



IPL
escola superior
de tecnologia e gestão
instituto politécnico
de leiria

Instituto Politécnico de Leiria
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Apontamentos Teóricos de Métodos Quantitativos

Luís Cotrim
Pedro Matos

Departamento de Matemática

1 Generalidades sobre funções.

1.1 Aplicações entre conjuntos.

Definição 1.1 *Dados dois quaisquer conjuntos A e B , chama-se aplicação (ou função) de A em B a toda a correspondência que a cada elemento de A associa um e um só elemento de B .*

Se representarmos a função por f e por x e y , respectivamente, as variáveis representativas dos elementos de A e de B , escreve-se

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Observação:

À variável x dá-se o nome de variável independente e à variável y de variável dependente.

Numa função de A em B há sempre a considerar três conjuntos:

- o domínio sendo o conjunto A , que se representa por D_f ;
- o conjunto de chegada sendo o conjunto B ;
- o contradomínio sendo o conjunto

$$f(A) = \{f(a) \in B : a \in A\},$$

que habitualmente se representa por D_f ou $I_m f$,

“conjunto das imagens (transformados dos elementos de A por f)”.

- f e g são a mesma função se e só se têm o mesmo domínio D , o mesmo conjunto de chegada e, para qualquer $a \in D$, $f(a) = g(a)$.

- Se f e g são duas aplicações com o mesmo conjunto de chegada, se $D_f \subseteq D_g$ e se $f(a) = g(a)$, qualquer que seja o elemento $a \in D_f$, então diz-se que f é uma restrição de g ou que esta é uma extensão de f .

1.2 Funções reais de uma variável real. Domínios.

Definição 1.2 *Uma função real de variável real (f.r.v.r.) é uma função de A em $\mathbb{R}$, sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Observações:

Por definição as f.r.v.r. têm conjunto de chegada $\mathbb{R}$.

Para que sejam bem definidas é necessário indicar apenas o domínio e a chamada *expressão analítica ou lei de transformação*.

Como as funções reais de variável real, são em geral definidas pela sua expressão analítica (expressão designatória), é necessário calcular nesses casos o domínio da expressão que a define.

Exercícios 1.1 *Determine o domínio de cada uma das seguintes funções definidas por:*

$$a) f(x) = x^2 - 4x + 3;$$

$$b) g(x) = \frac{4}{x^2 + 5};$$

$$c) f(x) = \frac{x+2}{x+3};$$

$$d) h(x) = \frac{4}{x^2 - 2x};$$

$$e) t(x) = \sqrt{x-4};$$

$$f) j(x) = \frac{1 - \sqrt{x-3}}{x+5};$$

$$g) m(x) = \sqrt[3]{x-4};$$

$$h) p(x) = \sqrt[4]{x-4}.$$

Resolução:

O domínio de cada uma destas funções é o conjunto dos valores reais da variável independente para os quais são possíveis em $\mathbb{R}$ as operações indicadas na expressão que a define. Temos assim:

$$a) D_f = \mathbb{R}$$

$$b) D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

$$c) D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$d) D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$e) D_t = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \geq 0\} = [4, +\infty[$$

$$f) D_j = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \geq 0 \wedge x + 5 \neq 0\} = [3, +\infty[$$

$$g) D_m = \mathbb{R}$$

$$h) D_p = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \geq 0\} = [4, +\infty[$$

Observações:

No cálculo dos domínios atrás, tiveram-se em atenção as seguintes situações:

- Em $\mathbb{R}$, a divisão só é possível se o divisor for diferente de zero.
- Se o índice de uma raiz é ímpar, a radiciação é possível para todos os valores da variável independente que dão significado ao radicando.
- Se o índice de uma raiz é par, a radiciação só é possível para os valores da variável independente que transformam o radicando num valor real nulo ou positivo, isto é, maior ou igual a zero.

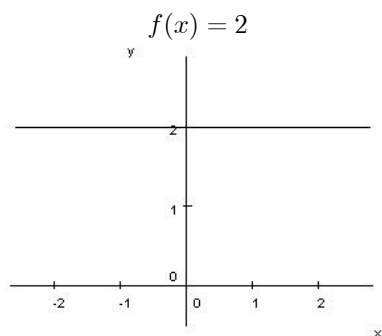
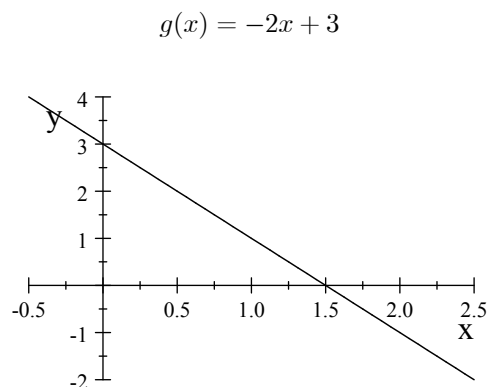
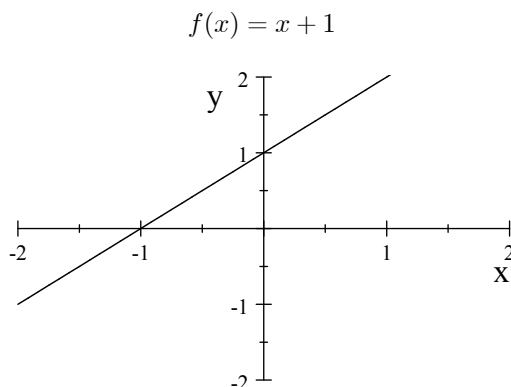
1.3 Gráfico de uma função.

Uma função f pode ser representada num plano, onde se fixe um sistema de eixos Oxy , por um conjunto de pontos o qual se diz gráfico ou imagem geométrica de f .

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \wedge y = f(x)\}$$

Exemplo 1.1 As funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas pela fórmula $f(x) = mx + b$, em que $m, b \in \mathbb{R}$.

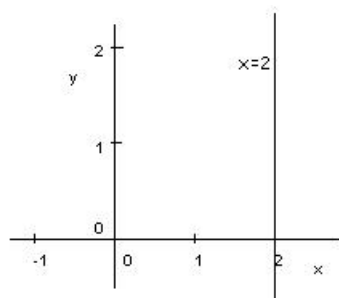
Uma função deste tipo é representada graficamente por uma linha recta; se $m = 0$, a função é constante e o gráfico é uma recta paralela ao eixo Ox .



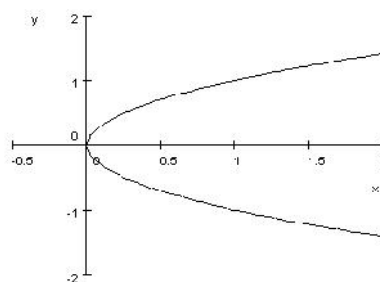
Posteriormente voltaremos à representação dos gráficos de algumas funções particulares de forma mais cuidada.

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de gráficos que não representam funções. Tem-se por exemplo:

1)



2)



Observação: Justifique por que motivo os gráficos representados não representam funções.

1.4 Funções definidas por expressões analíticas diferentes em partes do seu domínio.

Consideremos a função definida em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 3x && \text{para } x \geq 2 \\ \text{e} \\ x &\rightarrow x + 1 && \text{para } x < 2. \end{aligned}$$

Para calcular, por exemplo, $f(5)$ e $f(\frac{11}{3})$ consideramos

$$f(x) = 3x.$$

Temos então:

$$f(5) = 15 \text{ e } f\left(\frac{11}{3}\right) = 11.$$

Para calcular, por exemplo, $f(0)$ e $f(-1)$ consideramos

$$f(x) = x + 1.$$

Temos então:

$$f(0) = 1 \text{ e } f(-1) = 0.$$

Para definir a função f é costume escrever-se

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

ou

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x & \Leftarrow x \geq 2 \\ x + 1 & \Leftarrow x < 2. \end{cases}$$

Exercício 1.2 Considere a função g definida, em $\mathbb{R}$, por

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Calcule $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$ e $g(3)$.

b) Sendo $h \in \mathbb{R}^+$, mostre que

$$g(1 + h) + 3g(1 - h) = 1.$$

Soluções: a) -3 ; -1 ; 1 ; 7 ; b) Ao cuidado do aluno.

1.5 Função Módulo.

Por exemplo:

$$|5| = 5 ; |0| = 0 ; |-5| = 5 \text{ isto é } |-5| = -(-5) = 5.$$

De um modo geral tem-se:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

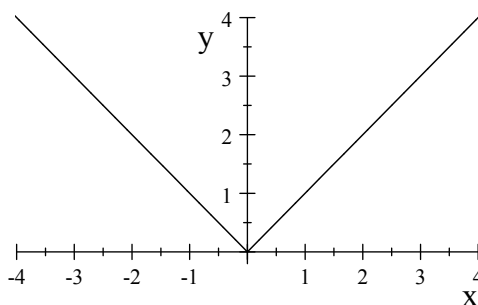
Assim, em $\mathbb{R}$, a função

$$f(x) = |x| \quad (\text{função módulo}),$$

pode escrever-se

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Observação: Facilmente se verifica que o gráfico desta função é:



Exemplo 1.2 Considere a função real de variável real, g definida por:

$$g(x) = |x - 4|.$$

a) Calcule $g(0)$ e $g(6)$.

b) Defina a função sem utilizar o símbolo $||$.

Resolução:

a) 4; 2.

b)

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & \text{se } x - 4 < 0, \end{cases}$$

isto é:

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

1.6 Classificação de funções reais de variável real.

1.6.1 Funções sobrejectivas.

Definição 1.3 Uma função real de variável real $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) diz-se **sobrejectiva** se e só se o seu contradomínio for $\mathbb{R}$.

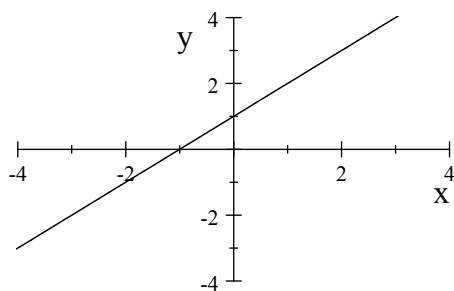
$$f \text{ é sobrejectiva} \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in A : y = f(x)$$

Uma função $f : A \longrightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$ é sobrejectiva se e só se o contradomínio for B .

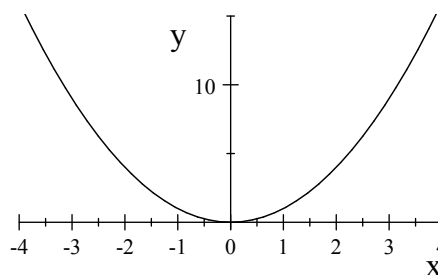
Verifica-se assim que uma função é sobrejectiva se e só se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Exercício 1.3 Dos seguintes gráficos de funções reais, de variável real, diga justificando qual representa uma função sobrejectiva.

1)



2)



1.6.2 Funções injectivas.

Definição 1.4 Uma função diz-se **injectiva** se e só se quaisquer dois objectos diferentes têm imagens diferentes.

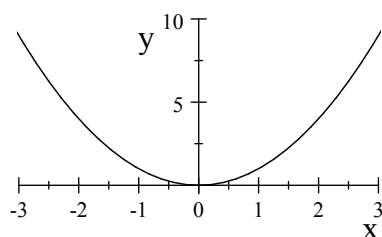
$$f \text{ é injectiva} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Recorrendo à lei de conversão, esta definição pode tomar a forma

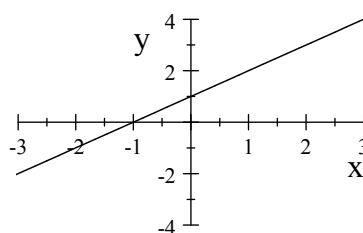
$$f \text{ é injectiva} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exercício 1.4 Dos seguintes gráficos de funções reais, de variável real, diga justificando quais representam funções injectivas.

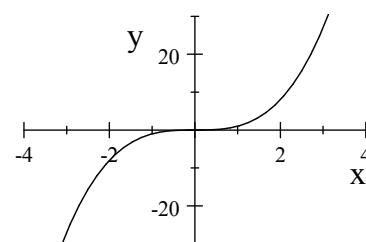
1)



2)



3)



1.6.3 Funções bijetivas.

Definição 1.5 Uma função diz-se **bijetiva** se e só se é *injectiva* e *sobrejectiva*.

Exercício 1.5 Dê um exemplo de um gráfico que represente uma função real, de variável real, *bijetiva*.

1.6.4 Funções pares e funções ímpares.

Definição 1.6 f é uma **função par** sse existem $f(x)$ e $f(-x)$ e $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Mais à frente iremos verificar que, se uma função é par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy . Isto verifica-se porque os valores da função são iguais quando os valores da variável independente x são simétricos.

Definição 1.7 f é uma **função ímpar** sse existem $f(x)$ e $f(-x)$ e $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Do mesmo modo, iremos verificar à frente que, se uma função é ímpar, o gráfico é simétrico em relação à origem do referencial. Significa isto que o gráfico da função tem a origem como centro de simetria. Note que nesta situação, os valores da função são simétricos, quando os valores da variável independente x , são simétricos.

1.6.5 Funções periódicas.

Definição 1.8 Uma função é **periódica** se existe um número a tal que

$$f(x + a) = f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

Ao menor número positivo a que verifica a igualdade anterior chama-se período.

Exemplo 1.3 $y = \sin x$ é uma função periódica de período 2π .

Com efeito:

$$\sin(x + \alpha) = \sin x; \quad \alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para $k = 1$, vem

$$\alpha = 2\pi.$$

1.7 Monotonia. Funções limitadas.

1.7.1 Funções monótonas

Definição 1.9 Uma função f diz-se **crescente** (sentido lato) em $A \subseteq D_f$ se e só se para quaisquer $x, y \in A$ se tem

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Uma função f diz-se **estritamente crescente** em $A \subseteq D_f$ se e só se para quaisquer $x, y \in A$ se tem

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Uma função f diz-se **decrecente** (sentido lato) em $A \subseteq D_f$ se e só se para quaisquer $x, y \in A$ se tem

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Uma função f diz-se **estritamente decrecente** em $A \subseteq D_f$ se e só se para quaisquer $x, y \in A$ se tem

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Observação: Refere-se que estes conceitos serão utilizados na resolução de algumas inequações à frente.

1.7.2 Funções limitadas

Definição 1.10 Uma função **limitada**, é uma função cujo contradomínio é um conjunto limitado, ou seja, um conjunto com majorantes e minorantes.

Um número real M é majorante (respectivamente m é minorante) de um conjunto A se e só se todos os elementos $a \in A$ satisfazem a relação $a \leq M$ (respectivamente $a \geq m$).

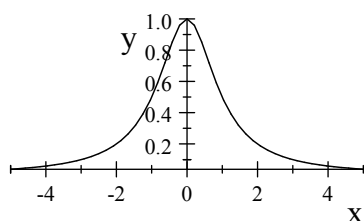
A definição de função limitada em A é equivalente à afirmação de que existe um número real L tal que

$$|f(x)| \leq L,$$

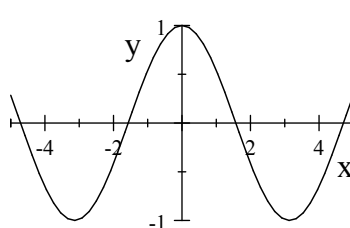
qualquer que seja $x \in A$.

Exercício 1.6 Dos seguintes gráficos de funções reais, de variável real, diga justificando quais representam funções limitadas.

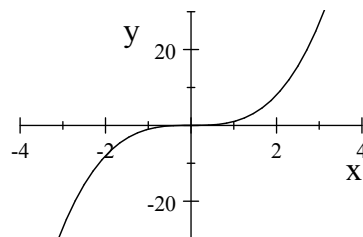
1)



2)



3)



1.8 Zeros de uma função

Definição 1.11 Zeros de uma função são os valores da variável x para os quais a função se anula.

$$x_1 \text{ é zero de } f \Leftrightarrow f(x_1) = 0$$

Exemplo 1.4 Determine os zeros das funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:

a) $f(x) = 3x + 6$;

b) $g(x) = x^2 + 5$;

c) $h(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 16)$;

d) $j(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

Resolução:

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ O zero da função f é -2

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$ (Condição impossível) A função g não tem zeros.

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4 \vee x = 4$

Os zeros de h são $-4, 1$ e 4 .

d) Temos que resolver a equação fraccionária $\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0$. O domínio da equação é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Como $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$, as soluções possíveis são -2 e 2 .

Atendendo a que ambas pertencem ao domínio, tem-se que ambas são soluções da equação. Assim os zeros da função j são -2 e 2 .

1.9 Operações com funções

Soma

Dadas duas funções, reais de variável real, f e g , chama-se soma de f com g à função que se representa por $f + g$ e que tem por

- domínio $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- expressão analítica $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Exemplo 1.5 Considere, em $\mathbb{R}$, as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

a) Calcule D_{f+g} .

b) Determine $(f + g)(3)$.

c) Defina $f + g$.

Resolução:

a) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$b) (f+g)(3) = f(3) + g(3) = \frac{3}{3-2} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

c) Resta determinar a expressão analítica de $f+g$. Tem-se:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} f+g: \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Exercício 1.7 Sejam r e t duas funções reais de variável real definidas por:

$$r(x) = 2 - \sqrt{1-x} \quad e \quad t(x) = 3 + x.$$

a) Defina $r+t$.

b) Calcule os zeros de $r+t$.

Soluções:

$$a) \quad r+t:]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad b) \quad -3.$$

$$x \longrightarrow 5 + x - \sqrt{1-x}$$

Diferença

Dadas duas funções, reais de variável real, f e g , chama-se diferença de f com g à função que se representa por $f-g$ e que tem por

- domínio $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- expressão analítica $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Produto

Dadas duas funções, reais de variável real, f e g , chama-se produto de f com g à função que se representa por $f.g$ e que tem por

- domínio $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$
- expressão analítica $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

Exemplo 1.6 Considere, em $\mathbb{R}$, as funções h e t definidas por

$$h(x) = \sqrt{x-2} - 2 \quad e \quad t(x) = \sqrt{x-2} + 2.$$

a) Determine a expressão analítica que define $h \times t$.

b) A função definida em $\mathbb{R}$ por $s(x) = x - 6$ é idêntica a $h \times t$? Justifique.

Resolução:

$$a) (h \times t)(x) = h(x) \times t(x) = (\sqrt{x-2} - 2) \times (\sqrt{x-2} + 2) = (\sqrt{x-2})^2 - 2^2 = x - 2 - 4 = x - 6$$

b) Sendo

$$D_h = D_t = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty[$$

vem

$$D_{h \times t} = D_h \cap D_t = [2, +\infty[.$$

Assim, verifica-se que têm a mesma expressão analítica mas não tem o mesmo domínio, pois $D_{h \times t} = [2, +\infty[$ e $D_s = \mathbb{R}$, logo não são idênticas.

Caso particular: Produto de um escalar por uma função

Sendo f uma função constante, por exemplo, $f(x) = \lambda \forall x \in \mathbb{R}$, o produto $f \times g$ tem por domínio D_g , representa-se por λg e a expressão analítica é dada por

$$(\lambda g)(x) = \lambda g(x), \forall x \in D_g.$$

Quociente

O quociente de duas funções, f e g , reais de variável real é uma função que tem por

- domínio $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$
- expressão analítica $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplo 1.7 Sendo $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^2 - 2x$, em $\mathbb{R}$, definir $\frac{f}{g}$.

Resolução:

Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[; D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x(x - 2) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq 2\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \end{aligned}$$

vem

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = [-1, +\infty[\cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = [-1, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$$

Expressão analítica:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x}$$

Tem-se assim:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \quad [-1, +\infty[\setminus \{0, 2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x}. \end{aligned}$$

Composição de funções

Se f e g são *f.r.v.r.*, com domínios D_f e D_g , respectivamente, define-se $f \circ g$, fazendo

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)],$$

sendo o seu domínio o conjunto

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}.$$

Observação: Transformam-se por f os elementos do contradomínio da função g .

Exemplo 1.8 Consideremos as funções reais de variável real, definidas por

$$f(x) = 2x - 1 \text{ e } g(x) = \frac{x}{x-2}$$

e caracterizemos $f \circ g$.

Resolução:

Expressão analítica de $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = 2\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{x+2}{x-2}$$

Domínio de $f \circ g$: Sendo $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, vem

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x \neq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{aligned}$$

Tem-se assim:

$$\begin{aligned} f \circ g : \quad \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x+2}{x-2}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.9 A função de domínio $[-1, 1]$ definida por $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ pode ser vista como a composta das funções $g(x) = 1-x^2$ e $f(x) = \sqrt{x}$; tem-se $y = f \circ g$.

Note que $y \neq g \circ f$ que é a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x.$$

Observação: No exemplo anterior, obtivemos expressões diferentes $f \circ g$ e $g \circ f$. Assim, é falsa a proposição:

$$\forall f, g, \quad f \circ g = g \circ f.$$

- Duas funções, f e g , dizem-se permutáveis se e só se $f \circ g = g \circ f$.

Exercício 1.8 São dadas, em $\mathbb{R}$, as funções definidas por:

$$r(x) = x^2 + 1$$

$$s(x) = \sqrt{x-5}$$

$$t(x) = x - 4.$$

a) Defina ros .

b) Justifique porque não são idênticas as funções ros e t .

Solução:

$$a) \quad ros: [5, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x - 4$$

b) Têm a mesma expressão analítica, mas os domínios são diferentes pois $D_{ros} = [5, +\infty[$ e $D_t = \mathbb{R}$.

1.10 A função identidade e função inversa

1.10.1 Função identidade

Sendo $A \subset \mathbb{R}$, chama-se função identidade à função

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow A \\ x &\longrightarrow x. \end{aligned}$$

Quando $A = \mathbb{R}$ o gráfico da função identidade é a bissectriz dos quadrantes ímpares.

1.10.2 Função inversa

Para as *f.r.v.r.* é usual e tem muito interesse, definir-se a inversa de uma função que seja, pelo menos, injectiva.

Sendo f injectiva, para que a inversa f^{-1} esteja bem definida, o domínio é o contradomínio de f e não o conjunto de chegada.

Definição 1.12 Sendo f uma função definida de D_f em D_f , a função inversa de f designa-se por f^{-1} e tem-se,

$$y = f(x), \quad x \in D_f \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad y \in D_f$$

Exemplo 1.10 A função bijectiva de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$, tem por inversa a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$.

Obtém-se a expressão designatória de f^{-1} resolvendo em ordem a x a equação $y = 2x + 5$. Tem-se:

$$y = 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$. Sendo usual designar-se os elementos do domínio por x e os transformados por y , substitui-se a letra y por x . Tem-se:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow y = \frac{x-5}{2} \end{array}.$$

Observação: O gráfico de f^{-1} pode ser obtido do de f através duma simetria sobre a recta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Note que, se f e g são funções inversas, então

$$(f \circ g)(x) = x, \quad \forall x \in D_g \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in D_f.$$

1.11 Funções Polinomiais

Definição 1.13 Uma função real de variável real, que possa ser definida por um polinómio numa variável, chama-se função polinomial.

Observação: Como uma função deste tipo, está bem definida para todo o número real, então o seu domínio é $\mathbb{R}$.

São exemplos de funções polinomiais, funções definidas por expressões do tipo:

$$2x + 1; \quad x^2 + 4x + 1; \quad (x + 1)(2x^2 - 1) + 2x; \dots$$

1.11.1 Função afim

Definição 1.14 Chama-se **função afim** numa variável real x a toda a função do tipo

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto ax + b \end{array}$$

em que a e b são números reais.

Exemplo 1.11 Mostre que a função y definida, em $\mathbb{R}$, por $y = (2x - 3)^2 - x(4x - 1)$ é uma função afim.

Resolução: • $D = \mathbb{R}$ • $y = (2x - 3)^2 - x(4x - 1) = -11x + 9$

Propriedades

Consideremos a função afim:

$$y = ax + b \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Vamos analisar dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$

1º. $a = 0$

Neste caso, tem-se uma função constante, $y = b$.

O seu gráfico é uma recta paralela ao eixo dos xx , que intersecta o eixo dos yy no ponto $(0, b)$.

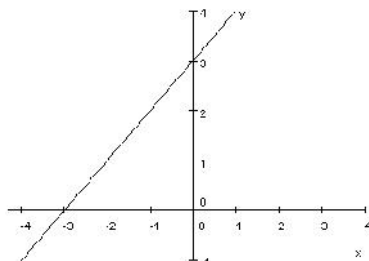
Se $b = 0$, o gráfico coincide com o eixo do xx .

A função não é injectiva pois quaisquer dois elementos diferentes têm imagens iguais (b). Verifica-se também que não é sobrejectiva visto o seu contradomínio ser $\{b\}$ e o conjunto de chegada ser $\mathbb{R}$.

Se $b \neq 0$, a função não tem zeros, mas se $b = 0$ todos os números reais são zeros da função.

2º. $a \neq 0$

A função $y = x + 3$ é deste tipo: $a = 1$ e $b = 3$.



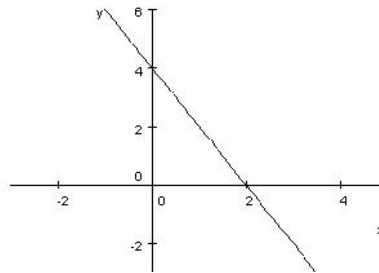
Do seu gráfico conclui-se:

- tem um zero : $x = -3$;
- é positiva se $x > -3$;
- é negativa se $x < -3$;
- é injectiva, quaisquer dois objectos diferentes têm imagens diferentes, isto é,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

- é sobrejectiva, visto que o contradomínio é igual ao conjunto de chegada, isto é $D'_y = \mathbb{R}$;
- é crescente.

Consideremos agora a função afim $y = -2x + 4$ em que $a = -2$ e $b = 4$.



Do seu gráfico conclui-se:

- tem um zero : $x = 2$;
- é positiva se $x < 2$;
- é negativa se $x > 2$;
- é injectiva, quaisquer dois objectos diferentes têm imagens diferentes, isto é,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

- é sobrejectiva, visto que o contradomínio é igual ao conjunto de chegada, isto é $D'_y = \mathbb{R}$;
- é decrescente.

Consideremos agora o caso geral, isto é, $y = ax + b$ com $a \neq 0$.

$$\text{Zeros} \quad y = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Função positiva	Função negativa
Se $a > 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$	$ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$
Se $a < 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$	$ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

- É injectiva, isto é, é verdadeira a proposição

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

- é sobrejectiva.

Invertendo a função, tem-se:

$$\begin{aligned} y = ax + b &\Leftrightarrow y - b = ax \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a}. \end{aligned}$$

O domínio da função inversa é $\mathbb{R}$, portanto o contradomínio da função é também $\mathbb{R}$, o que prova a sobrejectividade.

1.11.2 Função quadrática

Definição 1.15 Função quadrática é toda a função que pode ser definida por um polinómio do 2º grau numa variável real.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow ax^2 + bx + c \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0. \end{aligned}$$

Zeros

Os zeros da função quadrática são as soluções da equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Refere-se, que muitas vezes há interesse em saber se a função quadrática tem ou não zeros, independentemente de se conhecer o seu valor.

Nesta situação, calculando o sinal de

$$b^2 - 4ac$$

que se chama “discriminante ” e representa-se por Δ , tem-se:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ há dois zeros reais : $\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ há um zero real (duplo): $x_1 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ Não há zeros reais.

Exemplo 1.12 Calcule os zeros de cada uma das funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:

$$a) f(x) = 3x^2; \quad b) g(x) = 2x^2 + 3; \quad c) h(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Resolução:

$$a) f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{Zero: } 0.$$

$$b) g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \quad \text{Não tem zeros.}$$

$$c) h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \quad \text{Zeros: } 1; 2.$$

Exercício 1.9 Determine k , de modo que a expressão $2x^2 - 3x + k$, defina uma função quadrática com:

$$a) \text{ dois zeros; } \quad b) \text{ um zero; } \quad c) \text{ nenhum zero.}$$

Resolução:

$$a) \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4 \cdot 2 \cdot k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{9}{8}; \quad b) \Delta = 0 \Leftrightarrow 9 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{9}{8};$$

$$c) \Delta < 0 \Leftrightarrow 9 - 4.2.k < 0 \Leftrightarrow k > \frac{9}{8}.$$

Estudo gráfico da função quadrática

Começemos por representar o gráfico de funções do tipo

$$x \rightarrow y = ax^2, \quad a \neq 0 \text{ e } b = c = 0.$$

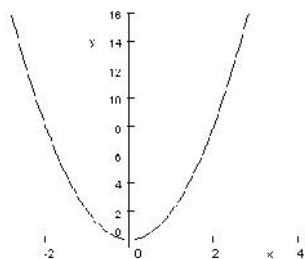
1.º. **Caso:** $a > 0$

Consideremos a função definida por $y = 2x^2$, cujo domínio é $\mathbb{R}$.

Considerando um referencial cartesiano ortogonal e monométrico, começemos por determinar alguns pontos.

- Se $x = 0$ vem $y = 0$; $(0, 0)$
- Se $x = 1$ vem $y = 2$; $(1, 2)$
- Se $x = 2$ vem $y = 8$; $(2, 8)$
- Se $x = -1$ vem $y = 2$; $(-1, 2)$
- Se $x = -2$ vem $y = 8$; $(-2, 8)$

Fazendo a marcação destes pontos e unindo-os de seguida por uma linha contínua obtém-se a representação gráfica de $y = 2x^2$,



Esta linha chama-se parábola e, tem como eixo de simetria o eixo dos yy ; o ponto $(0, 0)$ situado sobre este eixo denomina-se vértice da parábola.

Da observação do gráfico conclui-se ainda:

- é decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$ e crescente no intervalo $]0, +\infty[$;
- não é injectiva (justifique);
- tem como contradomínio o intervalo $[0, +\infty[$;
- tem a concavidade voltada para a parte positiva do eixo dos yy (para cima);
- não é sobrejectiva (justifique);
- é uma função par (justifique).

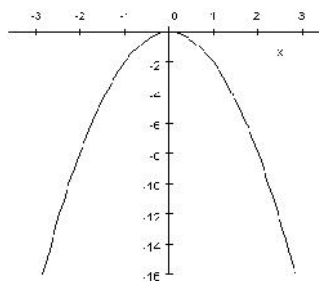
2º. Caso: $a < 0$

Consideremos a função definida por $y = -2x^2$, cujo domínio é $\mathbb{R}$.

Tal como no exemplo anterior, atribuímos diferentes valores a x e calculamos os correspondentes valores de y

- Se $x = 0$ vem $y = 0$; $(0, 0)$
- Se $x = 1$ vem $y = -2$; $(1, -2)$
- Se $x = 2$ vem $y = -8$; $(2, -8)$
- Se $x = -1$ vem $y = -2$; $(-1, -2)$
- Se $x = -2$ vem $y = -8$; $(-2, -8)$

Tem-se:



Obteve-se assim uma parábola com:

- vértice na origem;
- concavidade no sentido negativo do eixo dos yy (voltada para baixo);
- eixo de simetria coincidente com o eixo dos yy .
- contradomínio o intervalo $]-\infty, 0]$.

E a função é:

- decrescente no intervalo $]0, +\infty[$ e crescente no intervalo $]-\infty, 0[$;
- não injectiva (justifique);
- não sobrejectiva (justifique);
- par (justifique).

Observação:

Uma parábola tem:

- um eixo de simetria;
- o vértice (ponto da parábola que pertence ao eixo de simetria);
- concavidade voltada para cima se $a > 0$;
- concavidade voltada para baixo se $a < 0$.

Vamos agora mostrar como representar o gráfico da função quadrática (caso geral), isto é, $y = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

É fácil verificar que para obter o gráfico de uma função quadrática, basta determinar as coordenadas do vértice e os seus zeros, caso existam.

Exemplo 1.13 Consideremos para tal, as funções definidas por:

a) $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$;

b) $g(x) = x^2 - 10x + 25$;

c) $h(x) = x^2 + 4x + 5$.

Resolução:

a)

• Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$

• Coordenadas do vértice:

Atendendo a que a parábola tem um eixo de simetria, o vértice vai estar exactamente a meio dos zeros, ou melhor, a abcissa do vértice é a média dos zeros da função.

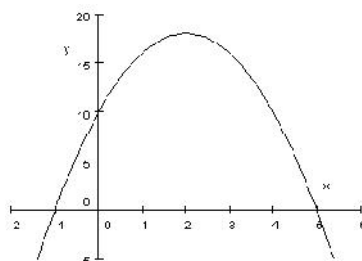
Assim a abcissa do vértice é $x_v = \frac{-1 + 5}{2} = 2$.

A ordenada do vértice será $y_v = f(2) = -8 + 16 + 10 = 18$

Tem-se assim:

$$V \longrightarrow (2, 18).$$

Atendendo a que a concavidade é virada para baixo ($a = -2 < 0$), podemos representar o gráfico da função, tendo-se:

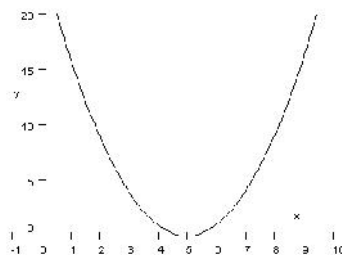


b)

• Zeros: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Neste caso o zero é o vértice da função, visto a parábola ser tangente ao eixo das abcissas.

Sendo $a = 1 > 0$ (concavidade virada para cima), vem:



c)

- Zeros: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$ (Equação impossível em $\mathbb{R}$)

Como a função não tem zeros, vamos arranjar dois pontos com a mesma imagem.

O vértice ficará no meio deles dada a simetria da parábola.

O mais fácil nesta situação é procurar os objectos cuja imagem seja 5 porque a equação do 2º grau a resolver se simplifica. Tem-se:

$$\begin{aligned} h(x) = 5 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 5 &\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 &\Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4. \end{aligned}$$

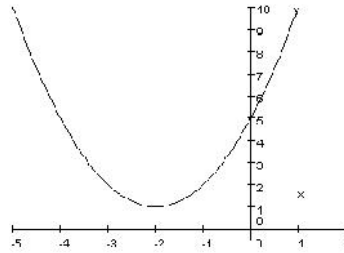
A abcissa do vértice é a média destas duas abcissas: $x_v = \frac{0 + (-4)}{2} = -2$.

A ordenada é $y_v = h(-2) = 4 - 8 + 5 = 1$.

Temos então que

$$V \longrightarrow (-2, 1).$$

Sendo $a = 1 > 0$ (concavidade virada para cima) vem:



Observação:

Devido à simetria da parábola, a abcissa do vértice fica sempre a igual distância de dois objectos com a mesma imagem. Assim, podemos sempre seguir o método exposto no exemplo anterior para facilmente encontrar as coordenadas do vértice. Fazemos então:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = c &\Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \\ &\Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

A abcissa do vértice é a média destes dois valores: $x_v = -\frac{b}{2a}$.

A ordenada do vértice é $y_v = f(x_v)$.

Tem-se assim:

$$\boxed{V \longrightarrow (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right)}.$$

1.11.3 Inequações do 2º. grau

Chama-se inequação do 2º. grau na variável x a toda a condição que se possa reduzir à forma

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c < 0$$

com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Nota: São ainda inequações do 2º. grau as condições:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ e } ax^2 + bx + c \leq 0$$

com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para resolver inequações do 2º. grau basta estudar o sinal da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$.

Note que, qualquer função quadrática, toma o sinal de a fora do intervalo dos zeros, e o sinal contrário ao de a dentro do intervalo dos zeros.

Exemplo 1.14 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

$$a) x^2 - 4x + 3 > 0; \quad b) 5x - 2x^2 + 7 \geq 4;$$

$$c) x^2 + 4 < 3x; \quad d) \frac{x+2}{1-x} < \frac{2}{2x+1}.$$

Resolução:

$$a) x^2 - 4x + 3 > 0$$

C.A.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

Sabendo que a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ toma o sinal contrário ao de a quando x pertence ao intervalo dos zeros e o sinal de a fora desse intervalo, tem-se:

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[.$$

$$b) 5x - 2x^2 + 7 \geq 4 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x + 3 \geq 0.$$

C.A.

$$-2x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$$

Sabendo que a função $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ toma o sinal contrário ao de a quando x pertence ao intervalo dos zeros e o sinal de a fora desse intervalo, tem-se:

$$-2x^2 + 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right].$$

$$c) x^2 + 4 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

C.A.

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}; \text{ (equação impossível em } \mathbb{R} \text{)}$$

A função $f(x) = x^2 - 3x + 4$ não tem zeros e, portanto, toma sempre o sinal de a . Assim, a inequação é uma condição impossível.

$$d) \frac{x+2}{1-x} < \frac{2}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} - \frac{2}{2x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+7x}{(1-x)(2x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x+7)}{(1-x)(2x+1)} < 0$$

Para resolver a inequação, podemos recorrer a um quadro de sinais. Temos então:

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1	$+\infty$
$2x^2 + 7x$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$-2x^2 + x + 1$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$\frac{2x^2 + 7x}{-2x^2 + x + 1}$	-	0	+	s/s	-	0	+	s/s	-

Verifica-se que as soluções da inequação são os valores de x tais que:

$$x \in \left] -\infty, -\frac{7}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\cup] 1, +\infty[.$$

2 Limites de funções reais de variável real.

2.1 Noções topológicas

Definição 2.1 Dados dois números reais x e y , chama-se **distância** de x a y ao valor absoluto da sua diferença:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Exemplo 2.1 Determine a distância entre os números reais:

$$a) 2 \text{ e } 3; \quad b) 0 \text{ e } -3; \quad c) -\frac{1}{2} \text{ e } -\frac{3}{4}.$$

Resolução:

$$a) d(2, 3) = |2 - 3| = |-1| = 1 \quad b) d(0, -3) = |0 - (-3)| = |3| = 3$$

$$c) d\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

Definição 2.2 Sendo a um número real qualquer e δ um número real positivo, chama-se **vizinhança de centro a e raio δ** ao conjunto dos números reais cuja distância a a é inferior a δ .

$$\begin{aligned} V_\delta(a) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \\ &=]a - \delta, a + \delta[. \end{aligned}$$

Exemplos 2.2 Considere as seguintes vizinhanças:

$$\begin{aligned} 1) V_{0,1}(2) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 0,1\} =]1,9; 2,1[\\ 2) V_{0,01}(0) &= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 0,01\} =]-0,01; 0,01[\end{aligned}$$

Exercício 2.1 Determine um valor de δ de modo que :

$$a) V_\delta(3) \subset V_{0,1}(3); \quad b) V_\delta(3) \subset]2,5; 3,02[.$$

Definição 2.3 Sejam C um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a um elemento de C . Diz-se que a é **ponto interior** de C se e só se existe pelo menos uma vizinhança de a contida em C .

$$a \text{ é ponto interior de } C \Leftrightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : V_\delta(a) \subset C$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores de C chama-se **interior de C** e representa-se por $\text{int } C$.

Exemplos 2.3 1) Seja $C =]1, 2[$.

O ponto 1,6 é ponto interior de C , porque

$$V_{0,1}(1,6) \subset]1, 2[.$$

Já 2 não é ponto interior de C , pois qualquer vizinhança de 2 possui pontos que não pertencem a $]1, 2[$.

O interior de C é o próprio conjunto C .

2) Sendo $B =]-\infty, 3] \cup \{5\}$, o interior de B é o conjunto $\text{int}(B) =]-\infty, 3[$.

Definição 2.4 Sejam C um subconjunto de $\mathbb{R}$ e b um número real; b diz-se **ponto fronteiro** de C se e só se as intersecções de qualquer vizinhança de b com C e com o seu complementar forem ambas não vazias.

$$b \text{ é ponto fronteiro de } C \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathbb{R}^+, V_\delta(b) \cap C \neq \emptyset \wedge V_\delta(b) \cap \mathbb{R} \setminus C \neq \emptyset$$

Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de C chama-se **fronteira** de C e representa-se por $\text{Fr}(C)$.

Exemplo 2.4 Relativamente ao conjunto $]1, 2[$, os pontos fronteiros são 1 e 2 e a fronteira é o conjunto $\{1, 2\}$.

Exemplo 2.5 Seja $B =]-\infty, 3] \cup \{5\}$. Então $\text{Fr}(B) = \{3, 5\}$.

Exercício 2.2 Determine o interior e a fronteira de cada um dos conjuntos de números reais:

$$a) A = \{2, 3\} \cup]4, 5[; \quad b) B = \left] -3, \frac{1}{2} \right[; \quad c) C = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq 3\}.$$

Exercício 2.3 Dê um exemplo de um conjunto que:

a) coincida com a sua fronteira; b) coincida com o seu interior.

Definição 2.5 Sejam C um subconjunto de $\mathbb{R}$ e d um número real; diz-se que d é **ponto de acumulação** de C se e só se em qualquer vizinhança de d existe pelo menos um elemento de C diferente de d .

$$d \text{ é ponto de acumulação de } C \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists a \in C : a \neq d \wedge a \in V_\delta(d)$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto C chama-se **derivado** de C e representa-se por C' .

Chama-se **ponto isolado** de C a um elemento de C que não é ponto de acumulação.

Exemplo 2.6 Seja $A =]1, 2[\cup \{3\}$. Tem-se $A' = [1, 2]$, 3 é ponto isolado de A .

2.2 Definição de limite de uma função

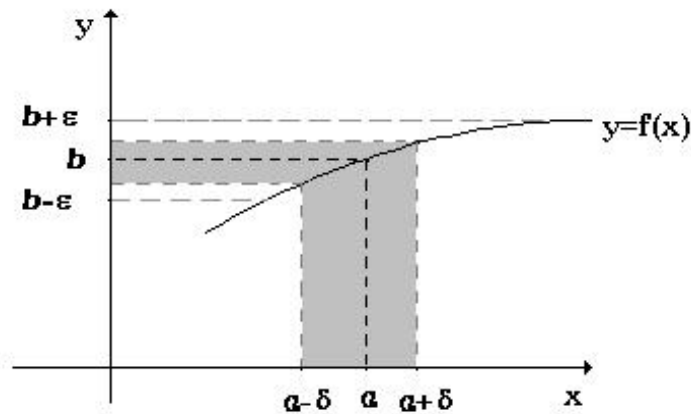
Definição de Cauchy

Seja f uma função real de variável real e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do seu domínio. Diz-se que o *limite de f quando x tende para a* é o número real b se e só se para toda a vizinhança de b de raio ε existe uma vizinhança de a de raio δ tal que

$$x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b),$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



• O limite de f quando x tende para a dá-nos o comportamento da função quando x é vizinho de a não havendo necessidade de f estar definida em a .

• Para tal é necessário que f esteja definida numa vizinhança de a , excepto possivelmente em a , daí que a definição exija que a seja um ponto de acumulação do domínio de f .

Observações:

1) Se b é o limite de f quando x tende para a , esse limite é o único.

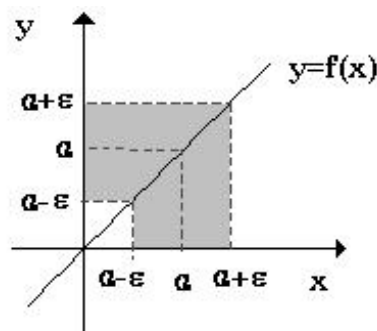
2) Se b é o limite de f quando x tende para a , b é um número real.

Em caso algum, b é uma expressão com variáveis.

3) A afirmação “ b é o limite da função f ” não tem qualquer sentido se não indicar a condição “quando x tende para a ”.

Exemplo 2.7 Dada a função definida por $f(x) = x$, represente-a graficamente e verifique (graficamente) que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$.

Resolução:



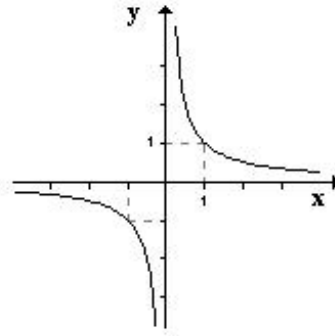
Em primeiro lugar $D_f = \mathbb{R}$ pelo que todos os pontos são de acumulação.

Basta tomar $\delta = \varepsilon$ para ter a certeza que para todo $\varepsilon > 0$

$$x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(a).$$

2.3 Extensão da noção de limite

Considere-se a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \frac{1}{x}$.



Vamos examinar o comportamento de f nas vizinhanças de zero.

$$x = 0,000\,0001, \quad f(x) = 10\,000\,000$$

$$x = -0,000\,0001, \quad f(x) = -10\,000\,000$$

$$x = 0,000\,000\,001, \quad f(x) = 1\,000\,000\,000$$

$$x = -0,000\,000\,001, \quad f(x) = -1\,000\,000\,000$$

Estes exemplos mostram que, a valores de x “muito pequenos” em módulo, correspondem imagens $f(x)$ “muito grandes” em módulo.

Estudemos agora o comportamento de f para valores de x “grandes” em módulo.

Como no exemplo anterior, considerem-se os casos seguintes :

$$\begin{aligned}x &= 10\,000\,000, & f(x) &= 0,000\,0001 \\x &= -10\,000\,000, & f(x) &= -0,000\,0001 \\x &= 1\,000\,000\,000, & f(x) &= 0,000\,000\,001 \\x &= -1\,000\,000\,000, & f(x) &= -0,000\,000\,001\end{aligned}$$

A valores de x muito grandes em módulo correspondem imagens $f(x)$ muito pequenas em módulo.

Vamos agora estudar o caso geral das funções cujos valores se tomam arbitrariamente grandes numa vizinhança de um número a , ou arbitrariamente próximos de um valor b para valores “grandes” de x . Para tal é útil a introdução de dois números que não são números reais; um que é maior que todos os números reais, o outro menor que todos os números reais. Estes dois números correspondem às noções intuitivas de infinito positivo e infinito negativo.

Considerem-se dois elementos, não reais, representados por $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito), verificando as seguintes condições:

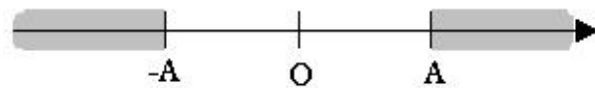
$$\begin{aligned}+\infty &\notin \mathbb{R} & -\infty &\notin \mathbb{R}; \\ \forall x \in \mathbb{R} & & x < +\infty & ; \forall x \in \mathbb{R} ; -\infty < x; \\ \forall x \in \mathbb{R} & & x + \infty &= +\infty + x = +\infty; \\ \forall x \in \mathbb{R} & & x - \infty &= -\infty + x = -\infty; \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & & |x| \times (+\infty) &= (+\infty) \times |x| = +\infty; \\ \forall x \in \mathbb{R} & & \left| \frac{x}{+\infty} \right| &= \left| \frac{x}{-\infty} \right| = 0; \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & & \left| \frac{x}{0} \right| &= +\infty; \\ (-1) \times (+\infty) &= -\infty; & (-1) \times (-\infty) &= +\infty; \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty; & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty; \\ (+\infty) \times (+\infty) &= +\infty.\end{aligned}$$

Estas regras de cálculos foram estabelecidas de acordo com a noção intuitiva de número maior que todos os outros.

Representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$ o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ munido com a adição e a multiplicação usuais completadas pelas condições que definem o cálculo para os elementos infinitos.

Observação: Insistimos sobre o facto que os seguintes elementos não estão definidos em $\overline{\mathbb{R}}$: $\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Uma vizinhança de $+\infty$ (resp. $-\infty$) é qualquer intervalo V_A (resp. V_{-A}) da forma $]A, +\infty[$ (resp. $] -\infty, -A[$), onde A é um número real positivo.



Tem-se

$$x \in]A, +\infty[\Leftrightarrow x > A$$

$$x \in]-\infty, -A[\Leftrightarrow x < -A.$$

A definição de Cauchy pode agora generalizar-se aos casos em que a e b não são finitos. Se a for infinito, $V_\delta(a)$ dá lugar a V_A e se b for infinito, $V_\varepsilon(b)$ é substituída por V_B .

Temos assim:

$$1) \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$2) \quad a \in \mathbb{R}, b = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_B \\ &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > B \end{aligned}$$

$$3) \quad a \in \mathbb{R}, b = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_{-B} \\ &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -B \end{aligned}$$

$$4) \quad a = +\infty, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x \in V_A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$5) \quad a = +\infty, b = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x \in V_A \Rightarrow f(x) \in V_B \\ &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow f(x) > B \end{aligned}$$

$$6) \quad a = +\infty, b = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x \in V_A \Rightarrow f(x) \in V_{-B} \\ &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow f(x) < -B \end{aligned}$$

$$7) \quad a = -\infty, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x \in V_{-A} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$8) \quad a = -\infty, b = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x \in V_{-A} \Rightarrow f(x) \in V_B \\ &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow f(x) > B \end{aligned}$$

$$9) \quad a = -\infty, b = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x \in V_{-A} \Rightarrow f(x) \in V_{-B} \\ &\Leftrightarrow \forall B > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow f(x) < -B \end{aligned}$$

Exemplo 2.8 Dada a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, tem-se:

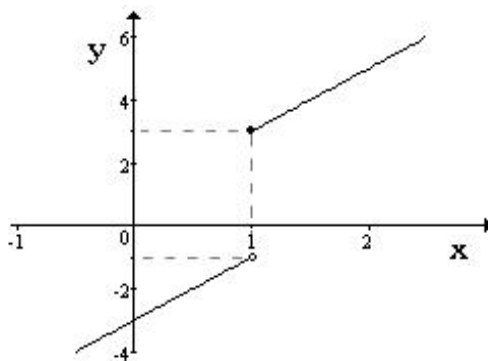
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Quando x tende para zero, a imagem de $f(x)$ não se aproxima de nenhum elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Isto ocorre pois quando x tende para zero e x é positivo, $f(x)$ é arbitrariamente grande positivo, mas se x é negativo, $f(x)$ é arbitrariamente grande negativo.

2.4 Limites laterais

Considere-se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$



Observando o gráfico da função concluímos que:

- Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- Se, em vez de trabalharmos com $x \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$, considerarmos apenas os valores de x superiores a 1, isto é $x \in]1, 1 + \varepsilon[$, então $f(x)$ aproxima-se de 3, diremos que o limite da função à direita de 1 é 3. Escreve-se :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3.$$

- Se em vez de trabalharmos com $V_\varepsilon(1)$, considerarmos apenas os valores de x inferiores a 1, isto é, $x \in]1 - \varepsilon, 1[$, verificamos que $f(x)$ tende para -1 , diremos que o limite de f à esquerda de 1 é igual a -1 . Escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1.$$

Definição 2.6 *Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f . Diz-se que b é o **limite de f à esquerda** (resp. **direita**) de a se para todo o $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in V_\delta(a) \wedge x < a \text{ (resp. } x > a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b),$$

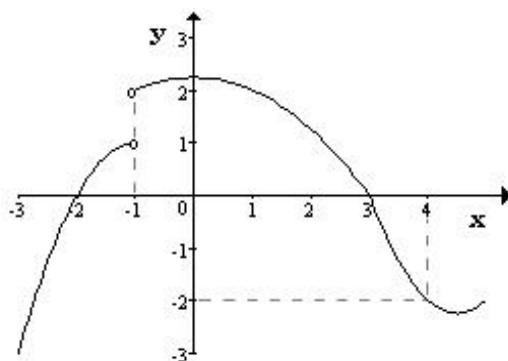
(com as devidas alterações caso b seja infinito).

Teorema 2.1 *Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio. Para $b \in \overline{\mathbb{R}}$,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b.$$

Observação: Resulta deste teorema que se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ então não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemplo 2.9 *Observe-se o seguinte gráfico de uma função f .*



- Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2,$$

pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Note-se que -1 não é ponto do domínio mas é um ponto de acumulação do domínio.

- Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0,$$

pelo que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$.

Note-se que 3 não é ponto do domínio mas é um ponto de acumulação do domínio.

- Finalmente $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2$. (justifique)

Exercício 2.4 Seja t a função definida por $t(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 - x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

a) O ponto 0 é ponto de acumulação de D_t ? Justifique.

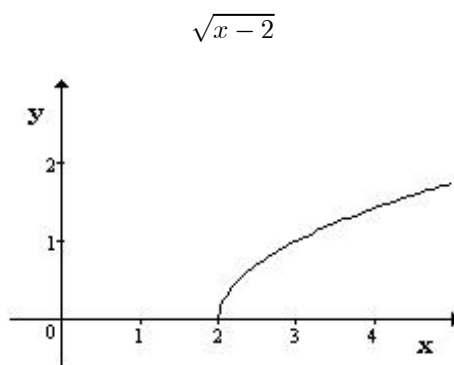
b) Esboce o gráfico da função.

c) Gráficamente, determine $\lim_{x \rightarrow 0^+} t(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} t(x)$.

d) Existe $\lim_{x \rightarrow 0} t(x)$? Justifique.

Observação: Se a função está definida apenas à direita (resp. esquerda) de a , então o valor do limite de f quando x tende para a coincide com o limite à direita (resp. esquerda) de a .

Exemplo 2.10 Considere-se a função definida por $f(x) = \sqrt{x-2}$ cujo gráfico é o seguinte:



Verifica-se que:

- O domínio de f é $D_f = [2, +\infty[$.
- O número 2 é ponto de acumulação do domínio mas só podemos considerar valores de x superiores a 2.

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0.$$

2.5 Propriedades dos limites de funções

As propriedades dos limites vão permitir-nos calcular limites sem recorrer à definição.

P1. Unicidade do limite

Se existir o limite de f quando x tende para $a \in \overline{\mathbb{R}}$, este será único.

Demonstração:

Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

com $b, c \in \mathbb{R}$ (caso b ou c sejam infinitos o raciocínio é semelhante).

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então existem δ_1 e δ_2 tais que

$$x \in V_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)$$

e

$$x \in V_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(c).$$

Considere-se $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Então para

$$x \in V_\delta(a) \setminus \{a\},$$

tem-se

$$f(x) \in V_\varepsilon(b) \cap V_\varepsilon(c),$$

o que quer dizer que

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Tem-se, pelas propriedades dos módulos,

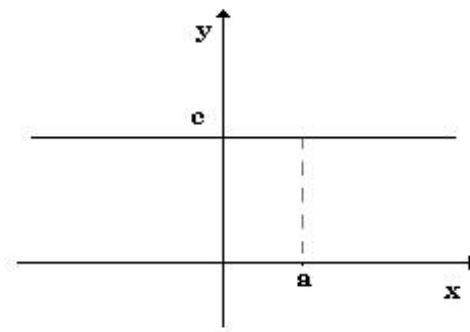
$$|b - c| = |b - f(x) + f(x) - c|$$

$$\begin{aligned} |b - c| &= |b - f(x) + f(x) - c| \\ &\leq |f(x) - b| + |f(x) - c| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Sendo ε arbitrário resulta que $|b - c| = 0$, isto é, $b = c$. Consequentemente $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é único.

P2. Limite de uma constante

Se f é uma constante então o limite de f quando x tende para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é a própria constante.



Exercício 2.5 *Determine :*

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} 5; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4); \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} 0.$$

P3. Limite de uma soma

Se f e g tendem para b e c , elementos de $\overline{\mathbb{R}}$, quando x tende para $a \in \overline{\mathbb{R}}$, (exceptuando o caso em que b e c são ambos infinitos de sinais contrários) então a função $f + g$ tende para $b + c$ quando x tende para a .

Observação: O caso em que b e c são infinitos de sinais contrários, chama-se **indeterminação** $\infty - \infty$, e tem que ser analisado caso a caso.

Exemplo 2.11 *Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$.*

Resolução: *Atendendo às propriedades dos limites vem*

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 2 + 3 = 5.$$

Exercício 2.6 *Determine:*

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2); \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x); \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5); \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x).$$

P4. Limite de um produto

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, com $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, exceptuando-se o caso $b = \infty$ e $c = 0$ (ou $b = 0$ e $c = \infty$), então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = b \cdot c$$

Observação: No caso em que $b = \infty$ e $c = 0$ tem-se uma **indeterminação** do tipo $0 \times \infty$, como tal, tem de ser analisado caso a caso.

Exercício 2.7 *Utilize esta propriedade para justificar que:*

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (k \text{ constante});$$
$$b) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^2, \text{ mais geralmente } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n.$$

Exemplo 2.12 *Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 + 2x + 1)$.*

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 + 2x + 1) = 4 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 4 \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 + 2 \times 1 + 1 = 4 \times 1^2 + 2 + 1 = 7.$$

Exercício 2.8 *Determine:*

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 2); \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 4); \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 7).$$

P5. Limite de um quociente

Suponhamos que f e g tendem para b e c respectivamente quando x tende para a , exceptuando os casos de ambos serem nulos ou ambos infinitos, então $\frac{f}{g}$ tende para $\frac{b}{c}$ quando x tende para a .

Exemplo 2.13 Determine $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1}$.

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Exercício 2.9 Determine:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x^2}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x - 1}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x+1}.$$

P6. Limite de uma raiz

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $p \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{b}$, admitindo no caso de p ser par, que $f(x) \geq 0 \forall x \in D_f$.

Observação: Caso b seja infinito, $\sqrt[p]{b}$ também será infinito.

Exemplo 2.14 Calcule $\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{5x}{6 - \sqrt{5x-4}}$.

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{5x}{6 - \sqrt{5x-4}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 8^-} 5x}{\lim_{x \rightarrow 8^-} (6 - \sqrt{5x-4})} = \frac{40}{6 - \sqrt{\lim_{x \rightarrow 8^-} (5x-4)}} = \frac{40}{0^+} = +\infty.$$

Exercícios 2.10

1) Determine:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{10 + 5x - x^3}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + x); \quad c) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x-3}{x+1};$$
$$d) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x-3}{x+1}; \quad e) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x-3}.$$

2) Seja a função h definida, em $\mathbb{R}$, por

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 3 \\ x^2 - 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}.$$

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 5} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

b) Investigue se existe $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$, calculando $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$.

3) Considere, em $\mathbb{R}$, as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad e \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

a) Mostrar que não existem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

b) Definir, em $\mathbb{R}$, a função $f + g$ e calcular, se existir, $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$.

c) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x)$.

4) Considere as funções reais, de variável real, f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} \quad e \quad g(x) = 1 - \frac{3}{x}.$$

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$.

5) É dada a função t definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$t(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

Investigue se existe:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} t(x)$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} t(x)$.

2.6 Indeterminações

Nas situações em que a aplicação das propriedades não permite chegar a um resultado, estamos em presença de operações não definidas em $\overline{\mathbb{R}}$, a que chamamos **indeterminações**.

A resolução destas indeterminações deve ser feita caso a caso.

Vamos então analisar os métodos de resolução para as indeterminações do tipo $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Consideremos em primeiro lugar que x tende para a (finito).

Vamos verificar que todas as indeterminações se podem reduzir à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Exemplos 2.15

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Resolução: Aplicando o teorema do limite do quociente obtemos $\frac{0}{0}$, o que mostra que 1 anula os termos da fracção. Efectuando a divisão por, $x - 1$ pela regra de Ruffini vem:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -3 & 2 \\ & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} .$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)(x-2)}.$$

Como o limite se calcula quando x tende para 1 por valores diferentes de 1, vem $x - 1 \neq 0$ e, consequentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} = -1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

Resolução: Aplicando os teoremas sobre limites obtemos $\frac{0}{0}$. Vamos multiplicar ambos os termos da fracção por $\sqrt{x} + 3$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x^2 - 4}{x} \times \frac{3x + 1}{(x - 2)^2} \right].$$

Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$ (porquê?) mas, se efectuarmos a multiplicação, vem

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - 4)(3x + 1)}{x(x - 2)^2},$$

que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Tem-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x^2 - 4}{x} \times \frac{3x + 1}{(x - 2)^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - 4)(3x + 1)}{x(x - 2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)(3x + 1)}{x(x - 2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2)(3x + 1)}{x(x - 2)} \\ &= \frac{4 \times 7}{2 \times 0^+} = +\infty \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\frac{2x}{x^2 - 4}}{\frac{5}{x + 2}}.$$

Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Se efectuarmos previamente as operações indicadas obtém-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Vem:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\frac{2x}{x^2-4}}{\frac{5}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x(x+2)}{5(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x(x+2)}{5(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x}{5(x-2)} = \frac{1}{5}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} \right).$$

Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Efectuando a adição vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1+(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty. \end{aligned}$$

2) Em segundo lugar vamos estudar os casos em que x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

De um modo geral as indeterminações reduzem-se ao tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplos 2.16

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 7x + 3}{8x^2 + 6x + 1} \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Resolução: Dividindo ambos os termos da fracção por x^2 , vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 7x + 3}{8x^2 + 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}}{8 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{6+0+0}{8+0+0} = \frac{3}{4}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} \sqrt{x^2+1} \quad (0 \times \infty).$$

Resolução: Dividindo ambos os termos por da fracção por $|x|$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{|x|}} = \frac{\sqrt{1+0}}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x^2+1}}{\frac{x^2}{2x^4+1}} \left(\frac{0}{0} \right).$$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x^2+1}}{\frac{x^2}{2x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x(2x^4+1)}{(x^2+1)x^2} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5+4x}{x^4+x^2}.$$

Dividindo ambos os termos da fração por x^5 , vem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 + 4x}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 + \frac{4}{x^4}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{8 + 0}{0^-} = -\infty$$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) (\infty - \infty).$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \right] = +\infty$$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) (\infty - \infty).$

Resolução: Multiplicando e dividindo ambos os termos da fração por $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}$, vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos da fração por x , vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}.$$

Exercícios 2.11 Calcule cada um dos seguintes limites:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 5x + 2};$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4};$ | c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1};$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + x^2 - 5x + 3};$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x}};$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1};$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x^3 - x^2};$ | h) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 - \sqrt{x + 4}}{x + 3};$ | i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^2 - 1) \frac{3x + 2}{x - 1} \right];$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \frac{4x + 3}{x^2 + 3x} \right];$ | k) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left[(x + 3) \frac{5}{9 + x^2 + 6x} \right];$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x + 1}{x^2}};$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{1 - x}}{\frac{x + 2}{x^2 - 1}};$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right);$ | o) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{4 - x^2} - \frac{1}{x + 2} \right);$ |
| p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 7x}{2 - x};$ | q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{x^2 + 3x + 2};$ | r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x}{7x^2 - 3};$ |
| s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + 9};$ | t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x^2 + 1} (x + 3) \right];$ | u) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{3x^2 + 1} \frac{1}{x} \right);$ |
| v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x);$ | w) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 3x + 1);$ | x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x});$ |
| y) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - x} + x).$ | | |

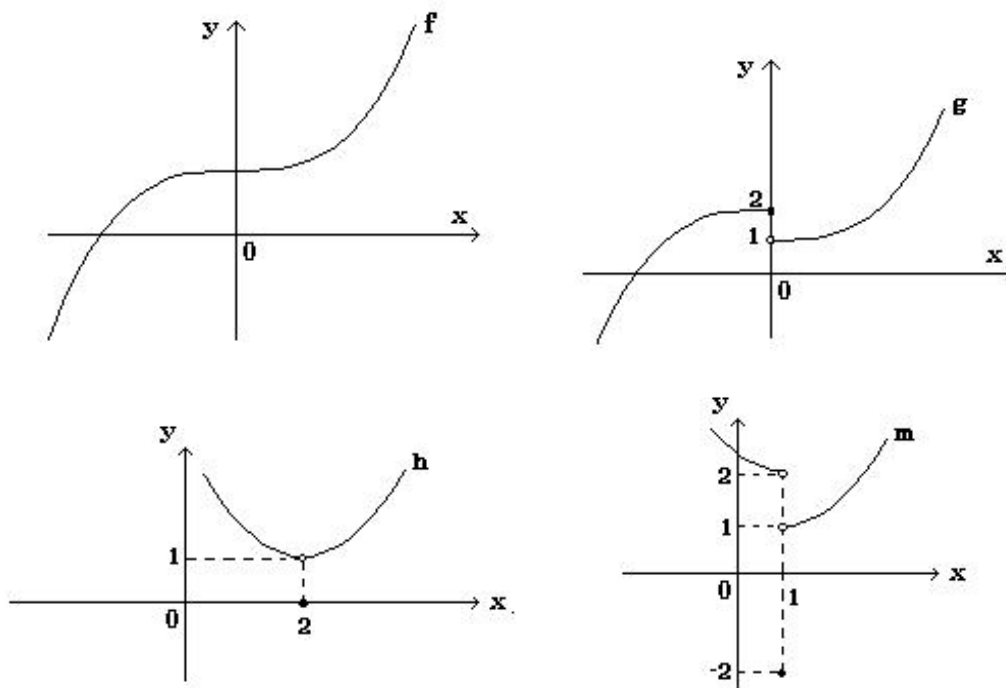
Soluções:

- | | | | |
|--------------------|-------------------|---------------|--------------------|
| a) $\frac{1}{3};$ | b) $\frac{2}{3};$ | c) $3;$ | d) $+\infty;$ |
| e) $0;$ | f) $2;$ | g) $+\infty;$ | h) $-\frac{1}{2};$ |
| i) $10;$ | j) $0;$ | k) $-\infty;$ | l) $10;$ |
| m) $-\frac{2}{3};$ | n) $-\infty;$ | o) $-\infty;$ | p) $-7;$ |
| q) $2;$ | r) $-\infty;$ | s) $0;$ | t) $1;$ |
| u) $\frac{1}{3};$ | v) $-\infty;$ | w) $+\infty;$ | x) $0;$ |
| y) $-\infty.$ | | | |

3 Continuidade de funções reais de variável real.

3.1 Função contínua e função descontínua num ponto

Exemplos 3.1 Considerem-se as funções f , g , h e m reais de variável real definidas pelos seus gráficos.



Intuitivamente podemos afirmar que a função f é a única que é contínua em todos os pontos do seu domínio pois é a única cujo gráfico se pode desenhar sem levantar o lápis do papel.

A função h não é contínua no ponto $x = 2$, ela seria contínua se a imagem do ponto 2 fosse 1, de modo que o seu gráfico fosse uma parábola completa. Observe-se que $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 1$ mas $h(2) = 0$, daí a descontinuidade no ponto $x = 2$.

A função g não é contínua no ponto no ponto $x = 0$. De facto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2 = g(0).$$

Diremos que g é contínua à esquerda em $x = 0$ pois se restringíssemos o domínio de g a $]-\infty, 0]$, a função obtida seria contínua em $x = 0$.

A função m não é contínua em $x = 1$, nem à esquerda nem à direita. De facto não existe $\lim_{x \rightarrow 1} m(x)$ uma vez que os limites laterais são diferentes e, além disso, diferem ambos de $m(1)$ que é igual a -2 .

Definição 3.1 Seja a um ponto de acumulação do domínio de uma função real de variável real f . Diz-se que f é **contínua no ponto a** se e só se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Caso não exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou este seja diferente de $f(a)$, diremos que f é **descontínua em $x = a$** .

Diz-se que f é **contínua à direita** (resp. **esquerda**) de a se e só se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)).$$

Observações:

Não faz qualquer sentido falar em continuidade ou em descontinuidade de uma função f num ponto a que não pertença ao domínio (não existiria $f(a)$) ou num ponto isolado do domínio (não faria sentido falar em $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$).

Exemplos 3.2 Considere os seguintes casos:

1) Averigue se a função f é contínua no ponto $x = 1$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Resolução:

f é contínua em $x = 1$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Como à direita e à esquerda de 1 a função está definida por expressões diferentes, vamos determinar os limites laterais. Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1.$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e consequentemente f não é contínua em $x = 1$.

Observação: Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, f é contínua à direita em $x = 1$.

2) Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \\ x + 5 & \text{se } x < -2. \end{cases}$$

Vamos estudar a continuidade de g no ponto $x = -2$.

Resolução:

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 5) = 3.$$

Assim $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 3$.

Por outro lado, $g(-2) = 1$, pelo que $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) \neq g(-2)$ e a função g não é contínua no ponto $x = -2$.

3) Seja h a função definida em $\mathbb{R}$, por

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vamos estudar a continuidade de h no ponto $x = 0$.

Resolução:

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 5x + 2) = 2$$

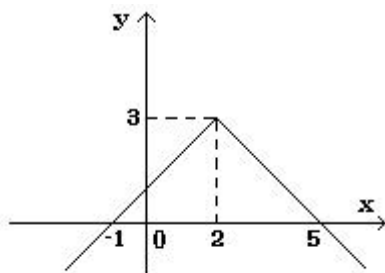
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2.$$

Como $h(0) = 2$ resulta que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$ e a função h é contínua em $x = 0$.

Exercícios 3.1 Resolva cada um dos seguintes exercícios :

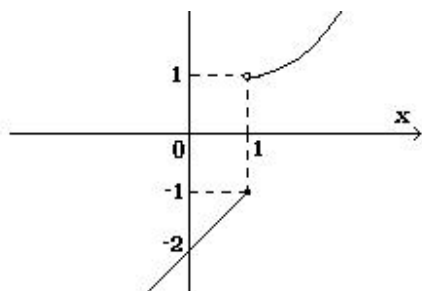
1) Observe os seguintes gráficos e complete.

a)



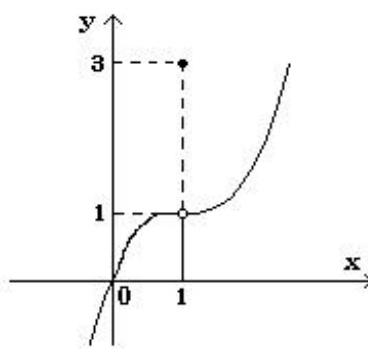
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots$
- $f(2) = \dots\dots\dots$
- f é contínua no ponto $\dots\dots$

b)



- $$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{não existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$
- f não é $\dots\dots\dots$ no ponto $x = 1$.

c)



- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots\dots$
- $f(1) = \dots\dots\dots$
- f não é $\dots\dots\dots$

2) Considere a função real, de variável real, m definida por :

$$m(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 3 \\ 1 - 3x & \text{se } x < 3. \end{cases}.$$

Estude a continuidade em $x = 3$.

3) Seja t a função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$t(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Averigue se é contínua em $x = 0$.

4) Seja g uma função real, de variável real, em que

$$g(x) = |x - 3| + x.$$

a) Escreva a expressão designatória da função sem utilizar o símbolo de módulo.

b) Averigue se é contínua no ponto $x = 3$.

5) Considere a função real, de variável real, t definida por :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x + 1|} & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

Mostre que t não é contínua para $x = -1$.

6) Prove que é contínua à esquerda de 0 a função real, de variável real, definida por:

$$m(x) = \begin{cases} \frac{x + |x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

3.2 Propriedades das funções contínuas num ponto

Propriedade 1

Sejam f e g funções contínuas num ponto a pertencente a $D_f \cap D_g$ e ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$. Então:

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g} \quad (g(a) \neq 0),$$

são contínuas no ponto a .

Demonstração:

As demonstrações resultam imediatamente das propriedades dos limites e da definição de continuidade. Vejamos apenas o caso $f + g$, deixando os outros como exercício.

Sendo f e g contínuas em a tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = (f + g)(a),$$

o que prova que $f + g$ é contínua no ponto a .

Propriedade 2

Se $p \in \mathbb{N}$ e f é uma função contínua no ponto a , também são contínuas em a as funções f^p e $\sqrt[p]{f}$ (excepto se p par e $f(x) < 0$).

3.3 Continuidade num intervalo

Definição 3.2 *Uma função f diz-se contínua se e só se for contínua em todos os pontos do seu domínio.*

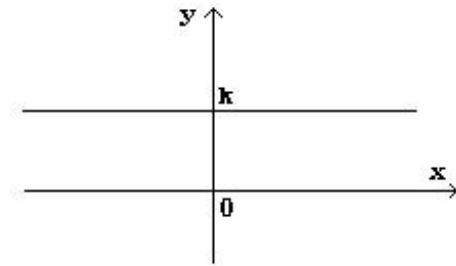
Uma função f diz-se contínua em $]a, b[$ se for contínua em todos os pontos desse intervalo.

Uma função f diz-se contínua em $[a, b]$ se for contínua em $]a, b[$, à direita de a e à esquerda de b .

Exemplos 3.3 *Considere os seguintes exemplos:*

a) *Uma função constante é contínua. De facto se $f(x) = k$ (k constante) $\forall x \in D_f$,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = k.$$



b) A função identidade é contínua.

Se $f(x) = x$, vem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \forall a \in \mathbb{R}.$$

c) A função definida por $y = x^2$ é contínua pois é o produto de duas funções contínuas, sendo estas $f(x) = x$ e $g(x) = x$.

d) Uma função polinomial f é contínua. Seja :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Verifica-se que f é a soma de produtos de funções contínuas.

e) Uma função racional (quociente de funções polinomiais) é contínua no seu domínio.

f) Estude a continuidade da função f real, de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ 7 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Resolução: Para $x > 2$ a função é definida por um polinómio, então f é contínua no intervalo $]2, +\infty[$. Como para $x < 2$ f é constante, é contínua no intervalo $]-\infty, 2[$. Resta estudar a continuidade de f no ponto $x = 2$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 7 = 7,$$

não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ e consequentemente f não é contínua em $x = 2$. Então f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

g) Para cada número real k a expressão seguinte representa uma função real, de variável real :

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x < 2 \\ k & \text{se } x = 2 \\ -x + 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

- i) Mostrar que para qualquer valor de k a função tem um ponto de descontinuidade.
 ii) Qual deve ser o valor de k de modo que a função g seja contínua à direita de 2?
 iii) Indique os valores de k de modo que a função seja descontínua à esquerda e à direita no ponto $x = 2$ (descontinuidade bilateral).

Resolução:

i) A função é contínua em $]-\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$ por ser representada por polinómios. Em $x = 2$, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 3) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2) = 8,$$

pelo que não existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$. Assim, o valor do limite não existe independentemente do valor de k , o que significa que a função é sempre descontínua no ponto $x = 2$, qualquer que seja k .

ii) A função será contínua à direita de 2 se $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2)$, ou seja $k = 1$.

iii) Para termos uma descontinuidade bilateral, temos que ter :

$$k \neq 1 \quad (\text{descontinuidade à direita})$$

e

$$k \neq 8 \quad (\text{descontinuidade à esquerda}).$$

Logo $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 8\}$.

3.4 Continuidade da função composta

Teorema 3.1 Seja f uma função contínua num ponto a do seu domínio e g uma função contínua em $b = f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a .

Observação:

Pelo resultado anterior,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$$

ou seja

$$\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g[f(a)]$$

ou ainda

$$\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right].$$

Quer dizer, nas condições referidas, são permutáveis o sinal $\lim_{x \rightarrow a}$ e o sinal da função g .

4 Função exponencial e função logarítmica

4.1 Função exponencial

Definição 4.1 Chama-se *função exponencial* de base a à função real de variável real,

$$\begin{aligned}\exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto y = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Propriedades:

- O seu domínio é $\mathbb{R}$.
- O seu contradomínio é $\mathbb{R}^+$.
- $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

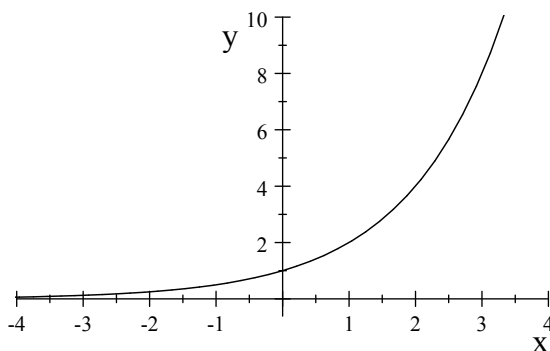
Assim f é injectiva.

No estudo da variação de f consideram-se dois casos:

1. $a > 1$

- $x > 0 \Rightarrow a^x > 1$
- $x = 0 \Rightarrow a^x = 1$
- $x < 0 \Rightarrow a^x < 1$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (função estritamente crescente)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
- é contínua em todo o seu domínio

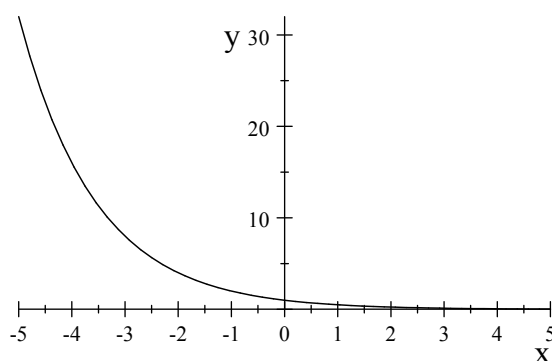
O gráfico da função quando $a > 1$ é:



2. $\boxed{0 < a < 1}$

- $x > 0 \Rightarrow a^x < 1$
- $x = 0 \Rightarrow a^x = 1$
- $x < 0 \Rightarrow a^x > 1$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (função estritamente decrescente)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.
- é contínua em todo o seu domínio

O gráfico da função quando $0 < a < 1$ é:



Exemplos 4.1 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das seguintes condições:

1.1) $x^2 \times 3^{-x} - 2 \times 3^{-x} = 0$; 1.2) $(0, 5)^{x^2} \geq (0, 125)^{2x}$; 1.3) $10^{x^2-3x} > 0,01$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
 1.1) \quad x^2 \times 3^{-x} - 2 \times 3^{-x} = 0 &\Leftrightarrow 3^{-x} (x^2 - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3^{-x} = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

O conjunto solução é $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Observação: Como a função exponencial não tem zeros, a primeira equação, isto é, $3^{-x} = 0$, é impossível.

$$\begin{aligned}
 1.2) \quad (0, 5)^{x^2} \geq (0, 125)^{2x} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{2x} \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{6x}.
 \end{aligned}$$

Atendendo a que a função exponencial de base menor que a unidade é decrescente, vem:

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 6x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [0, 6].$$

O conjunto solução é $[0, 6]$

$$1.3) \quad 10^{x^2-3x} > 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{x^2-3x} > 10^{-2}.$$

Atendendo a que a função exponencial de base maior que a unidade é crescente, vem:

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x > -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[.$$

O conjunto solução é $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Exercício 4.1 Considere a função real, de variável real, definida por:

$$f(x) = 1 - 7^{2-x}.$$

1) Determine o domínio e o contradomínio da função.

2) Resolva cada uma das condições:

$$2.1) f(x) = f(2).$$

$$2.2) f(x) > 0.$$

Soluções: 1) $D = \mathbb{R}$; $D' =]-\infty, 1[$. 2.1) $CS = \{2\}$; 2.2) $CS =]2, +\infty[$.

Exercício 4.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das inequações:

$$1) 5^{x-1} > 5^{5-4x};$$

$$2) 0.5^{x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{3x}.$$

Soluções: 1) $CS =]\frac{6}{5}, +\infty[$; 2) $CS = [0, 9]$.

Exercício 4.3 Considere as funções g e m , reais de variável real, definidas por:

$$g(x) = 4^{2x+x^2} - 1 \quad \text{e} \quad m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} + 2.$$

1.1) Indique o domínio e o contradomínio de cada uma delas.

1.2) Calcule os zeros de g e os de m .

1.3) Determine os valores de x tais que :

$$1.3.1) g(x) = g(1);$$

$$1.3.2) g(x) > 15;$$

$$1.3.3) m(2x+1) \leq m(x).$$

Soluções:

$$1.1) D_g = \mathbb{R} ; D'_g = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right[; D_m = \mathbb{R} ; D'_m =]2, +\infty[.$$

$$1.2) Zeros_g = \{-2, 0\} ; Zeros_m = \emptyset.$$

$$1.3.1. CS = \{-3, 1\}; 1.3.2) CS =]-\infty, -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}, +\infty[; 1.3.3) CS = [-1, +\infty[.$$

A função exponencial de base e (número de Neper)

Como caso particular das funções exponenciais, tem-se a função exponencial de base e ($\exp x$),

$$f(x) = e^x.$$

Note-se que esta função tem todas as propriedades da função $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e ainda,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} &= +\infty, p \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercício 4.4 Calcule: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{e^{3x} - 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x+1} - e}{x^2}$; 3) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$.

Soluções: 1) $\frac{5}{3}$; 2) $+\infty$; 3) 1.

Conceito de logaritmo de um número

Antes de apresentar a função logarítmica, dá-se a definição de logaritmo de um número, seguida das propriedades operatórias dos logaritmos.

Definição 4.2 *Logaritmo* de um número positivo x na base a , positiva e diferente de um, é o número a que se deve elevar a base para obter x .

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Desta equivalência resulta que

$$x = a^{\log_a x}$$

e que,

$$\log_a a^y = y.$$

Quando a base é e omite-se o e e escreve-se $\ln x$. A estes logaritmos chamam-se neperianos, em homenagem ao matemático inglês Neper.

Propriedades operatórias dos logaritmos

Sendo x e y números positivos e a e b números positivos diferentes de 1, tem-se:

$$\text{P1. } \log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{P2. } \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{P3. } \log_a x^p = p \log_a x, \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

$$\text{P4. } \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \text{ (Caso particular de P3.)}$$

$$\text{P5. } \log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$$

4.2 Função logarítmica

Definição 4.3 Sendo a função exponencial uma função injectiva, admite inversa. Chama-se **função logarítmica** à sua inversa.

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Propriedades:

- O seu domínio é $\mathbb{R}^+$.
- O seu contradomínio é $\mathbb{R}$.
- Tem um zero para $x = 1$, pois

$$\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = a^0 \Leftrightarrow x = 1.$$

- $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.

Assim f é injectiva.

No estudo da variação de f consideram-se dois casos:

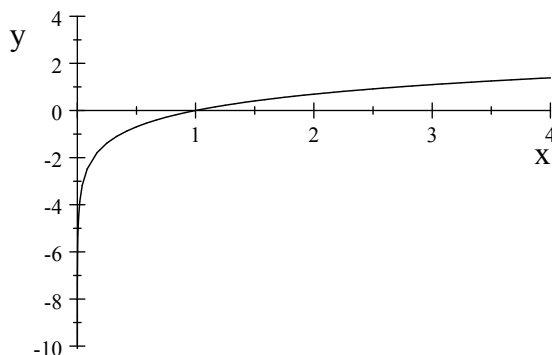
1. $\boxed{a > 1}$

- $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
- $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$
- $x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ (função estritamente crescente)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

- é contínua em todo o seu domínio

O gráfico da função quando $a > 1$ é:



2. $0 < a < 1$

- $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

- $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$

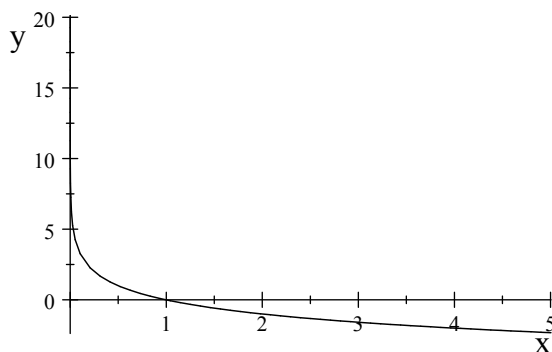
- $x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ (função estritamente decrescente)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.

- é contínua em todo o seu domínio

O gráfico da função quando é $0 < a < 1$:



Observação: No caso de $a = e$, obtém-se a função logaritmo natural que se representa por $\ln$.

Exemplos 4.2 Considere os seguintes exercícios:

1) Seja f a função real, de variável real, definida por:

$$f(x) = 5 - \log_3 (2 + 3x).$$

1.1) Determinar o domínio e o contradomínio de f .

1.2) Definir, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução de cada uma das condições:

$$f(x) = f(0) \quad e \quad f(x) > 6.$$

2) Calcular o domínio, o contradomínio e definir a função inversa da função h definida por:

$$h(x) = 3 + \frac{1}{2} \log_7 (2x - 1).$$

Resolução:

$$1.1. D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 + 3x > 0\} = \left] -\frac{2}{3}, +\infty \right[; D'_f = \mathbb{R}.$$

$$1.2. f(x) = f(0) \Leftrightarrow 5 - \log_3 (2 + 3x) = 5 - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2 + 3x) - \log_3 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2 + 3x}{2} = \log_3 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + 3x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Atendendo a que $0 \in D_f$, então o conjunto solução da condição é $\{0\}$.

$$f(x) > 6 \Leftrightarrow 5 - \log_3 (2 + 3x) > 6$$

$$\Leftrightarrow -\log_3 (2 + 3x) > 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2 + 3x) < -1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2 + 3x) < \log_3 \frac{1}{3}.$$

Como a base é maior que a unidade, a função logarítmica é crescente e, portanto:

$$\Leftrightarrow 2 + 3x < \frac{1}{3} \quad \wedge \quad x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{5}{9} \quad \wedge \quad x \in D_f$$

$$\text{O conjunto solução é } \left] -\frac{2}{3}, -\frac{5}{9} \right[.$$

$$2. D_h = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 0\} = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[; D'_h = \mathbb{R}.$$

Vamos agora determinar a expressão que define a inversa. Tem-se:

$$\begin{aligned} y = 3 + \frac{1}{2} \log_7 (2x - 1) &\Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{2} \log_7 (2x - 1) \\ &\Leftrightarrow 2(y - 3) = \log_7 (2x - 1) \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 7^{2y-6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 7^{2y-6}. \end{aligned}$$

Podemos agora definir a inversa, tendo-se:

$$\begin{aligned} h^{-1}: \mathbb{R} &\rightarrow \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\\ x &\longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 7^{2x-6}. \end{aligned}$$

Exercícios 4.5 1. Considere a função real, de variável real, f definida por:

$$f(x) = 1 + \ln(2 - 3x).$$

Determine:

$$1.1) \text{ O seu domínio; } \quad 1.2) \text{ Uma expressão designatória da sua inversa; } \quad 1.3) f\left(\frac{2-e}{3}\right).$$

2. Caracterize a função inversa de cada uma das seguintes f.r.v.r. :

$$2.1) t(x) = 1 + 3^{x-1}; \quad 2.2) s(x) = \log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x); \quad 2.3) p(x) = 5 - \log_{10} (x + 5).$$

3. Determine o conjunto solução das condições:

$$3.1) 4(\ln x)^2 - 3 \ln x - 7 < 0; \quad 3.2) e^x + 7e^{-x} = 8.$$

4. Determine E , sabendo que:

$$\ln E = \frac{1}{2} \ln x + 2 \ln y + 1.$$

Soluções:

$$1.1) D_f = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right[; \quad 1.2) f^{-1}(x) = \frac{2 - e^{x-1}}{3}; \quad 1.3) 2.$$

$$2.1) D_{t^{-1}} =]1, +\infty[; D'_{t^{-1}} = \mathbb{R}; t^{-1}(x) = 1 + \log_3 (x - 1).$$

$$2.2) D_{s^{-1}} = \mathbb{R}; D'_{s^{-1}} =]-\infty, \frac{1}{3}[; s^{-1}(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$$2.3) D_{p^{-1}} = \mathbb{R}; D'_{p^{-1}} =]-5, +\infty[; p^{-1}(x) = -5 + 10^{5-x}.$$

$$3.1)]e^{-1}, e^{\frac{7}{4}}[$$

$$3.2) \{0, \ln 7\}$$

$$4. \quad E = e \cdot y^2 \cdot \sqrt{x}$$