

Época Recurso ☐

Época Especial ☒

Exame Especial ☐

Duração: 2 h 00 m

Tolerância: 0 minutos

☐ Com Consulta

☒ Sem consulta

Docente: Ana Luísa Nunes / Mariana Carvalho

Data: 07 / 09 / 2007

Notas:

- Não é permitido o uso de calculadora gráfica.
- Leia com atenção as seguintes questões e apresente todos os cálculos e justificações convenientes.
- No final da prova deve numerar e indicar o número de folhas de exame que entrega. Deve entregar todas as folhas de rascunho que utilizou e o formulário.

[4,5V] 1. Considere a seguinte função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} a + \ln(x-1), & \text{se } x > 2 \\ e^{x-2}, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$ com $a \in \mathbb{R}$.

- Determine o valor de a de modo a que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.
- Para $a = 1$, verifique se f é diferenciável em $x = 2$.
- Para $a = 3$, pode garantir a existência de máximos e mínimos no intervalo $[-1, 4]$?
- Para $a = 0$, pode garantir a existência de um ponto $c \in]1, 2[$ tal que $f'(c) = e^{-0,6}$? Justifique.

[7,5V] 2. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

- Seja $g(x) = x + \ln(x-2)$, então o domínio desta função é $]-\infty, 2]$.
- A função $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4$ tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$.
- A recta $y = 5$ é assíntota da função $t(x) = \begin{cases} e^x + 5, & \text{se } x < 1 \\ x^4 + x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.
- Se $g(x) = x^3 - 3x + 2$ e h é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $h'(0) = 2$, então $(h \circ g)'(1) = -3$.
- Seja f uma função real injectiva tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 4$. Então $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{4}$.
- A recta tangente ao gráfico de $m(x) = e^{x^2 - 4x - 2}$ no ponto $x = 2$ é uma recta horizontal.
- A função $g(x) = x + \ln(x-2)$ é decrescente em todo o seu domínio.

- [3V] 3. Discuta o seguinte sistema de equações lineares em função dos parâmetros α e β :

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ \alpha z = 0 \\ -x - 5y - 5z = \beta \end{cases}$$

- [3V] 4. Calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$

b) $B = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 1 & e & 0 \\ e & 1 & e \end{bmatrix}.$

- [2V] 5. Considere o seguinte conjunto de vectores:

$$C = \{(3,0,1); (-2,0,3); (1,-1,1)\}.$$

Determine o espaço gerado por C .

Bom Trabalho!
Ana Luísa Nunes e Mariana Carvalho