



MATEMÁTICA I

CÁLCULO DIFERENCIAL

SETEMBRO DE 2006

Conteúdo

1	Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$	1
1.1	Recta tangente a uma curva num dos seus pontos	1
1.2	Derivada de uma função num ponto; derivadas laterais.	2
1.3	Derivabilidade e continuidade	8
1.4	Função derivada	10
1.5	Regras de derivação	11
1.6	Derivadas das funções circulares	20
1.7	Derivadas das funções trigonométricas inversas	24
1.8	Derivada da função exponencial e função logarítmica	29
1.9	Diferenciabilidade de uma função real de variável real	33
1.9.1	Função diferenciável num ponto	33
1.9.2	Aplicação dos diferenciais ao cálculo numérico	36
1.10	Derivadas e diferenciais sucessivas	38
1.11	Regra de Cauchy	40
1.12	Sentido de variação de uma função	42
1.13	Extremos relativos	44
1.13.1	Determinação dos extremos	46
1.14	Derivadas de funções dadas sob a forma paramétrica	51
1.14.1	Coordenadas paramétricas	51

1.14.2	Derivadas de funções sob a forma paramétrica	53
1.15	Fórmula de Taylor	55
1.16	Resolução de equações não lineares	58
1.16.1	Introdução	58
1.16.2	Método da bissecção	59
1.16.3	Método de Newton-Raphson	64
2	Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$	73
2.1	Funções de várias variáveis	73
2.2	Limites e Continuidade	77
2.3	Derivadas Parciais	79
2.3.1	Interpretação geométrica da derivada parcial	81
2.4	Derivadas Parciais de Ordem Superior à Primeira; Teorema de Schwarz . .	82
2.5	Derivada da Função Composta. Regra da Cadeia	84
	Bibliografia	87

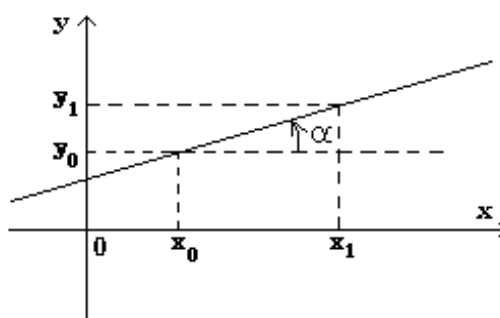
Capítulo 1

Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

1.1 Recta tangente a uma curva num dos seus pontos

Recorda-se que a inclinação de uma recta é o ângulo que a recta faz com o semi-eixo positivo dos xx . Assim o declive de uma recta que passa pelos pontos $M_0 = (x_0, y_0)$ e $M_1 = (x_1, y_1)$ é igual a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$



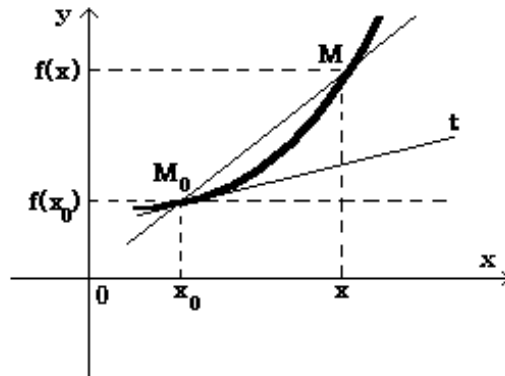
Exercício 1.1.1 1) *Determine o declive de uma recta:*

- a) *que passa pelos pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(2, -1)$;*
- b) *paralela ao vector $(-1, 3)$.*

2) *Considere a recta de equação $x = 1$. Qual a sua inclinação? E o seu declive?*

Considerem-se uma função f e $M_0 = (x_0, f(x_0))$ um ponto do seu gráfico.

Seja $M = (x, f(x))$ um qualquer ponto do gráfico distinto de M_0 .



A recta M_0M é secante à curva e tem por declive

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando M se move sobre a curva aproximando-se de M_0 , as sucessivas secantes M_0M aproximam-se cada vez mais da posição da recta t , chamada recta tangente ao gráfico da função f no ponto M_0 . Assim, a recta t é a recta que passa por M_0 e tem por declive

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

1.2 Derivada de uma função num ponto; derivadas laterais.

Vimos que o declive da recta tangente à curva de equação $y = f(x)$ no ponto $M_0 = (x_0, f(x_0))$ é igual a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Seja f uma função real, de variável real, definida em $]a, b[$. Diz-se que f é derivável em $x_0 \in]a, b[$ se existir e for finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

a que se chama derivada de f em x_0 .

Notação: Escrever-se-á $f'(x_0)$ para representar a derivada, caso exista, de f em x_0 .

Note-se que se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ for infinito, a função não é derivável em x_0 , não

existindo $f'(x_0)$. Tal corresponde a uma recta tangente à curva de f em x_0 paralela ao eixo dos yy .

$$\text{Vimos que } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Fazendo $x = x_0 + h$ vem $x - x_0 = h$, pelo que quando x tende para x_0 , h tende para 0. Tem-se então

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Nota 1.2.1 Uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ pode representar-se por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 1.2.2

1) Considere-se a função f real, de variável real, definida por $f(x) = x^2 - 1$.

verifique que esta função é derivável no ponto $x = 1$.

Resolução: Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Assim f é derivável em $x = 1$ e $f'(1) = 2$.

2) Seja f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = \frac{x}{x - 1}$. Mostre que f é

derivável no ponto $x_0 = 0$.

Resolução: De facto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{h-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-1} = -1.$$

Assim f é derivável em $x_0 = 0$ e $f'(0) = -1$.

3) Sejam f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 0$. Verifique se f é derivável no ponto x_0 .

Resolução: Tem-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

Assim f não é derivável em $x_0 = 0$.

Exercício 1.2.3

1. Utilize a definição para calcular a derivada das funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = x^3 - 3x$; $x_0 = 1$

b) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; $x_0 = 3$

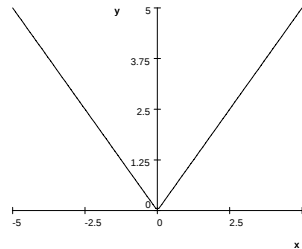
c) $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$; $x_0 = 0$

2. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ no ponto de abscissa $x = 4$.

3. Prove a partir da definição que sendo $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tem $f'(1) = n$.

Considere-se agora a função definida por $f(x) = |x|$. Tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Verifica-se que:

- Não existe recta tangente ao gráfico da função no ponto $(0, 0)$ mas existem a semi-tangente à esquerda e a semi-tangente à direita nesse ponto, no entanto com declives diferentes.
- Não existe o número $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ mas existem $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (é igual a 1) e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (é igual a -1). Diremos que a derivada lateral à direita em $x_0 = 0$ é igual a 1 e que a derivada lateral à esquerda em $x_0 = 0$ é igual a -1 .

Definição 1.2.4 *Seja f uma função real de variável real e $x_0 \in D_f$.*

Diz-se que f é derivável à esquerda de x_0 se existir o número real

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

a que se chama derivada lateral à esquerda de x_0 e se representa por $f'(x_0^-)$ ou $f_e(x_0)$.

Diz-se que f é derivável à direita de x_0 se existir o número real

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

a que chama derivada lateral à direita de x_0 e se representa por $f'(x_0^+)$ ou $f_d(x_0)$.

Obviamente a função f é derivável em $x_0 \in]a, b[\subset D_f$ se e só se existem e forem iguais $f'(x_0^-)$ e $f'(x_0^+)$. Neste caso

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+).$$

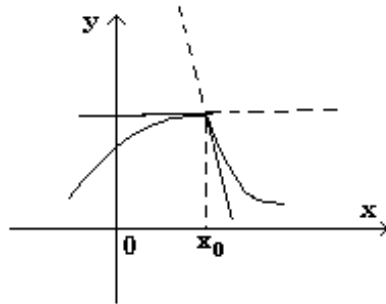
Observação 1.2.5 A partir da outra definição de derivada tem-se:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

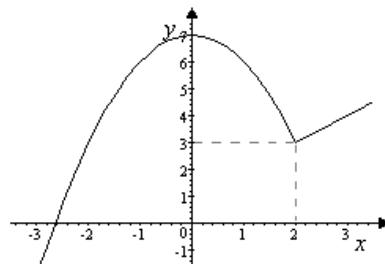
Geometricamente, a derivada à esquerda de x_0 representa o declive da semi-tangente à esquerda e a derivada à direita de x_0 representa o declive da semi-tangente à direita.



Exemplo 1.2.6 Considere-se a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 7 & \text{se } x < 2 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

representada na figura seguinte.



Tem-se :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 7 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2 - x) \\ &= -4.\end{aligned}$$

Portanto $f'(2^-) = -4$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim $f'(2^+) = 1$. Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ não existe $f'(2)$.

Exercício 1.2.7 Verifique gráfica e analiticamente que a função f , definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases},$$

não é derivável no ponto $x = 2$.

Exercício 1.2.8 Verifique gráfica e analiticamente que a função g , definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$$

é derivável para $x = 1$.

Há casos em que a existência da derivada num ponto depende apenas da existência de uma das derivadas laterais.

Por exemplo, seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

1.3 Derivabilidade e continuidade

Teorema 1.3.1 *Se uma função é derivável num ponto então é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Suponhamos que f é derivável em x_0 , isto é, existe e é finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0), x \neq x_0$$

vem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \times 0.$$

Como $f'(x_0)$ é um número real (finito), conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

isto é

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

o que prova que f é contínua em x_0 . ■

Exemplo 1.3.1 *Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = |x + 1|$.*

1. *Mostre que g é contínua em $x_0 = 1$.*

2. *Averigue se existe $g'(1)$.*

Resolução:

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x-1) = 0$$

Como $g(-1) = 0$ vem $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$ e portanto g é contínua em $x_0 = -1$.

$$2. \quad g'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1-0}{x+1} = 1$$

$$g'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x-1-0}{x+1} = -1$$

Como $g'(-1^+) \neq g'(-1^-)$ não existe $g'(-1)$.

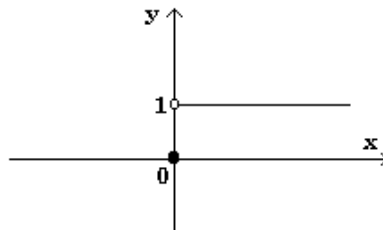
Verifica-se que o recíproco do teorema anterior é falso, isto é, o facto de uma função ser contínua num ponto não garante que seja derivável nesse ponto.

Note que o teorema anterior é falso se admitirmos que as derivadas podem tomar valores infinitos. Assim, a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua à direita no ponto 0 e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 0}{x} = +\infty.$$



Exercício 1.3.2

1. A função m está definida por $m(x) = \sqrt{x} + 5$.

(a) Aplicando a definição de derivada, calcule $m'(0)$.

(b) A função é contínua no ponto 0 ?

2. Considere a função real, de variável real, f definida por $f(x) = |x - 3|$.

(a) Mostre que f é contínua para $x = 3$.

(b) Calcule $f'(3^+)$ e $f'(3^-)$ para verificar que não existe $f'(3)$.

1.4 Função derivada

Definição 1.4.1 Seja f uma função real, de variável real. A função que a cada ponto do domínio faz corresponder a derivada de f em nesse ponto, caso exista, chama-se função derivada de f e representar-se-á por f' . Diremos que f é derivável num intervalo $I \subset D_f$ se for derivável em todos os pontos de I .

Exemplo 1.4.2 Determinar a função derivada da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x^2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Resolução:

- Determinação de $f'(x)$ para $x > 2$. Tem-se:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h+1 - x-1}{h} = 1.$$

- Determinação de $f'(x)$ para $x < 2$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = 6x.
 \end{aligned}$$

Determinação de $f'(x)$ para $x = 2$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 f'(2^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2+h+1-3}{h} = 1 \\
 f'(2^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(2+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{12 + 12h + 3h^2 - 3}{h} = -\infty
 \end{aligned}$$

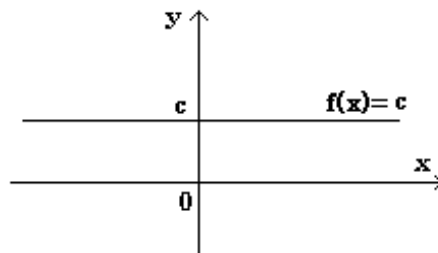
Não existe $f'(2)$ pelo que a função derivada é

$$\begin{aligned}
 f' : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 2 \\ 6x & \text{se } x < 2 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

1.5 Regras de derivação

a) Derivada de uma função constante

Se $f(x) = c$ (c constante) para todo o $x \in \mathbb{R}$ então $f'(x) = 0$.



Demonstração.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

■

Observação 1.5.1

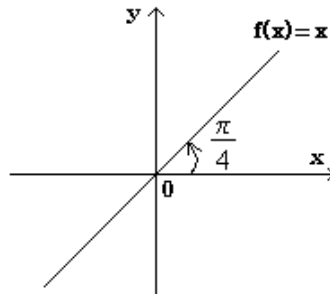
- A recta tangente em cada ponto coincide com a própria recta representativa da função.
- O declive de uma recta horizontal é igual a zero.

Exercício 1.5.2 Indique a derivada das funções definidas por:

(a) $r(x) = -4$; (b) $s(x) = \frac{5}{4}$; (c) $t(x) = \sqrt{2}$.

b) Derivada da função identidade

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$.



Demonstração. Tem-se:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1.$$

Assim, se $f(x) = x$ então $f'(x) = 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. ■

c) Derivada de uma soma de funções

Sejam f e g deriváveis num intervalo I e $x_0 \in I$. Então $f + g$ é derivável em x_0 e

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstração. Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Assim $f + g$ é derivável em x_0 e

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

■

Exercício 1.5.3 Determine a derivada de cada uma das funções definidas por:

$$(a) f(x) = x + 2; \quad (b) g(x) = \frac{3}{4} + x; \quad (c) h(x) = x - \sqrt{2}.$$

d) Derivada do produto de uma constante por uma função

Sejam f derivável num intervalo I , $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Então a função λf é derivável em x_0 e

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Demonstração. Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0).$$

Logo λf é derivável em x_0 e

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

■

Exercício 1.5.4 Calcule:

$$(a) (2x)'; \quad (b) \left(-\frac{1}{3}x\right)'; \quad (c) (3x + 5)';$$

$$(d) \left(3 - \frac{1}{3}x\right)'; \quad (e) (-3x)'.$$

e) Derivada de um produto de funções

Sejam f e g deriváveis num intervalo I e $x_0 \in I$. Então fg é derivável em I e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Demonstração. Tem-se:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

e somando e subtraindo $f(x_0)g(x)$ vem:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando $x \rightarrow x_0$, $g(x) \rightarrow g(x_0)$ pois g é contínua (é derivável em x_0), logo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Assim fg é derivável em x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

■

Nota 1.5.5 Esta propriedade verifica-se para um número n de funções deriváveis em I , isto é:

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)\dots f_n(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)\dots f_n(x_0) + f_1(x_0)f_2(x_0)\dots f_n'(x_0)$$

Exercício 1.5.6 Calcule a derivada da função definida por $f(x) = (x-1)(x-3)$.

Consequência: “ Derivada da potência de expoente natural ”

Sejam f derivável num intervalo I e $x_0 \in I$. Então $f^n, n \in \mathbb{N}$ é derivável em x_0 e

$$(f^n)'(x_0) = n f^{n-1}(x_0) f'(x_0).$$

Exercício 1.5.7 Calcule:

$$(a) (x^3)'; \quad (b) (3x^2 - 5x + 1)'; \quad (c) \left[(x+3)^5\right]'$$

f) Derivada de um quociente

Sejam f e g funções deriváveis num intervalo I e $x_0 \in I$.

Se $g(x_0) \neq 0$ e $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 , tem-se

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Demonstração. Vamos estudar em primeiro lugar a derivada de $\frac{1}{g}$.

Tem-se:

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Assim $\frac{1}{g}$ é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Então, atendendo ao que se disse para a derivada de um produto de funções, $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

■

Exercício 1.5.8 Calcule:

$$(a) \left(\frac{1}{x+3}\right)'; \quad (b) \left(\frac{3x+1}{x^2-8x}\right)'; \quad (c) \left(\frac{3x^2+4}{x^2+9}\right)'; \quad (d) \left[\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^3\right]'$$

Consequência: “Derivada de uma potência de expoente inteiro negativo”

Seja f derivável num intervalo I , $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in I$. Suponhamos que $f(x_0) \neq 0$. Então f^{-n} é derivável em x_0 e

$$(f^{-n})' = -nf^{-n-1}f'.$$

Exercício 1.5.9 *Demonstre o resultado anterior.*

Isto significa que a fórmula de derivação para uma potência de expoente natural é válida para expoentes inteiros no pressuposto de que $f(x_0) \neq 0$.

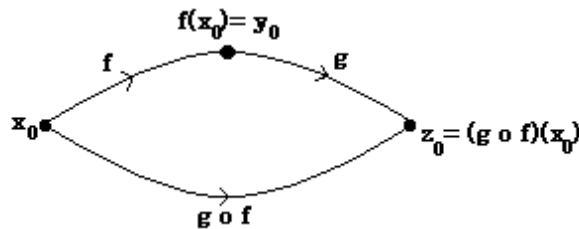
Exercício 1.5.10 *Mostre que :*

$$(a) (x^{-10})' = -\frac{10}{x^{11}}; \quad (b) [(x^2 - 3)^{-4}]' = -\frac{8x}{(x^2 - 3)^5}; \quad (c) \left[\left(\frac{x-1}{2-3x} \right)^{-3} \right]' = \frac{3(2-3x)^2}{(x-1)^4}.$$

g) Derivada da função composta

Seja f uma função definida sobre um intervalo I , g uma função definida sobre o intervalo J contendo $f(I)$, e $x_0 \in I$. Se f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é derivável em x_0 e tem-se

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] f'(x_0).$$



Demonstração.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{x - x_0}.$$

Represente-se $f(x)$ por y e $f(x_0)$ por y_0 . Então quando x tende para x_0 , y tende para y_0 uma vez que f é contínua em x_0 (por ser diferenciável) pelo que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \times \frac{y - y_0}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(y_0) f'(x_0) \\ &= g'[f(x_0)] f'(x_0). \end{aligned}$$

Logo $g \circ f$ é derivável em x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] f'(x_0).$$

■

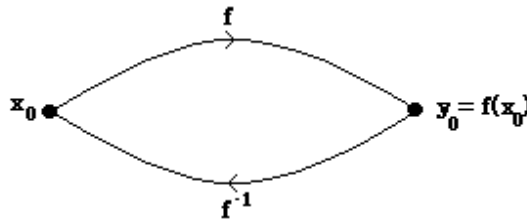
Exercício 1.5.11 Sendo $f(x) = 2x - 3$ e sabendo que $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$, calcule:

- (a) $(f \circ g)(1)$; (b) $(f \circ g)'(1)$.

h) Derivada da função inversa

Sejam f uma aplicação bijectiva de um intervalo I num intervalo J e $x_0 \in I$. Suponhamos que f é derivável em x_0 com $f'(x_0) \neq 0$ e que a sua inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ é contínua em $y_0 = f(x_0)$. Então f^{-1} é derivável em $f(x_0)$ e tem por derivada

$$(f^{-1})'[f(x_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}.$$



Demonstração. Seja $y = f(x)$. Por definição, vem:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{y - y_0}}.$$

Quando x tende para x_0 , y tende para y_0 pois f é contínua em x_0 (por ser derivável em x_0),

logo

$$f'(x_0) = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0}}.$$

Como $x = f^{-1}(y)$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$ vem

$$f'(x_0) = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)},$$

ou seja

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

Exercício 1.5.12 Sendo g uma função real de variável real invertível tal que $g(2) = 10$ e $g'(2) = 4$, calcule $(g^{-1})'(10)$.

Consequência: “ Derivada da raiz ”

Suponhamos que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ com $n \in \mathbb{N}$ e seja I um qualquer intervalo contido em D_f tal que $0 \notin I$. Então f é derivável em todo $x \in I$ e

$$f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Demonstração.

Se $y = x^n$ então $x = \sqrt[n]{y}$, pelo que se $g(x) = x^n$ então $g^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Tem-se $g'(x) = nx^{n-1}$, pelo que para todo x em I vem

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

onde $y = x^n$. Daqui resulta

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{n \sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

o que é equivalente a

$$f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

■

Exercício 1.5.13 Derive cada uma das funções definidas por:

$$(a) \ t(x) = \sqrt[3]{x} ; \qquad (b) \ u(x) = \sqrt[10]{x}.$$

Mais geralmente, como consequência do resultado sobre a derivada da função composta vem:

Seja f uma função real de variável real definida num intervalo I , derivável em $x_0 \in I$, e tal que $f(x_0) \neq 0$. Então $\sqrt[n]{f}$ é derivável em x_0 e

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{n \sqrt[n]{f^{n-1}}(x_0)}.$$

Exercício 1.5.14 Calcule $\left(\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}\right)'$ indicando o domínio de validade do resultado.

Observação 1.5.15 Tem-se $\sqrt[n]{f} = f^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$ pelo que podemos escrever

$$\left(f^{\frac{1}{n}}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{n (f^{n-1})^{\frac{1}{n}}(x_0)} = n f^{\frac{1}{n}-1}(x_0) f'(x_0),$$

e a fórmula de derivação de uma potência de expoente inteiro pode generalizar-se para um expoente racional nas condições acima indicadas.

Exercício 1.5.16 Determine $\left[(x^2 + 3x + 1)^{\frac{3}{4}}\right]'$.

1.6 Derivadas das funções circulares

a) Derivada da função seno

A função seno é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Demonstração. Atendendo a que

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \right].$$

Como a função co-seno é contínua, vem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \left[\cos \lim_{h \rightarrow 0} \left(x + \frac{h}{2}\right) \right] = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Assim a função seno é derivável e

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

■

Mais geralmente, sendo f derivável num intervalo I , resulta do que se disse sobre a derivada da função composta que a função $\operatorname{sen}(f)$ é derivável em todos os pontos de I , tendo-se:

$$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f.$$

Exemplo 1.6.1

(a) Sendo $y = \operatorname{sen}(2x+3)$, temos:

$$y' = (2x+3)' \cos(2x+3) = 2 \cos(2x+3).$$

(b) Seja $y = \sin^4(3x)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \sin^3(3x) [\sin(3x)]' \\ &= 4 \sin^3(3x) (3x)' \cos(3x) \\ &= 12 \sin^3(3x) \cos(3x). \end{aligned}$$

Exercício 1.6.2 Calcule a derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $y = \sin(2x + 1)$;

(b) $y = \sin^5(5x)$;

(c) $y = x \sin x^2 + 3 \sin(2x)$;

(d) $y = \sin^3(x^3)$.

b) Derivada da função co-seno

A função co-seno é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Atendendo a que $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, vem:

$$(\cos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Mais geralmente, sendo f derivável num intervalo I , $\cos f$ é derivável em todos os pontos de I e

$$(\cos f)' = -f' \sin f.$$

■

Exemplo 1.6.3

(a) $(x \cos x)' = (x)' \cos x + x (\cos x)' = \cos x - x \sin x$

(b)

$$\begin{aligned} [\cos(x^2 + 3) + \cos^5(2x)]' &= -(x^2 + 3)' \sin(x^2 + 3) + 5 \cos^4(2x) [\cos(2x)]' \\ &= -2x \sin(x^2 + 3) - 10 \cos^4(2x) \sin(2x). \end{aligned}$$

Exercício 1.6.4 Determine a derivada de cada uma das funções definidas por:

$$(a) y = \cos(3x^2 - x) - x;$$

$$(b) y = 2 \cos^3(1 - x);$$

$$(c) y = \cos x + x \cos^2(x^2);$$

$$(d) y = \operatorname{sen} x \cos x.$$

c) Derivada da função tangente

A função tangente é derivável no seu domínio, isto é, em

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

tendo-se

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x.$$

Demonstração.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Seja f uma função derivável em I tal que $f(I) \subset D$, então $\operatorname{tg} f$ é derivável em todos os pontos de I , tendo-se:

$$(\operatorname{tg} f)' = \frac{f'}{\cos^2 f} = f' \sec^2 f.$$

■

Exemplo 1.6.5

(a)

$$\begin{aligned} [\sqrt{x} \operatorname{tg}(2x+3)]' &= (\sqrt{x})' \operatorname{tg}(2x+3) + \sqrt{x} [\operatorname{tg}(2x+3)]' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}(2x+3) + \sqrt{x} \frac{2}{\cos^2(2x+3)} \\ &= \frac{\operatorname{tg}(2x+3)}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2(2x+3)} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} [\operatorname{tg}^3(\operatorname{sen} x + 1)]' &= 3 \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} x + 1) [\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x + 1)]' \\ &= 3 \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} x + 1) \cos x \sec^2(\operatorname{sen} x + 1) \end{aligned}$$

Exercício 1.6.6

1. Calcule a derivada de cada uma das funções definidas por:

$$(a) y = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x+3} \right);$$

$$(b) y = \operatorname{tg}^2 (x^2 + 1);$$

$$(c) y = \cos^2 x + \operatorname{tg} (x \operatorname{sen}^2 x);$$

$$(d) y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{tg} (\cos x).$$

2. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = 4 \operatorname{tg} (4x).$$

Em vários pontos do gráfico de f o declive da recta tangente é 16. Escreva uma equação de uma dessas tangentes.

d) Derivada da função co-tangente

A função co-tangente é derivável no seu domínio, isto é, em

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

tendo-se

$$(\cotg x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \cotg^2 x = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Demonstração.

Como $\cotg x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vem:

$$(\cotg x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)' = -\frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Mais geralmente, se f é uma função derivável num intervalo I tal que $f(I) \subset D$, então $\cotg f$ é derivável em todos os pontos de I , tendo-se:

$$(\cotg f)' = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} = -f' \operatorname{cosec}^2 f.$$

■

Exemplo 1.6.7

$$(a) \left[\cotg \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) \right]' = - \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right)' \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) = 3 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right).$$

$$\begin{aligned} (b) \quad (\operatorname{sen} x \cotg \sqrt{x})' &= (\operatorname{sen} x)' \cotg \sqrt{x} + \operatorname{sen} x (\cotg \sqrt{x})' \\ &= \cos x \cotg \sqrt{x} - \operatorname{sen} x \frac{1}{2\sqrt{x} \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}} \\ &= \cos x \cotg \sqrt{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x} \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Exercício 1.6.8 Derive cada uma das funções seguintes:

$$\begin{aligned} (a) \quad y &= \cotg (3x^3 + 2x); & (b) \quad y &= 1 + \cotg^2 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} \right); \\ (c) \quad y &= \operatorname{tg} (\operatorname{sen} x) + \cotg (\cos x); & (d) \quad y &= \cotg^2 x^2 + \operatorname{sen}^2 x^2. \end{aligned}$$

1.7 Derivadas das funções trigonométricas inversas

a) Derivada da função arco-seno

A função arco-seno é derivável em $] -1, 1[$ e para todo o $x \in] -1, 1[$, tem-se:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração.

Temos que

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ x &\rightarrow y = \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

é a função inversa de

$$\begin{aligned} g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] &\rightarrow [-1, 1] \\ y &\rightarrow x = \operatorname{sen} y \end{aligned}.$$

Como g é derivável em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ e

$$g'(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

resulta que h é derivável em todo o $x \in [-1, 1]$ com exceção de $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ e de $g(-\frac{\pi}{2}) = -1$, tendo-se:

$$h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y}.$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria, vem

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \iff \cos^2 y = 1 - x^2$$

e como $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vem $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$.

Consequentemente

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

■

Mais geralmente, se f é derivável em I com $f(I) \subset]-1, 1[$, $\arcsen f$ é derivável em todo os pontos de I e

$$(\arcsen f)' = \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}.$$

Exemplo 1.7.1

$$(a) (\arcsen (3x))' = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}};$$

$$(b) [\sin (3x) + \arcsen (2 \cos x)]' = 3 \cos (3x) - \frac{2 \sin x}{\sqrt{1 - 4 \cos^2 x}}.$$

Exercício 1.7.2 Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$1. y = \arcsen (x^2 + 1);$$

$$2. y = \sin x^2 + \arcsen x^2;$$

$$3. y = 2 + \arcsen^2 (\cos^2 x);$$

$$4. y = \arcsen \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

b) Derivada da função arco co-seno

A função arco-coseno é derivável em $] -1, 1[$ e para todo o $x \in] -1, 1[$, tem-se:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração.

Temos que

$$\begin{aligned} h : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\rightarrow y = \arccos x \end{aligned}$$

é a função inversa de

$$\begin{aligned} g : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ y &\rightarrow x = \cos y \end{aligned}.$$

Então h é derivável em todo o x tal que $g'(y) \neq 0$, sendo $y = h(x)$. Como

$$g'(y) = 0 \iff -\sin y = 0 \iff y = 0 \vee y = \pi,$$

vem que h é derivável em $[-1, 1]$ com exceção de $g(0) = 1$ e $g(\pi) = -1$. Além disso,

$$h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y}.$$

Atendendo à fórmula fundamental da trigonometria, $\sin^2 y = 1 - x^2$ e como $y \in [0, \pi]$, então $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$.

Daqui resulta que

$$h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Se f é derivável em I com $f(I) \subset] -1, 1[$, a função $\arccos f$ é derivável em todos os pontos de I e

$$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}.$$

Exemplo 1.7.3

$$(a) \left[(\arccos x)^2 \right]' = 2 \arccos x (\arccos x)' = -\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(b) \left[\operatorname{tg}(3x) \arccos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \right]' = 3 \sec^2(3x) \arccos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2}}.$$

Exercício 1.7.4 Determine a derivada das funções definidas por:

$$1. y = \frac{\arccos x}{x};$$

$$2. y = \operatorname{sen} x \arccos(2x);$$

$$3. y = \operatorname{cotg}(3x) \arccos x^2;$$

$$4. y = x^3 \arccos \sqrt{x^2 - 1}.$$

c) Derivada da função arco-tangente

A função arco tangente é derivável em $\mathbb{R}$, tendo-se:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração.

A função

$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \rightarrow & \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x & \rightarrow & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

é a função inversa de

$$\begin{array}{ccc} g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \rightarrow & x = \operatorname{tg} y \end{array}.$$

Sendo g derivável em $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ e $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, h é derivável em $\mathbb{R}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

■

Se f é derivável em I então $\operatorname{arctg} f$ é derivável em todo o ponto de I e

$$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}.$$

Exemplo 1.7.5 Determine a derivada da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

Resolução:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)'}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{(2x+1)^2}{3}} \\ &= \frac{2}{3 + (2x+1)^2} \end{aligned}$$

Exercício 1.7.6 Calcule a derivada de cada uma das funções definidas por:

1. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$;
2. $y = 1 + (\operatorname{arctg} x)^2$;
3. $y = x - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$;
4. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} (2 \operatorname{sen} x)$.

d) Derivada da função arco co-tangente

A função arco co-tangente é derivável em $\mathbb{R}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Demonstração.

A função

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{R} & \rightarrow]0, \pi[\\ x & \rightarrow y = \operatorname{arccotg} x \end{array}$$

é a função inversa de

$$\begin{array}{ll} g :]0, \pi[& \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \rightarrow x = \operatorname{cotg} y \end{array}.$$

Então h é derivável em $\mathbb{R}$ (justifique) e para todo $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{-1}{1 + \cotg^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

■

Se f for derivável em I então $\operatorname{arccotg} f$ é derivável em I e

$$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1 + f^2}.$$

Exercício 1.7.7 Determine a função derivada de cada uma das funções seguintes:

1. $y = x^2 + \operatorname{arccotg}(3x + 1);$
2. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{arccotg} x^2;$
3. $y = \sqrt{1 - \operatorname{arccotg} \sqrt{x}};$
4. $y = \operatorname{arctg} x \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x + 3}.$

1.8 Derivada da função exponencial e função logarítmica

a) Derivada da função exponencial de base e

A função exponencial de base e é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração.

Tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

■

Mais geralmente se f é derivável em I então e^f é derivável em I e

$$(e^f)' = e^f f'.$$

Exemplo 1.8.1 Determine a função derivada de cada uma das funções seguintes:

1. $y = e^{3x+1};$

2. $y = e^{\operatorname{sen}(3x)}.$

Resolução:

1. $(e^{3x+1})' = (3x+1)' e^{3x+1} = 3 e^{3x+1}.$

2. $(e^{\operatorname{sen}(3x)})' = [\operatorname{sen}(3x)]' e^{\operatorname{sen}(3x)} = 3 \cos(3x) e^{\operatorname{sen}(3x)}$

Exercício 1.8.2

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = e^{2x+5}$. Escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

2. Calcule a derivada de cada uma das funções definidas por:

(a) $y = e^{-\frac{x}{2}};$

(b) $y = (x-1)^2 - e^{-x};$

(c) $y = e^{\operatorname{arc\,sen} x};$

(d) $y = e^x \operatorname{sen} x + e^{\frac{1}{x}}.$

b) Derivada da função exponencial de base a

A função exponencial de base a ($a > 0$) é derivável em $\mathbb{R}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Demonstração. Uma vez que $a^x = e^{x \ln a}$ vem

$$(a^x)' = (x \ln a)' e^{x \ln a} = \ln a e^{x \ln a} = \ln a a^x.$$

■

Mais geralmente se f é derivável em I , a^f é derivável em I e

$$(a^f)' = a^f f' \ln a.$$

Exemplo 1.8.3 Determine a função derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) 2^{x^2+3x} ;

(b) $\arccos(3^x)$.

Resolução:

(a) $\left(2^{x^2+3x}\right)' = (x^2 + 3x)' 2^{x^2+3x} \ln 2 = (2x + 3) 2^{x^2+3x} \ln 2.$

(b) $[\arccos(3^x)]' = \frac{(3^x)'}{\sqrt{1-3^{2x}}} = \frac{3^x \ln 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}.$

Exercício 1.8.4

1. A recta da equação $y = 2x \ln 2 + 1$ é tangente ao gráfico da função real de variável real definida por

$$t(x) = 2^{2x}.$$

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

2. Derive as funções definidas por:

(a) $y = 2^{\lg x}$;

(b) $y = \frac{1-3^x}{\cos x}$;

(c) $y = e^{\sqrt{3x}} + 5^{\cos x}$;

(d) $y = \operatorname{arctg}(\sin 7^x).$

c) Derivada da função logarítmica de base a

A função logarítmica de base a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) é derivável em $\mathbb{R}^+$ e

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. A função

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = \log_a x \end{aligned}$$

é a função inversa da função

$$\begin{array}{ll} g : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y & \rightarrow x = a^y \end{array} .$$

Então h é derivável em $\mathbb{R}^+$ e para todo o $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

■

Se f é derivável em I e $f(I) \subset \mathbb{R}^+$ então $\log_a f$ é derivável em I , tendo-se:

$$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a}.$$

Exemplo 1.8.5 $[\log_2 (3x + 1)]' = \frac{(3x + 1)'}{(3x + 1) \ln 2} = \frac{3}{(3x + 1) \ln 2}.$

Caso particular: Se $a = e$ (número de Neper) vem

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad (\ln f)' = \frac{f'}{f}.$$

Exercício 1.8.6 Calcule a derivada de cada uma das funções definidas por:

(a) $y = \log_3 (x^2 + 1);$

(b) $y = \log_5 (\operatorname{arctg} x);$

(c) $y = \log_2 [\operatorname{tg} (e^x + x)];$

(d) $y = \log_7 (\operatorname{sen} x^2);$

(e) $y = \ln (x^2 + 1);$

(f) $y = \ln (e^{3x} + x^2);$

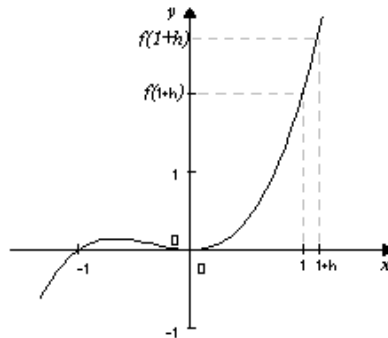
(g) $y = \cos [\ln (\operatorname{arctg} x)];$

(h) $y = \ln (\operatorname{sen} x).$

1.9 Diferenciabilidade de uma função real de variável real

1.9.1 Função diferenciável num ponto

Considere-se a função f real de variável real definida por $f(x) = x^3 + x^2$.



Propomo-nos calcular um valor aproximado de $f(1,017)$, sem calcular $(1,017)^3$ nem $(1,017)^2$. Para tal tome-se $x = 1 + h$.

Para todo o número real h temos:

$$f(1+h) = (1+h)^3 + (1+h)^2 = 2 + 5h + 4h^2 + h^3,$$

e para h “pequeno”, podemos desprezar $4h^2$ e h^3 , pelo que

$$f(1+h) \simeq 2 + 5h.$$

Portanto,

$$f(1,017) \simeq 2 + 5 \times 0,017$$

e

$$f(1,017) \simeq 2,085.$$

Podemos escrever:

$$f(1+h) = 2 + 5h + (4h + h^2)h$$

e como $f(1) = 2$, vem

$$f(1+h) = f(1) + 5h + \varepsilon(h) \quad h$$

sendo $\varepsilon(h) = 4h + h^2$.

Observe-se que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Diz-se que f é diferenciável em $x_0 = 1$.

Definição 1.9.1 Diz-se que uma função f definida numa vizinhança V de um ponto x_0 , é diferenciável em x_0 , se existirem um número real α e uma função ε , definida para $h \neq 0$ por

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + \varepsilon(h) \quad h \quad (1.1)$$

com $x_0 + h \in V$, tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

O número real h , acréscimo da variável x costuma representar-se por Δx . O acréscimo correspondente da função no ponto x_0 , $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ representa-se por $\Delta f(x_0)$ ou $\Delta y(x_0)$.

Assim (1.1) pode escrever-se

$$\Delta f(x_0) = \alpha \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x.$$

Teorema 1.9.1 Uma função f é diferenciável num ponto x_0 se e só se for derivável em x_0 .

Demonstração. Suponhamos que f é diferenciável em x_0 . Então por (1.1) pode escrever-se

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha + \varepsilon(h) \quad (\text{note que } h \neq 0)$$

e passando ao limite quando $h \rightarrow 0$ vem

$$f'(x_0) = \alpha.$$

Quer dizer, f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = \alpha$.

Reciprocamente, suponhamos que f é derivável em x_0 . Então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

pelo que podemos definir $\varepsilon(h)$ tal que:

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), \quad h \neq 0.$$

Podemos então escrever

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + \varepsilon(h) h$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

■

Resulta do teorema anterior que se f é diferenciável em x_0 então (1.1) pode escrever-se

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x$$

com $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Ou seja

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + \varepsilon(\Delta x) \Delta x$$

onde

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \Delta x.$$

Definição 1.9.2 *Seja f diferenciável (ou derivável) em x . Chama-se aplicação diferencial de f no ponto x à aplicação*

$$\begin{aligned} df_x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta x &\rightarrow df_x(\Delta x) = f'(x) \Delta x. \end{aligned}$$

Quando não há perigo de confusão, escreve-se df ou dy em vez de df_x .

Chamaremos *diferencial* de f no ponto x com acréscimo Δx ao número real $df_x(\Delta x)$, também representado abusivamente por df ou dy quando não houver confusão. Assim escreveremos

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (1.2)$$

entendendo-se que dy é o diferencial de f no ponto x com acréscimo Δx .

Nota 1.9.3 Se f for a função identidade, uma vez que

$$y = f(x) = x, \quad f'(x) = 1,$$

escreve-se por (1.2)

$$dx = \Delta x,$$

pelo que daqui em diante representaremos o acréscimo da variável x por dx em vez de Δx .

Podemos assim escrever (1.2) na forma

$$dy = f'(x)dx$$

ou seja

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

(Notação de Leibniz para a derivada de f em x)

1.9.2 Aplicação dos diferenciais ao cálculo numérico

Suponhamos que f é diferenciável em x . Então existem $f'(x)$ e uma função ε tal que para $dx \neq 0$,

$$f(x + dx) = f(x) + dy + \varepsilon(dx) \quad dx$$

com

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \varepsilon(dx) = 0.$$

Resulta que $f(x) + dy$ é um valor aproximado de $f(x + dx)$ a menos de $\varepsilon(dx) dx$. Para valores pequenos de dx , o erro $\varepsilon(dx) dx$ (diferença entre o valor exacto e o aproximado) pode desprezar-se podendo escrever-se

$$f(x + dx) \simeq f(x) + dy.$$

Representando por Δy ou Δf o acréscimo da função f no ponto x , quando x sofre o acréscimo dx ,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \simeq dy.$$

Exemplo 1.9.4 *Determine um valor aproximado do erro no cálculo da área de um círculo de raio 1 quando se comete um erro no cálculo do raio de 0.01.*

Resolução:

Represente-se por A a área de um círculo de raio r , $A = \pi r^2$.

Se $r = 1$, $A(1) = \pi \simeq 3,1416$.

Seja $r = 1,01$, isto é, $r = 1 + 0,01$.

$$dy_1(dx) = A'(1) \times dx = A'(1) \times 0,01 = 2\pi \times (0,01) \simeq 0,0628$$

Então

$$A(1,01) \simeq A(1) + dy_1(0,01) \simeq 3,2044.$$

Exercício 1.9.5 *Considere a função real de variável real f derivável num ponto x_0 do seu domínio D . Em cada caso, (i) calcule a derivada $f'(x_0)$; (ii) determine a função diferencial df ; (iii) calcule o acréscimo Δf_{x_0} e compare com o diferencial df_{x_0} para os valores $dx = 0,1$ e $dx = 0,01$.*

$$1. f(x) = 3x^2 - x \quad x_0 = 0;$$

2. $f(x) = x^3, \quad x_0 = 1;$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$

Exercício 1.9.6 Calcular um valor aproximado de

(a) $\sqrt[3]{28}$; (b) $\text{sen}61^\circ$.

Exercício 1.9.7 A aresta de um depósito de forma cúbica sofre por aquecimento uma variação de 100 para 100,001 unidades. Calcular a variação aproximada do volume do depósito.

Observação 1.9.8 As regras de operações com aplicações diferenciais são semelhantes às regras de derivação. Por exemplo, vejamos que se f e g são diferenciáveis em I , vem:

$$d(fg) = df \, g + f \, dg.$$

De facto, para todo o $x \in I$, temos

$$\begin{aligned} d_x(fg) &= (fg)'(x) \, dx &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] \, dx \\ &= [f'(x)dx] \, g(x) + f(x) [g'(x)dx] \\ &= d_x f \, g(x) + f(x) \, d_x g \end{aligned}$$

1.10 Derivadas e diferenciais sucessivas

Seja f uma função real de variável real definida em $I \subset \mathbb{R}$ cuja derivada é uma função f' também definida em I . Se a função f' admitir por sua vez uma função derivada, esta é dita segunda derivada ou derivada de segunda ordem de f e representa-se por f'' . Do mesmo modo, definem-se as derivadas sucessivas de f : $f^{(n)}$ é a derivada da derivada de orden $(n-1)$ de f , isto é,

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'.$$

Convencionamos que a derivada de ordem 0 é a própria função, isto é,

$$f^{(0)} = f.$$

Exemplo 1.10.1 Suponhamos que $f(x) = \ln x$ e procuremos uma expressão da derivada de ordem n .

Resolução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} & ; & \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} & ; & \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-3 \times 2}{x^4} & ; & \quad f^{(5)}(x) = \frac{4 \times 3 \times 2}{x^5}. \end{aligned}$$

Observando as sucessivas derivadas, conclui-se que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}.$$

Exercício 1.10.2 Sendo $y = \sin(4x)$, mostre que $y''' + y'' + 16y' + 16y = 0$.

Exercício 1.10.3 Sendo $g(x) = e^{5x-1}$, determine $g^{(n)}(x)$.

Vimos que a aplicação diferencial de f em x é aplicação

$$df_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$df_x(dx) = f'(x)dx.$$

Mais geralmente, se existir $f^{(n)}(x)$, a aplicação $d^n f_x$ será definida como sendo a diferencial da diferencial de ordem $(n-1)$, isto é:

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Se $y = f(x)$, temos

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx).$$

Como $d(f'(x)) = f''(x) \, dx$ e $d(dx) = 0$ (pois $dx \in \mathbb{R}$) vem

$$d^2y = f''(x) \, (dx)^2,$$

escrevendo-se

$$d^2y = f''(x) \, dx^2$$

se supusermos que $dx^2 = (dx)^2$.

De um modo geral, escreve-se:

$$d^n y = f^{(n)}(x) \, dx^n$$

sendo $dx^n = (dx)^n$.

Resulta desta notação que podemos escrever

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (\text{Notação de Leibniz})$$

1.11 Regra de Cauchy

Se as funções f e g admitem derivada numa vizinhança de um ponto a , e se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

e se existir

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ então, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação 1.11.1

(i) A regra de Cauchy é aplicável quando a é $(+\infty$ ou $-\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) É igualmente aplicável no levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, seja a finito ou infinito.

Exercício 1.11.2 *Mostre que:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = -\frac{1}{2} ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2}{x e^x - x} = 0 ; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x e^x - x} = \frac{1}{2}.$$

Observação 1.11.3 *A "recíproca" deste teorema não é verdadeira, como o prova o exemplo seguinte.*

Sejam:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} ; \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

e $a = 0$.

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

enquanto que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} \left[2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right]$$

que não tem limite quando $x \rightarrow 0$.

1.12 Sentido de variação de uma função

Vamos analisar os seguintes gráficos

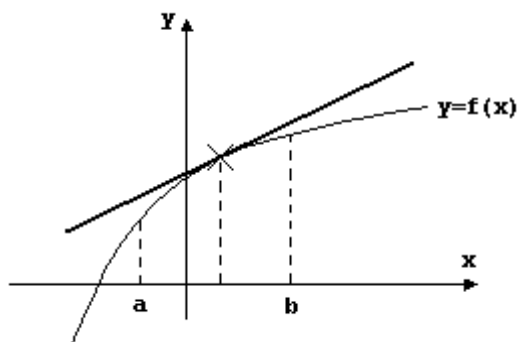


Gráfico1

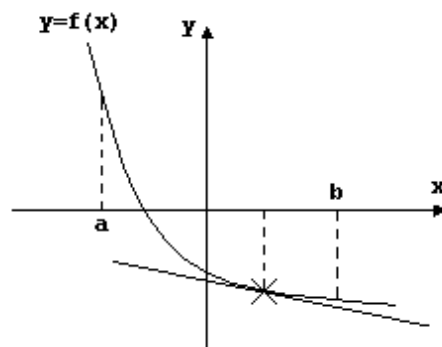


Gráfico2

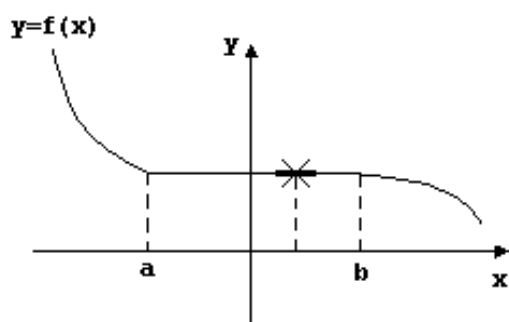


Gráfico3

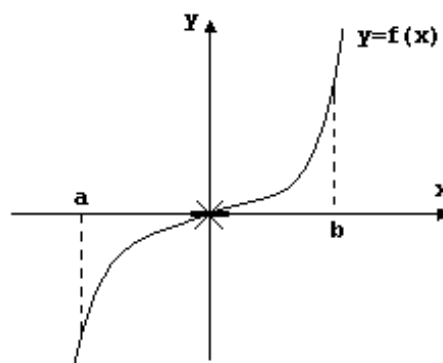


Gráfico 4

Verifica-se (gráfico 1) que a derivada é positiva em qualquer ponto de $]a, b[$ e que a função é estritamente crescente em $]a, b[$. Note-se que a derivada pode ser nula num ponto de $]a, b[$ (gráfico 4) mantendo-se a função estritamente crescente. Para que tal ocorra, os pontos onde a tangente à curva é horizontal têm de ser pontos isolados.

Se a derivada for negativa em todos os pontos de $]a, b[$, a função será decrescente nesse intervalo (gráfico 2).

Finalmente se em qualquer ponto de $]a, b[$ a derivada é nula então a função é constante nesse intervalo (gráfico 3).

Teorema 1.12.1 *Seja f derivável num intervalo $]a, b[$.*

- (i) *Se para todo o $x \in]a, b[$, $f'(x)$ é positiva então f é estritamente crescente em $]a, b[$.*
(ii) *Se para todo o $x \in]a, b[$, $f'(x)$ é negativa então f é estritamente decrescente em $]a, b[$.*
(iii) *Se para todo o $x \in]a, b[$, $f'(x)$ é nula então f é constante em $]a, b[$.*

■

Exemplo 1.12.1 *Determinar os intervalos de monotonia da função definida por*

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

Resolução: *Tem-se*

$$h'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

e

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1.$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	s/s	$+$	0	$-$	s/s	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	s/s	$\nearrow$	0	$\searrow$	s/s	$\searrow$

Portanto h é crescente em $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$ e decrescente em $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

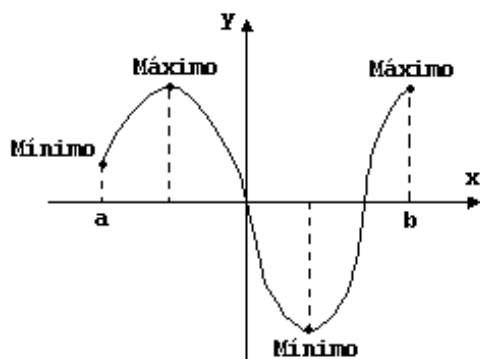
Exercício 1.12.2 *Estude a monotonia das funções definidas em $\mathbb{R}$ por:*

1. $p(x) = 1 - x - 4x^3$;

2. $q(x) = \frac{x-1}{x-6}$;

3. $m(x) = (2x^2 + 3)e^{-x}$.

1.13 Extremos relativos



Definição 1.13.1 Sejam f uma função definida num intervalo $[a, b]$ e $x_0 \in]a, b[$. Diz-se que f atinge:

(i) um máximo (resp. um mínimo) relativo ou local em x_0 ou que $f(x_0)$ é um máximo (resp. um mínimo) relativo de f , se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo o $x \in V$,

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

(ii) um máximo (resp. um mínimo) relativo ou local em a ou que $f(a)$ é um máximo (resp. um mínimo) relativo de f , se existir uma vizinhança V de a tal que

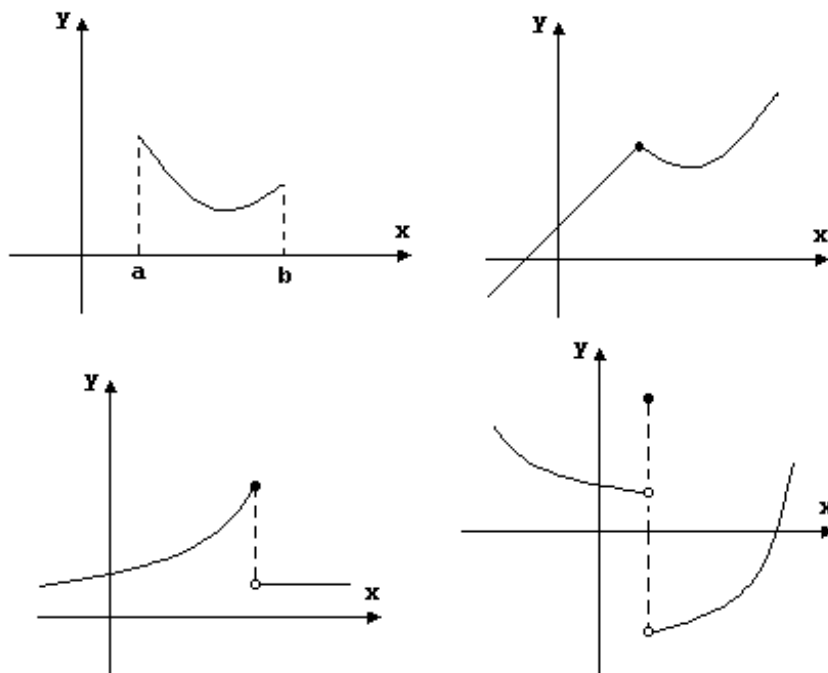
$$x \in V \wedge x \geq a \implies f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

(iii) um máximo (resp. um mínimo) relativo ou local em b ou que $f(b)$ é um máximo (resp. um mínimo) local de f , se existir uma vizinhança V de b tal que

$$x \in V \wedge x \leq b \implies f(x) \leq f(b) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(b)).$$

Nota 1.13.2 Um extremo (máximo ou mínimo) $f(x_0)$ é absoluto se para todo o $x \in D_f$ se verificar $f(x) \leq f(x_0)$ (máximo) ou $f(x) \geq f(x_0)$ (mínimo).

Exemplo 1.13.3 Indique os extremos relativos e absolutos das funções cujos gráficos são:



Teorema 1.13.1 Se f tem um extremo em $x_0 \in]a, b[$ e se $f'(x_0)$ existe, então

$$f'(x_0) = 0.$$

Demonstração. Suponhamos, por exemplo, que $f(x_0)$ é um máximo. A existência de $f'(x_0)$ implica a existência e a igualdade das derivadas laterais $f'(x_0^+)$ e $f'(x_0^-)$.

Como $f(x) \leq f(x_0)$ para todo o x numa vizinhança de x_0 , temos

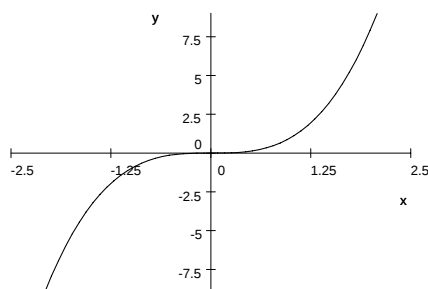
$$f'(x_0^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad ,$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad ,$$

donde $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0$. ■

Nota 1.13.4 Um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$ chama-se **ponto crítico** ou **estacionário** para f .

A recíproca do teorema anterior é falsa: Se $f'(x_0) = 0$, f não tem necessariamente um extremo relativo em x_0 . É por exemplo o caso da função f definida por $f(x) = x^3$ no ponto 0.



Vimos que f pode ter extremos em pontos críticos. No entanto uma função pode admitir um extremo em x_0 sem ser derivável em x_0 (diz-se então que x_0 é um **ponto singular** para f): A função definida por $f(x) = |x|$ tem um mínimo no ponto $x_0 = 0$ mas não é derivável nesse ponto.

Podemos resumir da seguinte forma: Uma função definida num intervalo só pode atingir um extremo num ponto crítico, num ponto singular ou nas extremidades do intervalo.

1.13.1 Determinação dos extremos

a) Suponhamos que x_0 é um ponto crítico para f

Teste da primeira derivada

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Min.	$\nearrow$

;

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

- Se no ponto x_0 a derivada passa de negativa a positiva então f tem um mínimo local em x_0 .

- Se no ponto x_0 a derivada passa de positiva a negativa então f tem um máximo local em x_0 .

Em alternativa ao teste da primeira derivada pode usar-se o teste da segunda derivada.

Teste da segunda derivada

- Se $f''(x_0) > 0$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ então f atinge um mínimo relativo em x_0 .

- Se $f''(x_0) < 0$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ então f atinge um máximo relativo em x_0 .

- Se $f''(x_0) = 0$, seja m a ordem da primeira derivada que é diferente de zero no ponto x_0 .

- Se m é par e $f^{(m)}(x_0) > 0$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, f atinge um mínimo relativo em x_0 .

- Se m é par e $f^{(m)}(x_0) < 0$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, f atinge um máximo relativo em x_0 .

- Se m é ímpar, f não tem extremo em x_0 .

Exemplo 1.13.5 Determinar os extremos relativos da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = 2x^4 - 12x^2 + 10.$$

Resolução:

$D_g = \mathbb{R}$ e $g'(x) = 8x^3 - 24x$, pelo que g só poderá ter extremos em pontos críticos.

$$g'(x) = 0 \iff 8x(x^2 - 3) = 0$$

$$\iff x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}.$$

Assim os pontos críticos são $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$.

Teste da primeira derivada

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$8x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	-8 (Min.)	$\nearrow$	10 (Máx.)	$\searrow$	-8 (Min.)	$\nearrow$

A função tem um máximo relativo igual a 10 para $x = 0$ e mínimos relativos iguais a -8

para $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$.

Podemos usar, em alternativa, o teste da segunda derivada.

Tem-se: $g''(x) = 24x^2 - 24$

$g''(0) = -24 < 0$, g tem um máximo relativo para $x = 0$ igual a $g(0) = 10$.

$g''(-\sqrt{3}) = g''(\sqrt{3}) > 0$, g tem mínimos relativos para $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$, iguais a $g(\sqrt{3}) = g(-\sqrt{3}) = -8$.

Exercício 1.13.6 Determine, se existirem, os extremos relativos de cada uma das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$a) h(x) = x^3 - 3x ; \quad b) m(x) = x^4 - 2x^3 + 2 ; \quad c) n(x) = \frac{2x}{x^2 + 4} ; \quad d) p(x) = \log_2 |16 - x^2| .$$

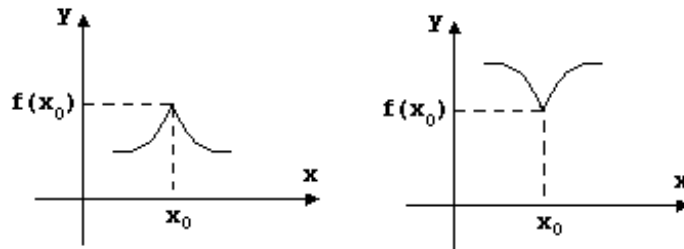
b) Teste para pontos singulares

Suponhamos que x_0 é um ponto singular para f , isto é, não existe ou é infinito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Caso existam as derivadas laterais ou os limites laterais de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quando x tende para x_0 , e estes sejam de sinais contrários, então f tem um extremo relativo em x_0 .

Concretamente:



Se $f'(x_0^+) < 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$) e

$$f'(x_0^-) > 0 \text{ (ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty)$$

então f atinge um máximo em x_0 .

Se $f'(x_0^+) > 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$) e

$$f'(x_0^-) < 0 \text{ (ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty)$$

então f atinge um mínimo em x_0 .

Exemplo 1.13.7 *Mostrar que a função definida em $\mathbb{R}$ por*

$$h(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

tem um máximo igual a 2 para $x = 1$ e um mínimo igual a 0 para $x = -1$.

Resolução: Desdobrando a expressão $|x + 1|$ vem :

$$h(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < -1 \\ x + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Para caracterizarmos a função derivada necessitamos das derivadas laterais nos pontos -1 e 1 .

$$h'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x - 1 - 0}{x + 1} = -1$$

$$h'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1 - 0}{x + 1} = 1$$

$$h'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

$$h'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 - x - 2}{x - 1} = -1.$$

A função derivada tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e é definida por

$$h'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Assim não há ponto crítico e há dois pontos singulares, $x = 1$ e $x = -1$, onde as derivadas laterais têm sinais contrários. Logo para $x = -1$, h tem um mínimo que tem o valor $h(-1) = -1 + 1 = 0$ e tem um máximo para $x = 1$ e o seu valor é $h(1) = 1 + 1 = 2$.

Exercício 1.13.8 Determine os extremos locais das funções definidas por:

a) $f(x) = x^3$ em $]-\infty, 2]$;

b) $g(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tgh}^2 x}$ em D_g onde $\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

1.14 Derivadas de funções dadas sob a forma paramétrica

1.14.1 Coordenadas paramétricas

Uma alternativa às coordenadas cartesianas é constituída pelas coordenadas paramétricas, assim chamadas por ser necessário recorrer a uma variável auxiliar que se designa por parâmetro.

Podemos considerar, no plano cartesiano ordinário, as coordenadas x e y definidas em função de uma variável auxiliar t , a que se chama parâmetro,

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, t \in X \subset \mathbb{R}.$$

Quando t varia em X os pontos do plano assim obtidos geram um subconjunto do plano.

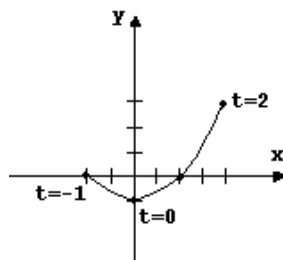
Exemplo 1.14.1 *Consideremos*

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, t \in [-1, 2].$$

Podemos construir a seguinte tabela:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{15}{16}$	-1	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

e deste modo fazer um primeiro esboço do subconjunto do plano assim obtido.

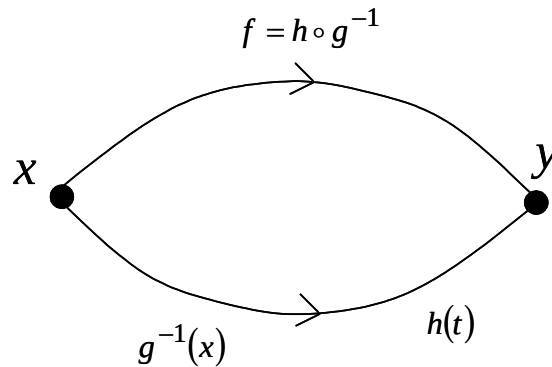


As equações

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, t \in X \subset \mathbb{R}$$

definem uma curva e chamam-se equações paramétricas da curva.

No exemplo anterior, as equações paramétricas definem uma função $y = f(x)$ mas isto só acontece se a função g for invertível, ou seja se g for injectiva.



De um modo geral, as equações paramétricas de uma curva podem representar uma ou mais do que uma função.

Exemplo 1.14.2 Identificar a curva cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, a > 0, t \in [0, 2\pi].$$

Resolução:

Tem-se:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2,$$

pelo que temos as equações paramétricas da circunferência de centro na origem e raio a , e as equações definem duas funções consoante $t \in [0, \pi]$ ou $t \in [\pi, 2\pi]$.

1.14.2 Derivadas de funções sob a forma paramétrica

Proposição 1.14.3 *Suponhamos que uma função f é definida pelas equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, t \in X \subset \mathbb{R}.$$

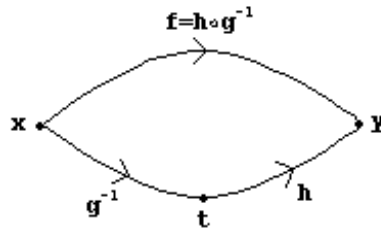
Então:

$$(i) \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dh}{dt}}{\frac{dg}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

$$(ii) \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(f'(x))}{\frac{dg}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

Demonstração.

Sejam $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, t \in X \subset \mathbb{R}$ equações que definem uma função $y = f(x)$.



(i) $f'(x) = h'[g^{-1}(x)] (g^{-1})'(x)$ e pela regra da derivação da função inversa, sendo $x = g(t)$, vem

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(t)}$$

donde

$$f'(x) = \frac{h'[g^{-1}(x)]}{g'(t)} = \frac{h'(t)}{g'(t)}$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) \\ &= \frac{d}{dx}[f'(g^{-1}(t))] \\ &= \frac{d}{dt}[f'(g^{-1}(t))](g^{-1})'(t) \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{g'(t)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.14.4 Calcular a primeira e a segunda derivadas da função definida por:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, \pi].$$

Resolução:

$$\frac{dx}{dt} = -3 \cos^2 t \sin t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 3 \sin^2 t \cos t$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} \\ &= -\operatorname{tg} t \quad \left(t \neq \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Além disso

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\sec^2 t$$

donde

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3 \cos^2 t \sin t} = \frac{\sec^4 t}{3 \sin t}.$$

Exercício 1.14.5 Considere a curva definida por

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = 3 e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcule $\frac{dy}{dx}$;

(b) Determine uma equação da tangente à curva no ponto $t = 0$.

1.15 Fórmula de Taylor

Definição 1.15.1 Seja f uma função real de variável real definida no intervalo $[c, d]$ e admitindo derivadas até à ordem n no ponto $a \in]c, d[$. Então existe um e um só polinómio P de grau não superior a n tal que

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), P''(a) = f''(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Este polinómio é definido por

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad (1.3)$$

e chama-se polinómio de Taylor de grau n gerado por f no ponto a .

Exemplo 1.15.2 Determine o polinómio de Taylor de grau n gerado pela função $f(x) = e^x$ no ponto zero.

Resolução:

$$f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x; \quad f''(x) = e^x; \dots; f^{(n)}(x) = e^x$$

logo, calculando no ponto $x = 0$,

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 1; \dots; f^{(n)}(0) = 1$$

substituindo em (1.3), temos

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Observação 1.15.3 Por vezes pode ser conveniente usar uma notação que indique a dependência do polinómio de Taylor P a respeito de f e de n . Indicaremos esta dependência escrevendo

$$P = T_n(f).$$

O valor desta função em x representa-se por

$$T_n f(x).$$

Se houver a necessidade de indicar a dependência a respeito de a , escrevemos

$$T_n f(x; a).$$

Teorema 1.15.1 O polinómio de Taylor possui as seguintes propriedades:

1. *Linearidade*

Se c_1 e c_2 são constantes, então

$$T_n(c_1 f + c_2 g) = c_1 T_n(f) + c_2 T_n(g).$$

2. *Derivação:*

A derivada de um polinómio de Taylor de f é um polinómio de Taylor de f' , isto é, tem-se

$$(T_n f)' = T_{n-1}(f').$$

3. Substituição:

Seja $g(x) = f(cx)$, com c uma constante. Tem-se então

$$T_n g(x; a) = T_n f(cx; ca).$$

Em particular, quando $a = 0$, tem-se

$$T_n g(x) = T_n f(cx).$$

Exemplo 1.15.4 Substituindo x por $-x$ no polinómio de Taylor para e^x encontramos que

$$T_n(e^{-x}) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Já que $\cosh(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, podemos servir-nos da linearidade para obtermos

$$\begin{aligned} T_{2n}(\cosh x) &= \frac{1}{2}T_n(e^x) + \frac{1}{2}T_n(e^{-x}) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

A propriedade da derivação dá-nos

$$T_{2n-1}(\sinh x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Definição 1.15.5 Seja f uma função real de variável real definida no intervalo $[c, d]$ e admitindo derivadas até à ordem $n+1$ no ponto $a \in]c, d[$. Definimos por

$$R_n(x; a) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ com } \alpha \in]a, x[,$$

como sendo o resto de Lagrange.

Teorema 1.15.2 Seja f uma função real de variável real definida num intervalo aberto contendo a com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ nesse intervalo. Então existe $R_n(x; a)$ tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x; a). \quad (1.4)$$

Observação 1.15.6

- À função apresentada, no teorema anterior, em (1.4), dá-se o nome de *Fórmula de Taylor* para a função f no ponto a .
- A $R_n(x; a)$ chama-se *resto da fórmula de Taylor*.
- Se $a = 0$ obtém-se a *fórmula de Mac Laurin* para f .

Exemplo 1.15.7 Escreva a fórmula de Mac Laurin para a função $f(x) = e^x$.

Resolução: Utilizando o exemplo 1.15.2 temos,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad \text{para algum } c \in]0, x[.$$

Exercício 1.15.8 Calcule o polinómio de Taylor do 3º grau gerado pela função $f(x) = \cos x$ no ponto $a = \frac{\pi}{4}$ e escreva a expressão do resto de Lagrange.

1.16 Resolução de equações não lineares

1.16.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos dois métodos numéricos utilizados para calcular as soluções de equações não lineares.

Uma equação não linear pode genericamente escrever-se sob a forma

$$f(x) = 0,$$

com $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, em que $D \subset \mathbb{R}$ é o domínio de f .

Definição 1.16.1 Se $f(\tilde{x}) = 0$, então diz-se que $\tilde{x}$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$, ou que $\tilde{x}$ é um zero da função f .

Se pretendemos obter as soluções de uma equação algébrica do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$, basta utilizar a conhecida fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para as equações algébricas de grau 3 ou de grau 4 ainda é possível obter fórmulas resolventes, se bem que mais complicadas. Para as equações algébricas de grau n com $n > 4$, Galois em 1832, mostrou que é impossível obter fórmulas resolventes, pelo que há necessidade de as resolver numericamente utilizando métodos iterativos.

A exposição será centrada exclusivamente sobre funções reais de uma variável real pertencem a um dos dois tipos seguintes de equações não lineares:

1. as *algébricas*, que envolvem apenas as operações aritméticas básicas, sendo as equações polinomiais um caso particular importante e ao qual dedicaremos alguma atenção;
2. as *transcendentes*, que envolvem funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, etc.

Num método iterativo começa-se com uma aproximação inicial x_0 da raiz $\tilde{x}$ a partir da qual se obtém outra aproximação x_1 , desta obtém-se outra aproximação x_2 e assim sucessivamente. Assim, o método gera uma sequência de valores

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

que se pretende que convirja para a raiz $\tilde{x}$ da equação. O processo iterativo termina até uma aproximação x_m satisfazer a precisão desejada.

1.16.2 Método da bissecção

O *método da bissecção* baseia-se no seguinte corolário do teorema do valor intermédio.

Teorema 1.16.1 *Dado um intervalo $I = [a, b]$ e uma função f que satisfaz as seguintes condições*

$$f \text{ é contínua em } [a, b] \quad (1.5)$$

$$f(a) \times f(b) < 0 \quad (1.6)$$

então a equação

$$f(x) = 0$$

tem pelo menos uma solução $\tilde{x}$ em $]a, b[$.

Se a função f satisfazer as condições (1.5), (1.6) e ainda a condição

$$f' \text{ existe, é contínua e não se anula em }]a, b[$$

conclui-se então que a solução $\tilde{x}$ é única em $]a, b[$.

Descrição do método

O método da bissecção consiste em construir subintervalos

$$I_k = [a_k, b_k] \subset I = [a, b], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

por divisões sucessivas a meio e investigar em qual dos subintervalos se encontra a raiz, isto é, determinar em qual dos subintervalos se verifica a condição

$$f(a_k) \times f(b_k) < 0. \quad (1.8)$$

Deste modo, vamos reduzindo a amplitude do intervalo até atingir a precisão desejada.

O método da bissecção caracteriza-se então do seguinte modo:

1. dado o intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ com $k = 0, 1, 2, \dots$ e onde $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$, a aproximação à raiz é conseguida calculando o ponto médio desse intervalo

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

2. em seguida consideramos uma das seguintes situações:

- (a) se $f(x_{k+1}) = 0$, então x_{k+1} é a raiz procurada e o método termina.
- (b) se $f(a_k)$ e $f(x_{k+1})$ tiverem sinais diferentes ($f(a_k) \times f(x_{k+1}) < 0$), então o intervalo que contém a raiz é o intervalo $[a_k, x_{k+1}]$ e neste caso, faz-se

$$a_{k+1} = a_k \quad \text{e} \quad b_{k+1} = x_{k+1}. \quad (1.10)$$

- (c) se $f(a_k)$ e $f(x_{k+1})$ tiverem sinais iguais ($f(a_k) \times f(x_{k+1}) > 0$), então o intervalo que contém a raiz é o intervalo $[x_{k+1}, b_k]$ e neste caso, faz-se

$$a_{k+1} = x_{k+1} \quad \text{e} \quad b_{k+1} = b_k. \quad (1.11)$$

Deste modo, para as duas últimas situações, podemos garantir que o intervalo

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset I_k = [a_k, b_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

continua a conter a raiz da equação $f(x) = 0$.

O processo de divisão do intervalo ao meio e a escolha do subintervalo para a iteração seguinte, repetem-se, até que o critério de paragem seja verificado.

Exemplo 1.16.2 Dada a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e usando o método da bissecção, pretendemos determinar a terceira aproximação do maior zero, sabendo que este se encontra no intervalo $[1.5, 2.0]$.

Tem-se assim:

1. $I_0 = [1.5, 2.0]$

- $f(1.5) = -0.125 < 0$;
- $f(2.0) = 3 > 0$.

Ponto médio

$$x_1 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75;$$

- $f(1.75) = 1.1094 > 0.$

2. $I_1 = [1.50, 1.75]$

Ponto médio

$$x_2 = \frac{1.5 + 1.75}{2} = 1.625;$$

- $f(1.625) = 0.4160 > 0.$

3. $I_2 = [1.500, 1.625]$

Ponto médio

$$x_3 = \frac{1.5 + 1.625}{2} = 1.5625.$$

A terceira aproximação para o maior zero da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ é $x_3 = 1.5625$.

Exemplo 1.16.3 *Determine uma aproximação para o maior zero da função*

$$f(x) = x + (x - 1)^3 \times \sin(x)$$

usando o método da bissecção.

Pelo gráfico da função (figura seguinte) podemos verificar que o maior zero da função f pertence ao intervalo $I_0 = [3, 4]$ e

- $f(3) = 4.1290 > 0;$
- $f(4) = -16.4337 < 0.$

No ponto médio

$$x_1 = \frac{3 + 4}{2} = 3.5$$

o valor da função é

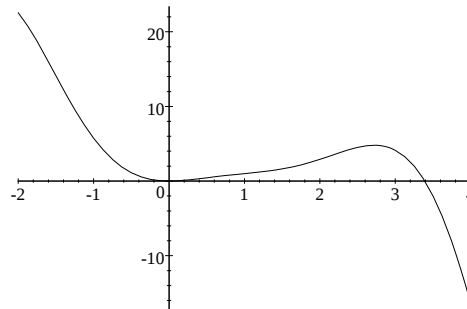
$$f(3.5) = -1.9810 < 0$$

e portanto, conclui-se que o intervalo que contém o zero é $I_1 = [3.0, 3.5]$; no ponto médio do novo intervalo o valor da função é

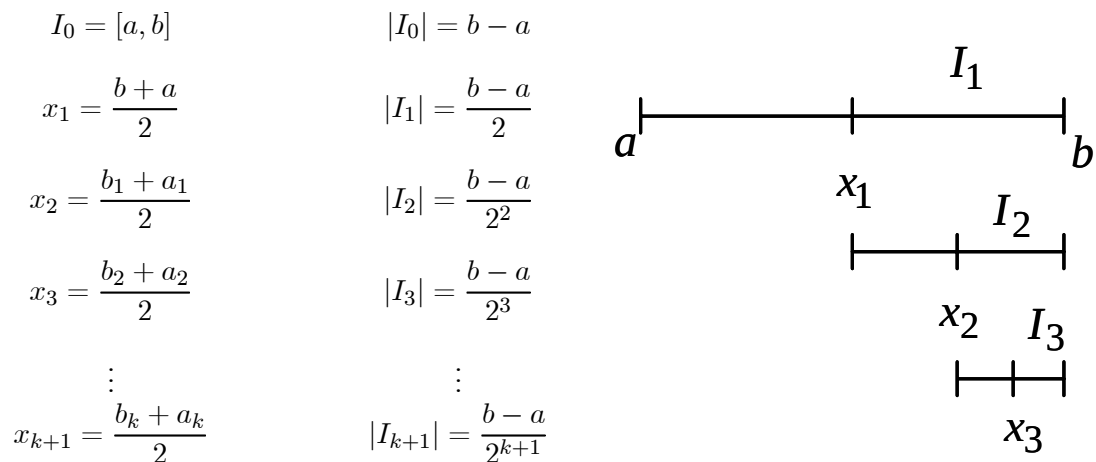
$$f\left(\frac{3 + 3.5}{2}\right) = f(3.25) = 2.0176 > 0$$

e conclui-se que o intervalo que contém o zero é $I_2 = [3.25, 3.50]$; e assim sucessivamente.

O valor do zero é $\tilde{x} = 3.3920$.



Abaixo ilustramos esquematicamente estas ideias



Obtiveram-se intervalos, contendo $\tilde{x}$, de amplitude cada vez mais pequena. São válidos os seguintes majorantes para os erros das sucessivas iterações de $\tilde{x}$.

$$\begin{aligned}\tilde{x}, x_1 \in I_0 &\rightarrow |e_{x_1}| = |\tilde{x} - x_1| \leq \frac{b-a}{2} \\ \tilde{x}, x_2 \in I_1 &\rightarrow |e_{x_2}| = |\tilde{x} - x_2| \leq \frac{b-a}{2^2} \\ \tilde{x}, x_3 \in I_2 &\rightarrow |e_{x_3}| = |\tilde{x} - x_3| \leq \frac{b-a}{2^3} \\ &\vdots \\ \tilde{x}, x_{k+1} \in I_k &\rightarrow |e_{x_{k+1}}| = |\tilde{x} - x_{k+1}| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

Da relação

$$0 \leq |e_{x_{k+1}}| = |\tilde{x} - x_{k+1}| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \rightarrow 0$$

concluimos que

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \tilde{x}$$

Deste modo provámos o seguinte resultado:

Teorema 1.16.2 *Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$ e seja $\tilde{x}$ a única raiz de f em $[a, b]$. Então o método da bissecção converge e tem-se a seguinte estimativa de erro*

$$|e_{x_k}| = |\tilde{x} - x_k| \leq \frac{b-a}{2^k}.$$

■

1.16.3 Método de Newton-Raphson

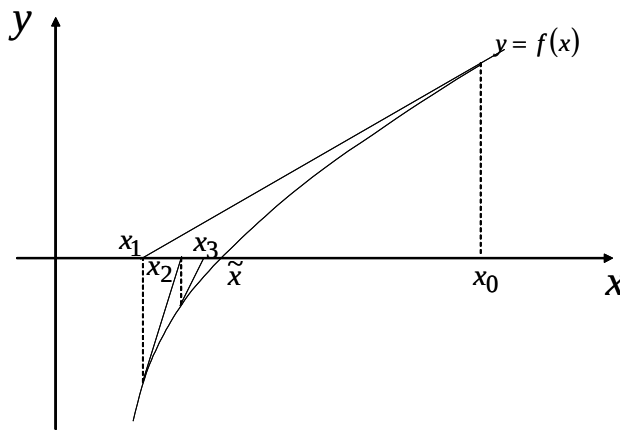
Descrição do método

De todos os métodos iterativos para a resolução de equações não lineares, o *método de Newton* (ou o *método das tangentes* ou o *método de Newton-Raphson*) é o mais conhecido, oferecendo vantagens do ponto de vista formal e quanto à rapidez de convergência.

O método de Newton-Raphson pode ser usado para calcular as raízes reais e complexas da equação $f(x) = 0$, constituindo o método mais rápido e quanto mais perto se estiver da solução mais rápida será a sua convergência.

No método de Newton-Raphson, o gráfico de função f é aproximada pela sua tangente no ponto da iteração corrente e a intersecção desta com o eixo dos xx é tomada como o novo valor da aproximação à raiz da equação $f(x) = 0$.

A Figura seguinte ilustra esquematicamente este processo.



A equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ e que passa no ponto $(x_k, f(x_k))$ é

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \quad (1.13)$$

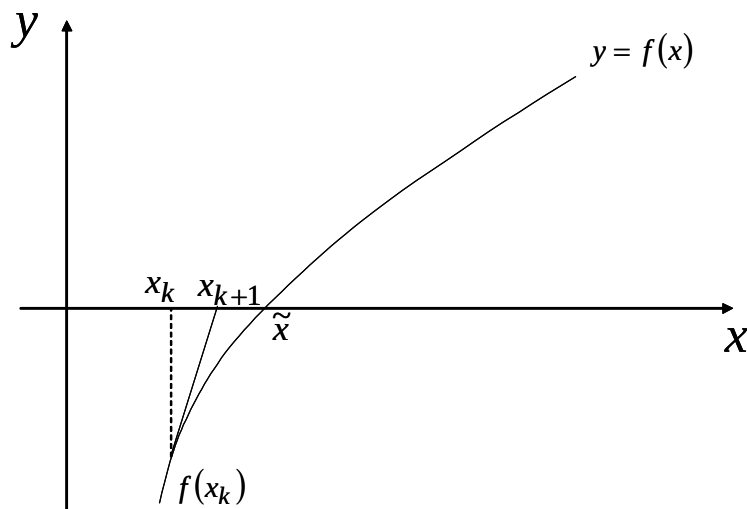
e portanto, a sua intersecção com o eixo dos xx ocorre quando $y = 0$. Logo, a abcissa do ponto da nova iteração é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.14)$$

ou seja, o método de Newton-Raphson é definido pela equação iterativa seguinte:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

sendo x_0 a aproximação inicial do processo.



Antes de passarmos ao estudo da convergência do método de Newton-Raphson convém notar que, como agora são necessários valores da primeira derivada, a realização deste método implica que se tenha calcular a primeira derivada da função f . Se f for uma função com uma expressão analítica muito complicada, o cálculo da sua primeira derivada não será uma tarefa simples. Portanto, o grande inconveniente deste método reside no facto de ser preciso calcular analiticamente f' .

Exemplo 1.16.4 Consideremos de novo a equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

A equação tem uma raiz em $[2, 3]$ e aplicando o método de Newton-Raphson, obtemos a fórmula iterativa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{3x_k^2 - 2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Considerando, por exemplo, a aproximação inicial $x_0 = 2$, as sucessivas aproximações

para a raiz da equação serão:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - \frac{2^3 - 2 \times 2 - 5}{3 \times 2^2 - 2} = 2.1000000; \\x_2 &= 2.0945681; \\x_3 &= 2.0945515; \\x_4 &= 2.0945515.\end{aligned}$$

Exemplo 1.16.5 Usando o método de Newton-Raphson, pretendemos determinar a terceira aproximação para o maior zero da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x + 1$, sabendo que este se encontra no intervalo $[1.5, 2.0]$ e partindo da aproximação inicial $x_0 = 2$.

Aplicando a expressão iterativa do método de Newton-Raphson à função polinomial dada, temos

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 1}{3x_k^2 - 3} \\&= \frac{2x_k^3 - 1}{3x_k^2 - 3}\end{aligned}$$

e portanto, as sucessivas aproximações para a raiz da equação polinomial dada são geradas pela expressão iterativa

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - 1}{3x_k^2 - 3}.$$

Partindo da aproximação inicial $x_0 = 2$, tem-se

$$x_1 = \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 3} = 1.6667;$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3} = 1.5486;$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 3} = 1.5324.$$

Convergência do método

O método de Newton-Raphson é um método de *convergência local* e tem uma convergência *quadrática*, a qual é garantida pelo teorema seguinte:

Teorema 1.16.3 *Seja f uma função real de uma variável real, pelo menos três vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de $\tilde{x}$ e suponhamos que $\tilde{x}$ é tal que $f(\tilde{x}) = 0$ e $f'(\tilde{x}) \neq 0$ (ou seja, que $\tilde{x}$ é um zero simples de f). Então existe um intervalo $[\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta]$, centrado em $\tilde{x}$, tal que, qualquer que seja $x_0 \in [\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta]$, a sequência de aproximações $\{x_{k+1}\}_{k=0,1,\dots}$ gerada pelo método de Newton-Raphson converge quadraticamente para $\tilde{x}$, com constante de convergência assintótica*

$$C = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} \right|. \quad (1.16)$$

■

Nota 1.16.6 *A convergência do método de Newton-Raphson será quadrática se*

$$f''(\tilde{x}) \neq 0 \quad (1.17)$$

sendo de ordem superior se

$$f''(\tilde{x}) = 0. \quad (1.18)$$

O teorema anterior garante a convergência do método de Newton-Raphson para a raiz $\tilde{x}$, desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" de $\tilde{x}$. Daí se dizer que o método de Newton-Raphson é um método de convergência local.

Contudo a determinação do intervalo $[\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta]$, referido no teorema anterior pode ser bastante difícil. Neste caso, o teorema seguinte estabelece condições suficientes de convergência do método de Newton-Raphson e as quais se revestem de maior interesse prático.

Teorema 1.16.4 *Seja $f \in C^2[a, b]$ e suponhamos que*

1.

$$f(a) \times f(b) < 0; \quad (1.19)$$

2.

$$f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]; \quad (1.20)$$

3.

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{ou} \quad f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b]; \quad (1.21)$$

4.

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \quad \text{e} \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a. \quad (1.22)$$

então o método de Newton-Raphson converge para a única solução $\tilde{x}$ da equação não linear $f(x) = 0$, existente no intervalo $[a, b]$, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$. ■

Nota 1.16.7

- As condições (1.19) e (1.20), garantem que existe uma e uma só raiz da equação $f(x) = 0$, no intervalo $[a, b]$.
- A condição (1.21) significa que o gráfico da função f é sempre côncavo ou sempre convexo (para $x \in [a, b]$) e que f' é sempre monótona em $[a, b]$.
- A condição (1.22), garante que a tangente ao gráfico da função f quer em a quer em b intersecta o eixo xx dentro do intervalo $[a, b]$ e portanto, a condição (1.22) garante que as sucessivas aproximações pertencem ao intervalo $[a, b]$.

Como referimos, as condições (1.19) – (1.22) garantem a convergência do método de Newton-Raphson para qualquer escolha da aproximação inicial x_0 pertencente ao intervalo $[a, b]$. Em particular, podemos seleccionar, por exemplo, $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. Então qual será a melhor escolha?

A expressão

$$f(x_0) \times f''(x_0) > 0 \quad (1.23)$$

conhecida como expressão do *extremo favorável* permite resolver a questão anterior e portanto, a melhor escolha para a aproximação inicial x_0 será aquela que verificar a equação (1.23).

Exemplo 1.16.8 Dada a equação polinomial $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e sabendo que o seu maior zero se encontra no intervalo $[1.5, 2.0]$, pretendemos determinar qual dos dois extremos de intervalo é o extremo favorável.

Nos extremos do intervalo a função toma os seguintes valores:

- $f(1.5) = -0.1250 < 0$;
- $f(2.0) = 3.0000 > 0$.

Por outro lado

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad e \quad f''(x) = 6x$$

e portanto,

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [1.5, 2.0].$$

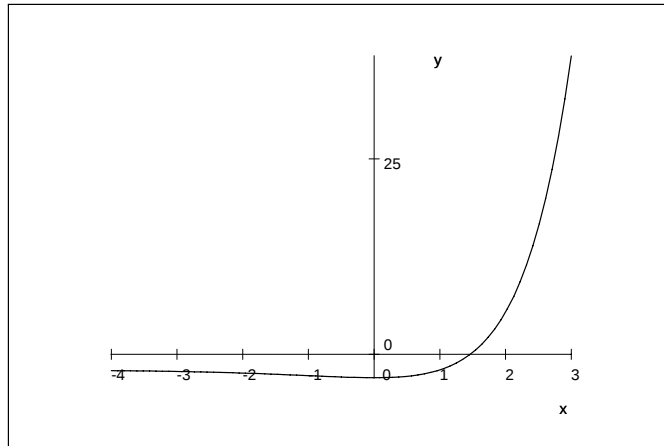
Podemos assim concluir que o extremo que verifica a condição

$$f(x_0) \times f''(x_0) > 0$$

é $x_0 = 2.0$, constituindo o extremo favorável para a aplicação do método de Newton-Raphson a este exemplo.

Exemplo 1.16.9 Dada a equação $(x - 1)e^x - 2 = 0$, pretendemos determinar qual o extremo mais favorável para aplicar o método de Newton-Raphson.

Pelo gráfico da função $f(x) = (x - 1)e^x - 2$,



verificamos que a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz no intervalo $[1, 2]$ e nos extremos do intervalo

- $f(1) = -2 < 0$;
- $f(2) = e^2 - 2 = 5.3891 > 0$.

Por outro lado

$$f'(x) = xe^x \quad \text{e} \quad f''(x) = (x + 1)e^x$$

e portanto,

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [1, 2].$$

O extremo favorável para aplicar o método de Newton-Raphson é $x_0 = 2$, pois é o extremo em que se verifica a condição

$$f(x_0) \times f''(x_0) > 0.$$

Teorema 1.16.5 *Se f é uma função real de variável real pelo menos duas vezes continuamente diferenciável em $[a, b]$, então as iteradas do método de Newton satisfazem*

$$|e_{m+1}| = |\tilde{x} - x_{m+1}| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{2 |f'(x_m)|} |\tilde{x} - x_m|^2$$

■

Corolário 1.16.10 *As iteradas do método de Newton satisfazem*

$$\underbrace{|\tilde{x} - x_{m+1}|}_{e_{m+1}} \leq K \underbrace{|\tilde{x} - x_m|}_{e_m}^2$$

onde

$$K = \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|}$$

■

Assim, o número de iterações necessárias para obter uma precisão ε na iterada x_{m+1} é dada pela seguinte forma:

na equação $|e_{m+1}| \leq K |e_m|^2$ obtém-se a seguinte relação

$$|e_{m+1}| \leq K^{(2^{m+1}-1)} |e_0|^{2^{m+1}},$$

logo fazendo

$$K^{(2^{m+1}-1)} |e_0|^{2^{m+1}} < \varepsilon$$

e resolvendo esta inequação em ordem a m obtemos

$$m > \frac{\ln \left[\frac{\ln(K\varepsilon)}{\ln(K|e_0|)} \right]}{\ln(2)} - 1.$$

Capítulo 2

Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

2.1 Funções de várias variáveis

Até agora, foram apenas estudadas funções dependentes de uma única variável: a função y era conhecida quando era dado um valor da variável independente x .

Todavia, na maior parte dos casos, as variações de um fenómeno dependem de várias grandezas. Tais funções, que dependem de várias variáveis susceptíveis de variarem cada uma delas independentemente das outras, dizem-se "*funções de várias variáveis*". Vamos estudá-las neste capítulo, dando sobretudo atenção ao caso das funções de duas variáveis.

Definição 2.1.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Uma função f definida em D é uma correspondência que a cada elemento de D associa um único elemento $z \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{ccc} f : & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} .$$

O conjunto D é o domínio de f .

Exemplo 2.1.2

1. *A área A de um rectângulo é o produto da medida b da base pela medida h da altura; trata-se pois de uma função de duas variáveis:*

$$A = b \times h = f(b, h) .$$

2. A intensidade I de uma corrente eléctrica numa resistência é função do valor R dessa resistência e da diferença de potencial V :

$$I = \frac{V}{R} = f(V, R).$$

3. A quantidade de calor W produzida por uma resistência eléctrica R é função de R , da intensidade I e do tempo t ; trata-se portanto de uma função de três variáveis:

$$W = R \times I^2 \times t = f(R, I, t).$$

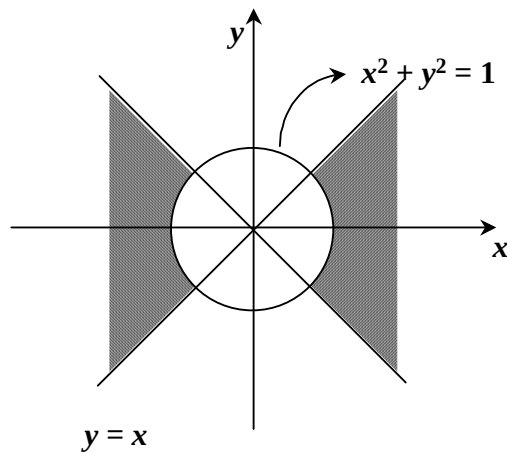
Exemplo 2.1.3 Determine graficamente o domínio das funções definidas por:

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}$$

$$x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y \leq x \wedge y \geq -x) \vee (y \geq x \wedge y \leq -x)$$



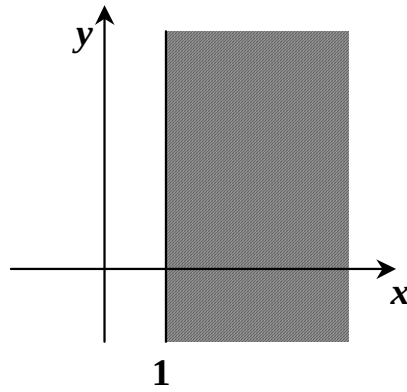
2. $g(x) = \sqrt{x - 1}.$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = [1, +\infty[$$



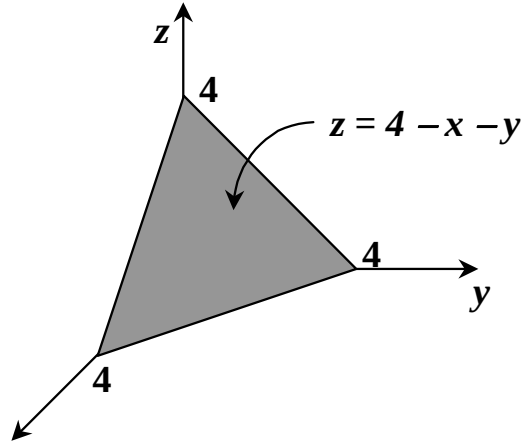
3. $h(x, y) = \sqrt{x-1}$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \geq 0\}$$



4. $i(x, y, z) = \sqrt{4 - x - y - z}$.

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x - y - z \geq 0\}$$



Exercício 2.1.4 Determine e represente graficamente o domínio das funções definidas por:

1. $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

2. $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2} + \ln(x + y - 2)$.

Definição 2.1.5 Dada uma função f de domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, chama-se gráfico de f ao conjunto

$$G = \{(x_1, \dots, x_n, z) : (x_1, \dots, x_n) \in D \wedge z = f(x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Exemplo 2.1.6

1. Se $y = f(x)$ define uma função real de uma variável real com domínio D então o seu gráfico

$$G = \{(x, y) : x \in D \wedge y = f(x)\}$$

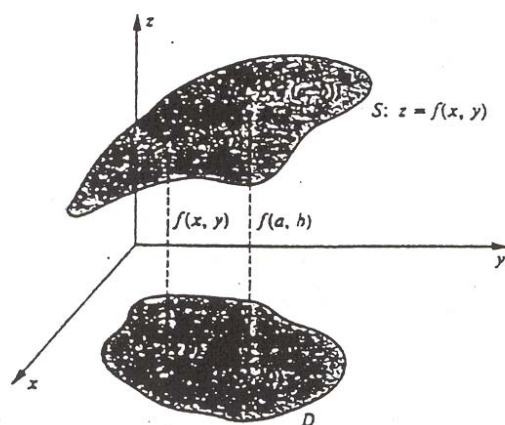
é, em geral, uma curva de $\mathbb{R}^2$.

2. Se $z = f(x, y)$ define uma função real de duas variáveis reais com domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ então o seu gráfico

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$

é, em geral, uma superfície de $\mathbb{R}^3$.

Num sistema de eixos rectangular $oxyz$, o domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ de uma função $z = f(x, y)$ será representado pelo conjunto dos pontos $(x, y, 0)$ com $(x, y) \in D$; o valor de $f(x, y)$ será a distância medida segundo a direcção do eixo oz que vai do plano xoy à superfície.



2.2 Limites e Continuidade

Analogamente ao que se passa com as funções de uma só variável, o cálculo de limites de funções de duas variáveis pode ser feito usando as propriedades de limites e ainda recorrendo à continuidade de funções de uma variável.

Teorema 2.2.1 *Suponhamos que λ é uma constante real e que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$ existem. Então:*

$$1. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y).$$

$$2. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [\lambda \times f(x,y)] = \lambda \times \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y).$$

$$3. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \times g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \times \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y).$$

$$4. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)}, \text{ se } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \neq 0.$$

$$5. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \lambda = \lambda.$$

$$6. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a.$$

$$7. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b.$$

Exemplo 2.2.1 *Calcule os seguintes limites:*

$$1. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2y}{3 + xy}.$$

Resolução: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2y}{3 + xy} = \frac{0}{3} = 0.$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{y^2 - x^2}{2xy + 2x^2}.$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{y^2 - x^2}{2xy + 2x^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(y-x)(y+x)}{2x(y+x)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{y-x}{2x} = -1. \end{aligned}$$

Observação 2.2.2 O levantamento de indeterminações em limites de funções de duas variáveis é bastante mais difícil que no caso de funções de uma variável. A principal razão é existirem infinitos caminhos para $(x, y) \rightarrow (a, b)$, enquanto que, nas funções de uma variável, apenas temos dois caminhos: $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$. Assim, por vezes é necessário utilizar a definição de limite, o que ultrapassa o âmbito desta disciplina.

Definição 2.2.3 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $A = (a, b)$ um ponto de D , interior ou fronteiro. Diz-se que f é contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Diremos que f é contínua em D se for contínua em todos os pontos de D .

Pode mostrar-se que a **soma**, o **produto** e o **quociente** de funções contínuas, são funções contínuas em todos os pontos do seu domínio.

Uma **função polinomial** em duas variáveis é uma soma finita de parcelas do tipo $cx^m y^n$, onde c é constante (real) e m e n são inteiros não-negativos.

Uma **função racional** é o quociente de funções polinomiais. Por exemplo, $f(x, y) = x^2 + xy^3 - 2$ é uma função polinomial e $g(x, y) = \frac{1 + 2xy}{x^3 + y}$ é uma função racional.

Teorema 2.2.2 As funções polinomiais e as funções racionais são contínuas em todo o seu domínio. ■

Teorema 2.2.3 Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em (a, b) e g é uma função de uma só variável e é contínua em $f(a, b)$, então a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g[f(x, y)]$ é contínua em (a, b) . ■

Nas condições do teorema anterior, tem-se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g[f(x, y)] = g \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \right].$$

Exemplo 2.2.4 Averigue se a função h definida por $h(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ é uma função contínua.

Resolução: Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ e $g(t) = \ln(t)$, então $h(x, y) = (g \circ f)(x, y)$. Como f e g são funções contínuas, resulta que h é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

2.3 Derivadas Parciais

Seja f uma função de duas variáveis x e y . Façamos variar x mantendo y fixo, por exemplo, $y = b$. Então estamos a considerar uma função g de uma só variável definida por $g(x) = f(x, b)$.

Se existir derivada de g no ponto a , damos-lhe o nome de **derivada parcial de f em ordem a x** no ponto (a, b) e representamo-la por $f'_x(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Assim, $f'_x(a, b) = g'(a)$ com $g(x) = f(x, b)$.

Uma vez que

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

temos

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Analogamente, a derivada parcial de f em ordem a y em (a, b) , representada por $f'_y(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é obtida considerando a variável x fixa de valor constante igual a a e

determinando a derivada da função $j(y) = f(a, y)$ em $y = b$. Isto é,

$$f'_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

Exemplo 2.3.1 Sendo $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, calcular através da definição $f'_x(2, -1)$ e $f'_y(-1, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h, -1) - f(2, -1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h+1}{2+h-1} - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(h+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h+1} = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1, h) - f(-1, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-1-h}{-1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(-1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{-1+h} = 2. \end{aligned}$$

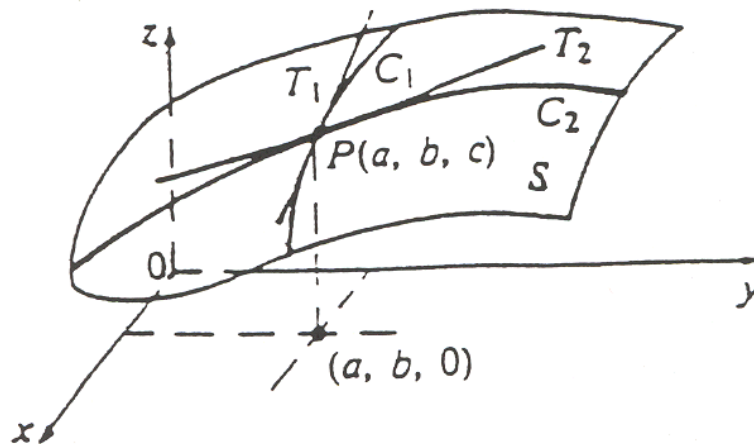
Fazendo variar o ponto (a, b) , f'_x e f'_y tornam-se funções de duas variáveis definidas por:

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{e} \quad f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

2.3.1 Interpretação geométrica da derivada parcial

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e considere-se o ponto $P = (a, b, c)$ pertencente à superfície S definida pelo gráfico de f . Intersectando S com os planos $y = b$ e $x = a$ obtêm-se respectivamente as curvas C_1 e C_2 :

- C_1 é o gráfico da função $f(x, b) = g(x)$ e por conseguinte $f'_x(a, b) = g'(a)$ é o declive da recta tangente T_1 a C_1 em P .
- C_2 é o gráfico da função $f(a, y) = j(y)$ e por conseguinte $f'_y(a, b) = j'(b)$ é o declive da recta tangente T_2 a C_2 em P .



Observação 2.3.2 Para calcular a derivada parcial de $f(x, y)$ em ordem a x (em ordem a y) pelas regras de derivação basta considerar y constante (x constante)

Exemplo 2.3.3 Seja $f(x, y) = x \ln(y) + yx^2$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, e)$.

Resolução:

$$f'_x = \ln(y) + 2xy \Rightarrow f'_x(2, 1) = \ln(1) + 4 = 4$$

$$f'_y = \frac{x}{y} + x^2 \Rightarrow f'_y(0, e) = \frac{0}{e} + 0 = 0.$$

Exercício 2.3.4 Calcular a expressão das funções derivadas parciais de:

1. $\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right).$

2. $\sin\left(x^2y + e^{yz^2}\right).$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} - y & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

2.4 Derivadas Parciais de Ordem Superior à Primeira; Teorema de Schwarz

Sendo f uma função de duas variáveis x e y , as suas derivadas parciais f'_x e f'_y são também funções de duas variáveis. Podemos pois considerar as suas derivadas, obtendo-se as derivadas parciais de f de segunda ordem. É costume usar as seguintes notações:

1. derivadas quadradas: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$

2. derivadas mistas: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}.$

Exemplo 2.4.1 Determinar as derivadas parciais de segunda ordem de $z = xy^2 + ye^{-x}$.

Resolução:

Derivadas de primeira ordem: $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - ye^{-x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + e^{-x}.$

Derivadas de segunda ordem: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ye^{-x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y - e^{-x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y - e^{-x}.$

Exemplo 2.4.2 Sendo $z = y \cos(xy)$ determinar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

Resolução:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos(xy) - xy \sin(xy)) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-y^2 \sin(xy)) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy).$$

No exemplo anterior, as derivadas mistas, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ são iguais. Este facto não ocorre por mero acaso.

Teorema 2.4.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $A = (a, b) \in D$ tal que existe uma derivada parcial mista de 2ª ordem (f''_{xy} ou f''_{yx}) numa vizinhança de $A = (a, b)$. Suponhamos que esta derivada é contínua no ponto A . Então existe a outra derivada mista em A e*

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

■

Note-se que o Teorema de Schwarz exprime apenas uma condição suficiente de igualdade das derivadas mistas, quer dizer, pode ter-se $f''_{xy} = f''_{yx}$, sem as derivadas parciais serem contínuas.

Exemplo 2.4.3 *Seja $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, use o Teorema de Schwarz para provar que $f''_{xy} = f''_{yx}$ no domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*

Resolução:

$$\text{Tem-se } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (função racional), logo pelo Teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ em } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Exercício 2.4.4 Uma função f de x e y diz-se harmónica se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Prove que a função $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ é harmónica.

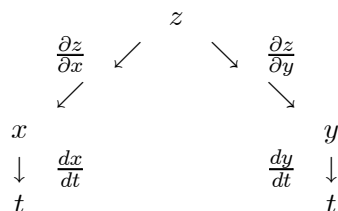
2.5 Derivada da Função Composta. Regra da Cadeia

Teorema 2.5.1 Seja $z = f(x, y)$, $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funções diferenciáveis. Então a função $z(t) = f[g(t), h(t)]$ é diferenciável e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

■

Uma forma de nos lembrarmos da Regra da Cadeia é o recurso ao chamado *diagrama da árvore*. Para construirmos o diagrama da árvore, desenhemos ramos da variável dependente z para as variáveis intermédias x e y . Depois construimos novos ramos partindo de x e y e terminando na variável independente t .



Exemplo 2.5.1 Determinar $\frac{dz}{dt}$ sabendo que $z = x^2 + y^2$, $x = t^3$ e $y = 1 + t^2$.

Resolução:

z , x e y são funções polinomiais, logo diferenciáveis.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2x(3t^2) + 2y(2t) = 6t^5 + 4t^3 + 4t. \end{aligned}$$

Exercício 2.5.2 Determinar $\frac{du}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sabendo que $u = e^{x-2y}$, $x = \sin(t)$ e $y = t^3$.

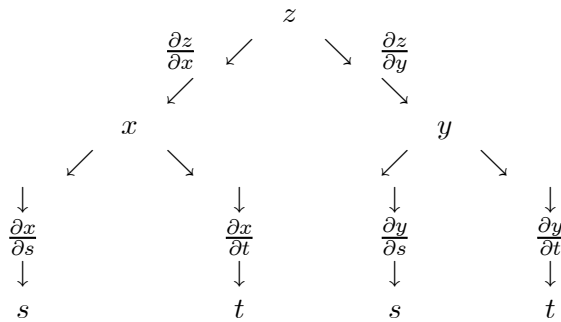
Teorema 2.5.2 *Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável. Se as derivadas parciais das funções $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ existirem, então existem as derivadas parciais da função $z = f[g(s, t), h(s, t)]$ e são dadas por*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

■

Exercício 2.5.3 *Prove o teorema anterior.*

Também aqui, podemos recorrer ao diagrama da árvore



Exemplo 2.5.4 *Sejam $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ com f uma função diferenciável.*

Mostre que g satisfaz a equação

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Resolução:

Tome-se $s^2 - t^2 = x$ e $t^2 - s^2 = y$. Então $z = g(s, t) = f(x, y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s) = 2s \frac{\partial f}{\partial x} - 2s \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} (2t) = -2t \frac{\partial f}{\partial x} + 2t \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Donde

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 2st \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \frac{\partial f}{\partial y} - 2st \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exemplo 2.5.5 Dada a função $z = e^x \cos(y)$ com $x = uv$ e $y = u^2$, determine $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Resolução:

Resolução:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = e^{uv} [v \cos(u^2) - 2u \sin(u^2)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = ue^{uv} \cos(u^2).$$

Exercício 2.5.6

1. Seja $w = f(x + az, y + bz)$, onde a e b são constantes reais e f uma função diferenciável de duas variáveis. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}.$$

2. Seja g uma função diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f(x, y) = x^2 g\left(\frac{x}{y}\right)$ verifica a relação

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

Bibliografia

- [1] Pedro Matos, Alexandra Seco, Luís Cotrim, “Apontamentos teóricos de Matemática I, Departamento de Matemática”, ESTG.
- [2] Pedro Matos, Carlos Campos, Luís Cotrim, “Apontamentos teóricos de Matemática II, Departamento de Matemática”, ESTG
- [3] Carlos Campos, “Apontamentos teóricos da disciplina de análise numérica”, Departamento de Matemática, ESTG
- [4] Tom M. Apostol, “Cálculo”, volume 1, Editora Reverté LTDA