temos

$$□ \quad \ddot{R}(n) = C \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-4} + \dots + 1] \cdot (1+i)$$

Progressão geométrica de razão $(1+i)^{-1}$

$$□ \quad \ddot{R}(n) = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \quad \Rightarrow \quad \ddot{R}(n) = R(n) \cdot (1+i)$$

$$\bar{R}(n) = C \cdot s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Valor Acumulado de uma renda antecipada é igual ao valor de uma renda postecipada capitalizada um período.

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Imediata e Antecipada (cont.)

■ Valor Actual vs. Valor Acumulado

$$\square \quad \ddot{R}(n) = \ddot{R}(0) \cdot (1+i)^n$$

sendo

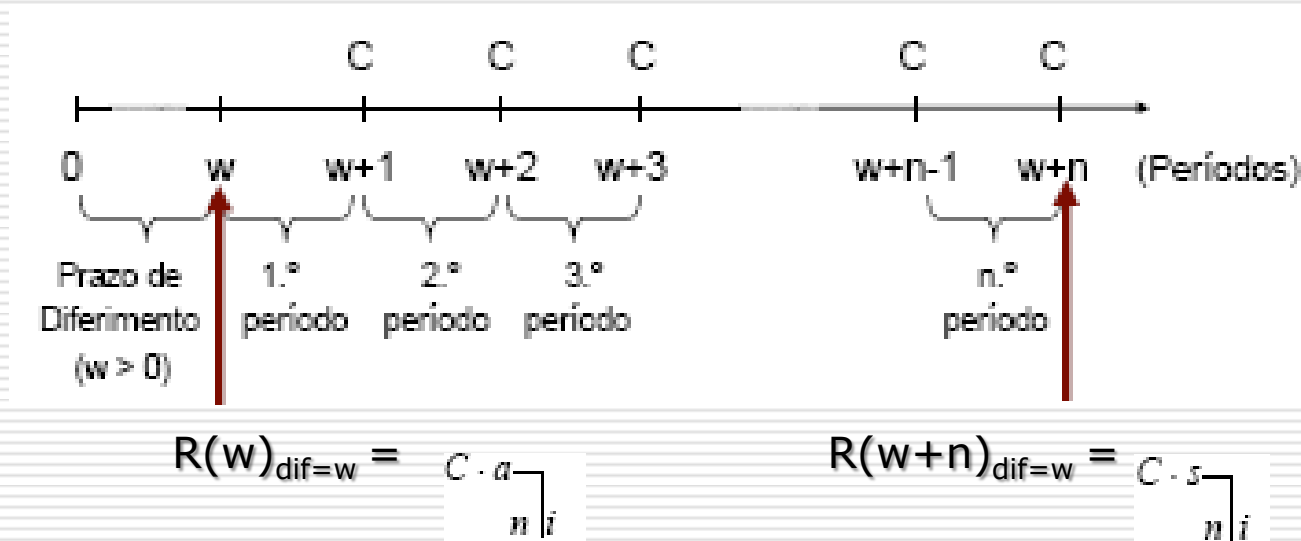
$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n$$

$$\square \quad \ddot{R}(0) = \ddot{R}(n) \cdot (1+i)^{-n}$$

$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-n}$$

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Diferida e Postecipada ($w > 0$)



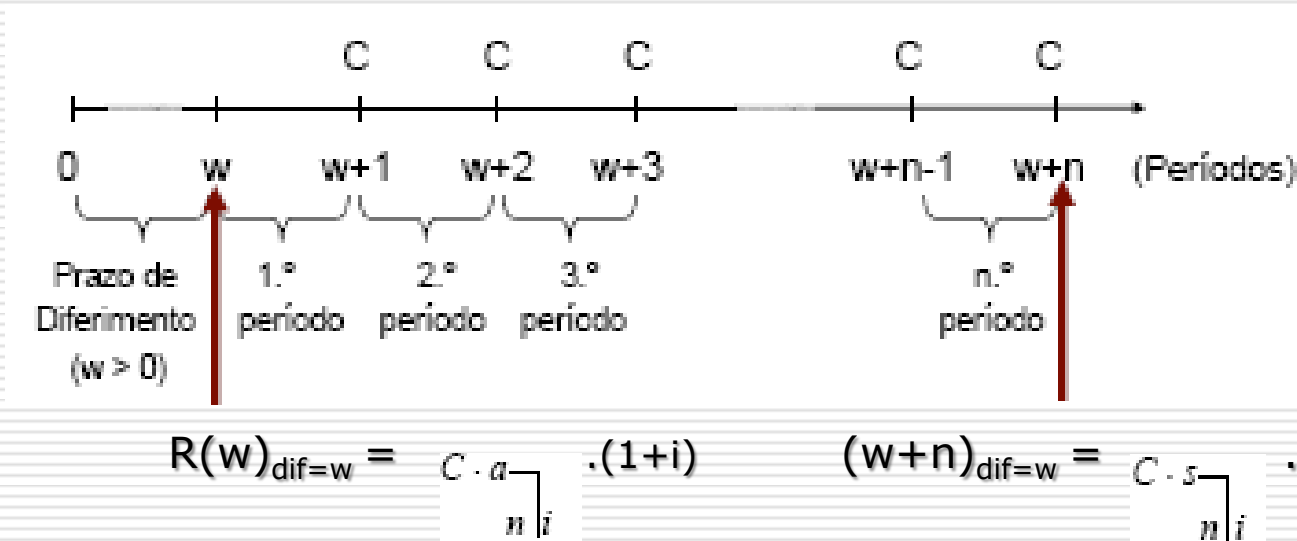
- Deste modo valor actual (momento 0) será igual a $R(w)$ descontado de w períodos

$$R(0)_{\text{dif}=w} = (1+i)^{-w} \cdot C \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Valor Actual de renda de termos constantes, postecipada e diferida de w

Rendas Temporárias Termos Constantes

□ Diferida e Antecipada ($w > 0$)



- Deste modo valor actual (momento 0) será igual a $R(w)$ descontado de w períodos

$$\ddot{R}(0)_{\text{dif}=w} = (1+i)^{-w} \cdot C \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Valor Actual de renda de termos constantes, antecipada e diferida de w

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Podemos distinguir entre as Rendas Temporárias de Termos Variáveis as:
 - Rendas de Termos Variáveis Quaisquer;
 - Rendas de Termos Variáveis em Progressão Aritmética;
 - Rendas de Termos Variáveis em Progressão Geométrica.

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis Quaisquer

- A variação no valor dos termos não obedece a qualquer tipo de critérios.
- Para determinar o valor actual e valor acumulado é necessário, respectivamente, descontar ou capitalizar individualmente cada um dos termos.

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Aritmética

- Neste caso a diferença entre dois quaisquer termos consecutivos é dada por uma razão de progressão (r) constante:
- Qualquer termo pode ser obtido mediante a adição da razão de progressão (r) ao termo imediatamente anterior:

$$C_k = C_{k-1} + r$$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Aritmética

■ Exemplo:

□ C_1

□ $C_2 = C_1 + r$

□ $C_3 = C_2 + r = C_1 + 2 \cdot r$

□ ...

□ $C_n = C_{n-1} + r = C_1 + (n-1) \cdot r$

■ Deste modo o valor de qualquer termo é:

$$\mathbf{C_k = C_1 + (k-1) \cdot r}$$

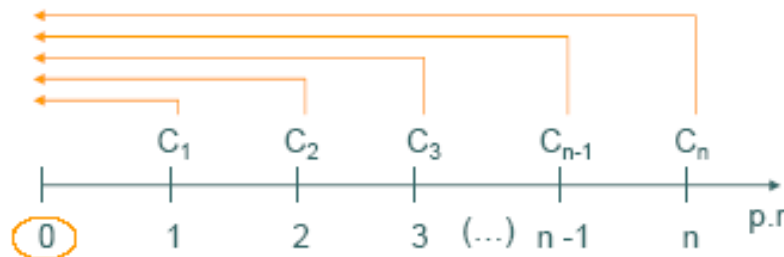
Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Aritmética

□ Imediata e Postecipada

■ VALOR ACTUAL

Valor Actual



□ $R(0)_{P.A.} = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_2 \cdot (1+i)^{-2} + C_3 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C_{n-1} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + C_n \cdot (1+i)^{-n}$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Aritmética
- Imediata e Postecipada (cont.)

Sabendo que:

- $R(0)_{P.A.} = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_2 \cdot (1+i)^{-2} + C_3 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C_{n-1} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + C_n \cdot (1+i)^{-n}$
- $C_k = C_1 + (k-1) \cdot r$

Temos:

$$\square R(0)_{P.A.} = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + (C_1+r) \cdot (1+i)^{-2} + (C_1+2r) \cdot (1+i)^{-3} + \dots \\ \dots + [C_1+(n-2)r] \cdot (1+i)^{-(n-1)} + [C_1+(n-1)r] \cdot (1+i)^{-n}$$

Simplificando

$$R(0) = \left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a \cdot (1+i)^{-n}}{i}$$

Valor Actual de uma renda de termos variáveis em progressão aritmética, postecipada e imediata.

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Aritmética

□ Imediata e Postecipada (cont.)

■ VALOR ACUMULADO

- Valor Acumulado é obtido capitalizando o valor actual n períodos

$$R(n) = R(0) \cdot (1+i)^n$$

$$R(n) = \left[\left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a \cdot (1+i)^{-n}}{i} \right] \cdot (1+i)^n$$

$$R(n) = \left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a}{i}$$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Aritmética

□ Imediata e Antecipada

■ VALOR ACTUAL E VALOR ACUMULADO

- Equivale a capitalizar um período as expressões obtidas com os termos imediatos e postecipados:

- $\ddot{R}(0) = R(0) \cdot (1+i)$

- $\ddot{R}(n) = R(n) \cdot (1+i)$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Aritmética
- Diferida e Postecipada

- VALOR ACTUAL

- No caso de haver diferimento, teremos que descontar w períodos à expressão obtida com os termos imediatos e postecipados:

- $R(0)_{\text{dif} = w} = R(0) \cdot (1+i)^{-w}$

- NOTA: As expressões do VALOR ACUMULADO não se alteram

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Aritmética
- Diferida e Antecipada

- VALOR ACTUAL

- No caso de haver diferimento, teremos que descontar w períodos à expressão obtida com os termos imediatos e antecipados:

- $R(0)_{\text{dif} = w} = R(0) \cdot (1+i)^{-w}$

- NOTA: As expressões do VALOR ACUMULADO não se alteram

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Geométrica

- Neste caso o rácio entre dois quaisquer termos consecutivos é dado por uma razão de progressão (r) constante:
 - Qualquer termo pode ser obtido mediante a multiplicação da razão de progressão (r) ao termo imediatamente anterior:

$$C_k = C_{k-1} \cdot r$$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Geométrica

■ Exemplo:

□ C_1

□ $C_2 = C_1 \cdot r$

□ $C_3 = C_2 \cdot r = C_1 \cdot r^2$

□ ...

□ $C_n = C_{n-1} \cdot r = C_1 \cdot r^{n-1}$

■ Deste modo o valor de qualquer termo é:

$$C_k = C_1 \cdot r^{k-1}$$

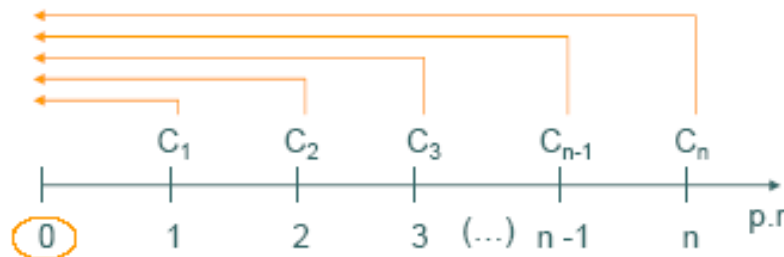
Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Geométrica

□ Imediata e Postecipada

■ VALOR ACTUAL

Valor Actual



$$\square \quad R(0)_{P.G.} = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_2 \cdot (1+i)^{-2} + C_3 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C_{n-1} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + C_n \cdot (1+i)^{-n}$$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Geométrica
- Imediata e Postecipada (cont.)

Sabendo que:

- $R(0)_{P.G.} = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_2 \cdot (1+i)^{-2} + C_3 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C_{n-1} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + C_n \cdot (1+i)^{-n}$
- $C_k = C_1 \cdot r^{k-1}$

Temos:

$$\square R(0)_{P.G.} = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + (C_1 \cdot r) \cdot (1+i)^{-2} + (C_1 \cdot r^2) \cdot (1+i)^{-3} + \dots + (C_1 \cdot r^{n-2}) \cdot (1+i)^{-(n-1)} + (C_1 \cdot r^{n-1}) \cdot (1+i)^{-n}$$

Simplificando

$$\square R(0)_{P.G.} = C_1 \cdot [(1+i)^{-1} + r \cdot (1+i)^{-2} + r^2 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + r^{n-2} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + r^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}]$$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Geométrica
- Imediata e Postecipada (cont.)

■ $R(0)_{P.G.} = C_1 \cdot [(1+i)^{-1} + r \cdot (1+i)^{-2} + r^2 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + r^{n-2} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + r^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}]$

Progressão geométrica de razão $r \cdot (1+i)^{-1}$

$$R(0)_{P.G.} = C_1 \cdot \frac{1 - r^n \cdot (1+i)^{-n}}{1 + i - r}$$

Valor Actual de uma renda temporária de termos variáveis em progressão geométrica, imediata e postecipada

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Geométrica

□ Imediata e Postecipada (cont.)

■ VALOR ACUMULADO

- Valor Acumulado é obtido capitalizando o valor actual n períodos

$$R(n) = R(0) \cdot (1+i)^n$$

$$R(n)_{P.G.} = C_1 \cdot \frac{1 - r^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-r} \cdot (1+i)^n$$

$$R(n)_{P.G.} = C_1 \cdot \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r}$$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

□ Termos Variáveis em Progressão Geométrica

□ Imediata e Antecipada

■ VALOR ACTUAL E VALOR ACUMULADO

- Equivale a capitalizar um período as expressões obtidas com os termos imediatos e postecipados:

- $\ddot{R}(0) = R(0) \cdot (1+i)$

- $\ddot{R}(n) = R(n) \cdot (1+i)$

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Geométrica
- Diferida e Postecipada

- VALOR ACTUAL

- No caso de haver diferimento, teremos que descontar w períodos à expressão obtida com os termos imediatos e postecipados:

- $R(0)_{\text{dif} = w} = R(0) \cdot (1+i)^{-w}$

- NOTA: As expressões do VALOR ACUMULADO não se alteram

Rendas Temporárias Termos Variáveis

- Termos Variáveis em Progressão Geométrica
- Diferida e Antecipada

- VALOR ACTUAL

- No caso de haver diferimento, teremos que descontar w períodos à expressão obtida com os termos imediatos e antecipados:

- $R(0)_{\text{dif} = w} = R(0) \cdot (1+i)^{-w}$

- NOTA: As expressões do VALOR ACUMULADO não se alteram

Rendas Perpétuas Termos Constantes

□ Rendas Perpétuas

- Possuem um número ilimitado de termos

$$n \rightarrow \infty$$

- Neste tipo de rendas é apenas relevante calcular o VALOR ACTUAL (momento 0) pois o VALOR ACUMULADO é infinito.

Rendas Perpétuas Termos Constantes

□ Rendas Perpétuas

- Para o cálculo do valor Actual de uma renda perpétua de termos constantes teremos em consideração $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/i$

- Assim temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1}{i}$$

Rendas Perpétuas Termos Constantes

□ Imediata e Postecipada

■ VALOR ACTUAL

□ Sabendo que $R(0) = C \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

□ Teremos então

$$R(0)_{\text{PERP}} = C \cdot (1/i)$$

Rendas Perpétuas Termos Constantes

□ Imediata e Antecipada

■ VALOR ACTUAL

- Equivale a capitalizar um período a expressões obtida com os termos imediatos e postecipados:

- $\ddot{R}(0)_{\text{PERP}} = R(0)_{\text{PERP}} \cdot (1+i) = [C \cdot (1/i)] \cdot (1+i)$

Rendas Perpétuas Termos Constantes

□ Diferida e Postecipada

■ VALOR ACTUAL

- No caso de haver diferimento, teremos que descontar w períodos à expressão obtida com os termos imediatos e postecipados:

- $R(0)_{\text{PERP}; \text{dif} = w} = R(0)_{\text{PERP}} \cdot (1+i)^{-w} = (1+i)^{-w} \cdot [C \cdot (1/i)]$

Rendas Perpétuas Termos Constantes

□ Diferida e Antecipada

■ VALOR ACTUAL

- No caso de haver diferimento, teremos que descontar w períodos à expressão obtida com os termos imediatos e antecipados:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \ddot{R}(0)_{\text{PERP}} ; \text{ dif} = w &= \ddot{R}(0)_{\text{PERP}} \cdot (1+i)^{-w} = [R(0)_{\text{PERP}} \cdot (1+i)] \cdot (1+i)^{-w} \\ &= (1+i)^{-w+1} \cdot [C \cdot (1/i)] \end{aligned}$$

Referências

- ❑ CADILHE, M. e SOARES, C., “Lições de Matemática Financeira e Noções Complementares”, 2.ª edição. Cap V
- ❑ QUELHAS, A. e CORREIA, F. (2004), “Manual de Matemática Financeira”, Almedina. Cap V