

Capítulo I: Análise Matemática	4
1. Funções Reais de Variável Real	4
1.1 Definição	4
1.2 Limites de Funções Reais de Variável Real	6
1.3 Continuidade.....	10
1.4 Estudo Assimptótico.....	13
1.5 Funções Trigonométricas	15
1.6 Função Exponencial e Função Logarítmica	20
1.7 Diferenciabilidade.....	24
1.8 Estudo de Funções	33
Exercícios	38
Capítulo II: Estatística	53
1 Introdução. Breve nota histórica.....	53
1.1 Nota Histórica.....	53
1.2 Objecto da Estatística	54
2. Estatística Descritiva.....	54
2.1 As Etapas do Método Estatístico.....	55
2 Apresentação dos Dados: Quadros e Gráficos.....	57
2.1 Quadros.....	57
2.2 Gráficos.....	58
3 Distribuição de Frequências	60
3.1 Alguns Conceitos Fundamentais	60
4 Distribuição de Frequências de Variáveis Discretas	63
5 Distribuição de Frequências de Variáveis Contínuas.....	65
6 Representação Gráfica das Distribuições de Frequências.....	66
6.1 Variáveis Discretas	67
6.2 Variáveis Contínuas	68
6.3 Diagrama "Stem and Leaf"	69

7	Medidas de Estatística Descritiva: Medidas de Localização	70
7.1	Medidas de Tendência Central	71
7.2	Medidas de Tendência Não Central	78
8	Medidas de Estatística Descritiva: Medidas de Dispersão	79
8.1	Medidas de Dispersão	79
9	Medidas de Estatística Descritiva: Medidas de Assimetria e Curtose	82
9.1	Medidas de Assimetria	82
9.2	Medidas de Achatamento ou Curtose.....	83
Exercícios I – Estatística Descritiva		85
10	Distribuição Normal	93
10.1	Curva Normal. Propriedades	93
10.2	Determinação das áreas na curva normal	97
10.3	Teorema do Limite Central	84
Exercícios II – Distribuição Normal		86
11	Testes de Hipóteses	88
11.1	Introdução	88
11.2	Testes a Populações Normais	101
Exercícios III – Testes de Hipóteses		112
Bibliografia		116
Soluções dos exercícios		117

Capítulo I: Análise Matemática

1. Funções Reais de Variável Real

Definição

Sejam E e F dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Uma **função** f definida em certo conjunto E e com valores num conjunto F , como regra faz corresponder a cada elemento x de E um único elemento y de F , este elemento denota-se por $f(x)$. Escreve-se " $f: E \rightarrow F$ ".

Ao conjunto E chama-se **domínio de f** . Escrevemos D_f .

Ao conjunto F chama-se **conjunto de chegada de f** .

Ao conjunto $\{y \in F : \exists x \in E \text{ em que } f(x) = y\}$ chama-se **contradomínio de f** .

Nota: Não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função, enquanto $f(x)$ é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.

Definição Uma função de domínio A é injectiva se a pontos diferentes do domínio A corresponderem imagens diferentes no conjunto de chegada. Dito de outro modo: para todos os pontos x e y pertencentes a A se a for diferente de b então $f(a)$ é diferente de $f(b)$.

$$\forall a, b \in A, a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

Definição Uma função de domínio A é sobrejectiva se o contradomínio coincidir com o conjunto de chegada ou seja o contradomínio é o próprio $\mathbb{R}$.

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in A, \text{ tal que } f(x) = y$$

Definição Uma função de domínio A é bijectiva se é injectiva e sobrejectiva.

Definição Seja f uma função de domínio D e contradomínio E , e g uma função de E em F , definimos como função composta de f com g , $(g \circ f)(x)$, a uma função definida de D em F , e que a cada x transforma em $g(f(x))$.

Definição Seja f uma função de domínio A e contradomínio B , injectiva definimos função inversa e denotamos f^{-1} , à função de domínio B e contradomínio A , tal que $fof^{-1} = f^{-1}o f = I$.

Definição Seja f uma função de domínio $]a, b[$.

- Monótona crescente, ou crescente se f mantiver a ordenação dos elementos ou seja dados

$$\forall x, y \in]a, b[, \text{ tais que } x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- Monótona decrescente, ou decrescente se f trocar a ordenação dos elementos ou seja dados

$$\forall x, y \in]a, b[, \text{ tais que } x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Estritamente crescente, se f mantiver estritamente a ordenação dos elementos ou seja dados

$$\forall x, y \in]a, b[, \text{ tais que } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- Estritamente decrescente, se f trocar estritamente a ordenação dos elementos ou seja dados

$$\forall x, y \in]a, b[, \text{ tais que } x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Definição Seja f uma função real de variável real de domínio D . Diz-se que f é limitada se é só se o contradomínio for um conjunto limitado, ou seja se existir um número real M , tal que para qualquer $x \in D$ $|f(x)| \leq M$.

Definição Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, diz-se que f é

- Par se e só se $\forall x \in \mathbb{R}$ se tem $f(-x) = f(x)$.
- Impar se e só se $\forall x \in \mathbb{R}$ se tem $f(-x) = -f(x)$.

Definição Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, diz-se que f é periódica se existir algum real α (não nulo) tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tenha $f(x+\alpha) = f(x)$.

1.2 Limites de Funções Reais de Variável Real

1.2.1 Definição e Propriedades

O significado intuitivo da expressão “ $f(x)$ tende para b quando x tende para a ”, traduzida em símbolos por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

É o de que se considerarmos apenas valores de x “suficientemente próximos” de a , os valores correspondentes $f(x)$ estarão “tão próximos quanto se queira” de b .

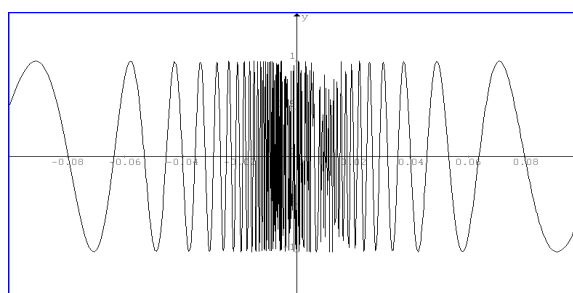
Definição: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ quando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Observações:

- De acordo com a definição dada, só tem sentido escrever $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ quando a é ponto de acumulação do domínio de f ;
- Ao considerarmos o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, não exigimos que a pertença ao domínio da função f ;
- Mesmo que se tenha $a \in D_f$, a afirmação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ nada diz a respeito do valor de $f(a)$.

Exemplo de uma função que não tenha limite num ponto



Teorema (unicidade do limite)

Seja $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E'$ (E' é o conjunto dos pontos de acumulação de E). Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2, \text{ então } b_1 = b_2.$$

Teorema (operações algébricas sobre os limites):

Seja $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E'$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot A$$

$$\text{Se } A \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) / g(x)) = L / A$$

Teorema

Seja $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E'$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para alguma constante M , então:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0,$$

mesmo que não exista $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

1.2.2 Limites Laterais

Definição:

Dizer que o número real b é o **limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a** , significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, x \in]a, a + \delta[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

De acordo com a definição dada, só tem sentido escrever $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ quando a é ponto de acumulação à direita do domínio de f , ou seja $a \in D_f' +$.

Do mesmo modo se define **limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a** . Escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

Teorema

Seja $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E'_+ \cap E'_-$ (a é ponto de acumulação à direita e à esquerda de E).

Então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ se e só se são iguais os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

1.2.3 Limites no Infinito e Limites Infinitos

Definições

Seja D_f ilimitado superiormente. A função f tende para o limite b quando x tende para $+\infty$, significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x \in D_f, x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Escreve-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

A função f tende para o limite $+\infty$ quando x tende para a , significa:

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

De modo análogo se define:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \text{ etc.}$$

➤ Algumas operações algébricas:

- Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$
- Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } f(x) > 0 \text{ numa vizinhança de } a \\ -\infty & \text{se } f(x) < 0 \text{ numa vizinhança de } a \end{cases}$$

➤ Expressões indeterminadas:

As seguintes expressões $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^0 são indeterminadas.

Exemplo

Dizer que $\frac{0}{0}$ é indeterminada tem o seguinte significado:

Seja $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E'$.

Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e que pondo $Y = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$ se tenha ainda

$a \in Y'$.

Então $\frac{f(x)}{g(x)}$ está definida no conjunto Y e faz sentido indagar se existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Nada se

pode dizer, em geral, sobre este limite. Depende das funções f e g , ele pode assumir qualquer valor real, infinito ou não existir.

Tente calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ para:

$f(x) = 2x$, e $g(x) = x$;

$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), e $g(x) = x$.

Exercícios Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 4x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x + 800}{x^2 + 4x + 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + x}$

1.3 Continuidade

1.3.1. Definição e Propriedades

Definição

A função **f** é **contínua no ponto a** $\in D_f$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Observações:

- Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se **f** é contínua no ponto **a** quando **a** $\in D_f$.
- De acordo com a definição, se **a** é ponto isolado do domínio de **f**, então **f** é contínua em **a**.
- Seja **a** $\in D_f$ ponto de acumulação do domínio de **f**. Então **f** é contínua em **a** se e só se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. **Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite.**

Teorema

Seja $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Se **f** e **g** são contínuas em **a** $\in E$, então:

$f + g$, $f - g$, $f \times g$ são funções contínuas em **a**.

Se além disso $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em **a**.

Teorema (continuidade da função composta)

Seja $E, H \subset \mathbb{R}$. Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(E) \subset H$.

Se f é contínua no ponto $a \in E$ e g é contínua em $b = f(a) \in H$, então $g \circ f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a .

Definição

Dizemos que $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua à direita** num ponto $a \in E$ se $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$.

Dizemos que $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua à esquerda** num ponto $a \in E$ se $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$.

Definição

Seja $E \subset \mathbb{R}$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Dizemos que:

- f possui uma **descontinuidade de primeira espécie** no ponto $a \in E$, quando f é descontínua mas existem $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ (caso a seja ponto de acumulação só de um lado, é só exigido que esse limite exista).
- f possui uma **descontinuidade de segunda espécie** no ponto $a \in E$, quando f é descontínua e $a \in E_+$ e não existe $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ou $a \in E_-$ e não existe $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.

Exercícios

Verifique se as seguintes funções são contínuas no seu domínio:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5} & \text{se } x > 5 \\ x^2 - 3x + 6 & \text{se } x \leq 5 \end{cases}.$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -3 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

1.3.2 Funções Contínuas em Intervalos

Definição

- Seja $I =]a, b[$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f é contínua em I sse for contínua em todos os pontos de I ;
- Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, f é contínua em I sse for contínua em $]a, b[$ e também o é à direita de a e à esquerda de b .

Teorema de Bolzano

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$. (ou seja, f admite pelo menos um zero neste intervalo).

Teorema dos valores intermédios

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ (ou $f(b) < d < f(a)$), então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração:

Basta considerar a função $g = f - d$, e aplicar o Teorema de Bolzano.

Teorema de Weierstrass

Seja f uma função contínua num intervalo fechado e não vazio $[a, b]$, então f tem nesse intervalo um máximo e um mínimo. Isto é, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$, tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo o $x \in [a, b]$.

Exercícios

- 1) Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, diga justificando se a função admite:
 - a) Pelo menos um zero no intervalo $[0, 2]$
 - b) Máximos e mínimos no intervalo $[-1, 2]$

2) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{se } x < -1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$, diga justificando se a função admite:

- a) Pelo menos um zero no intervalo $[-1, 0]$
- b) Máximos e mínimos no intervalo $[-2, 0]$.
- c) Mostre que existe $c \in]-1, 0[$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$.

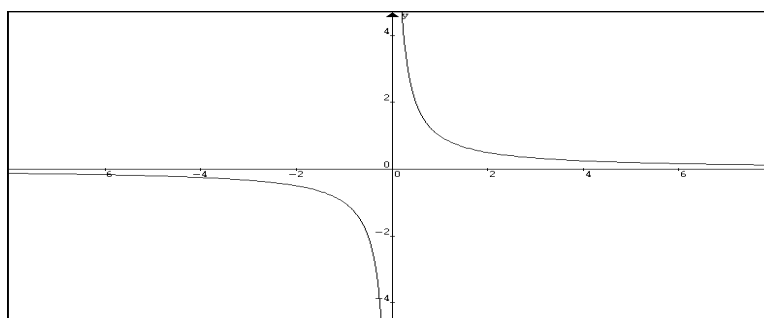
3) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, diga justificando se a função admite:

- a) Pelo menos um zero no intervalo $[-1, 1]$.
- b) Máximos e mínimos no intervalo $[-10, -5]$.

1.4 Estudo Assintótico

No estudo de funções reais de variável real é indispensável analisar o comportamento assintótico da função (comportamento do gráfico da função nas vizinhanças do infinito e nos pontos "próximos" do domínio).

Assíntotas Verticais



Definições

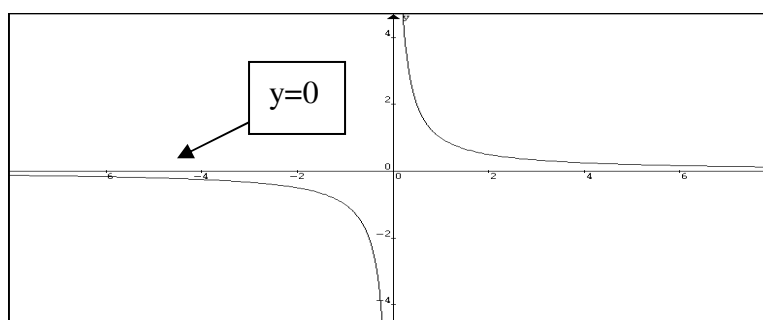
Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, dizemos que a recta de equação $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de f

Onde procurar as **assíntota vertical**is?

- Nos pontos que não pertencem ao domínio, mas que são pontos de acumulação.
- Nos pontos de descontinuidade.

Assíntotas Horizontais

Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ dizemos que a recta de equação $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f .



Assíntotas Não Verticais

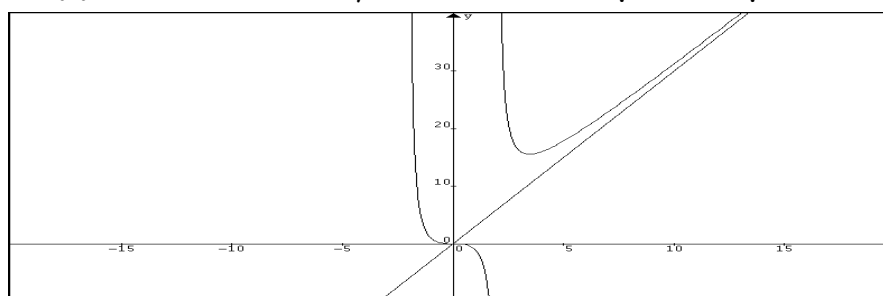
Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0$ dizemos que a recta de equação $y = mx + b$ é uma **assíntota não-vertical** do gráfico de f .

Geometricamente significa que a distância entre os pontos $(x, mx + b)$ e $(x, f(x))$ tendem para zero à medida que x tende para infinito.

No caso particular $m = 0$, a recta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** de f .

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ então a recta $y = mx + b$ é uma **assíntota oblíqua**



• **Observações:**

- O $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ não implica que exista uma assíntota oblíqua para o gráfico de f . Exemplo a função $f(x) = 5x + \sqrt{x}$, $x \geq 0$.
- Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty$, dizemos que o gráfico de f possui um **ramo parabólico de direcção assimpotótica**, $y = mx$

Exercícios

1) Mostre que as seguintes funções admitem assíptotas horizontais ou verticais:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} & , x > 0 \\ \frac{1}{x - 1} & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$b) \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

2) Verifique se a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ admite assíptotas.

1.5 Funções Trigonómicas

➤ Algumas relações entre funções trigonométricas:

- $tg(x) = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$; $\cotg x = \frac{\cos x}{\text{sen}x}$;
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$; $\cos(-x) = \cos x$; $tg(-x) = -tg x$
- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

➤ Alguns valores de razões trigonométricas conhecidas:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	S/s
Cotangente	S/s	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Funções trigonométricas

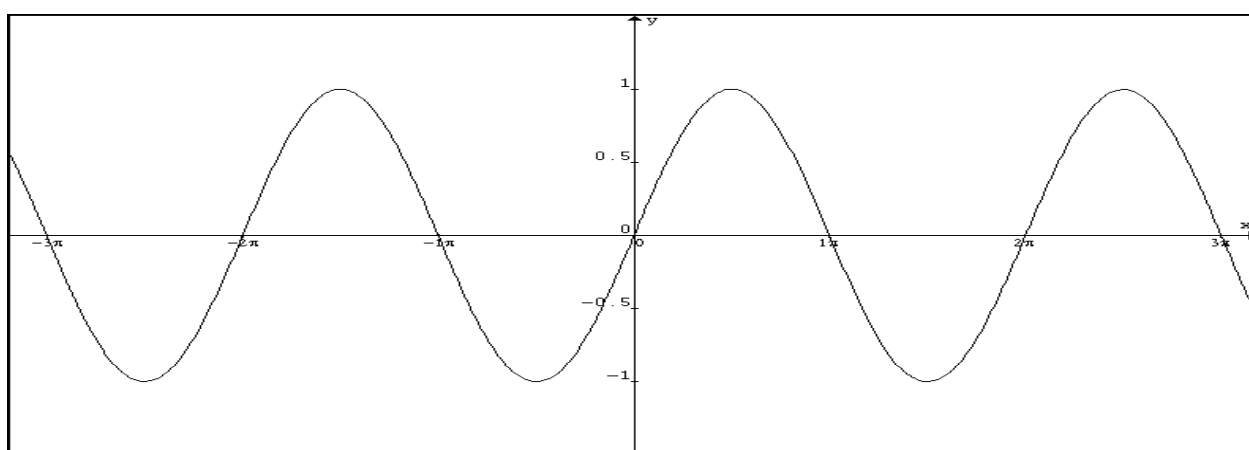
Sen x

Consideremos a função $x \rightarrow g(x) = \text{sen} x$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto \text{sen} x$$

O gráfico de $g(x)$:



➤ **Alguns dados sobre a função $f(x) = \text{Sen } x$:**

- $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [-1, 1]$;
- é uma função não monótona no seu domínio;
- não sobrejectiva;
- não injectiva;
- contínua em $\mathbb{R}$;
- é uma função ímpar;
- tem vários pontos máximos $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ e um mínimo em $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- tem infinitos zeros em $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- não tem limite no infinito;
- é limitada

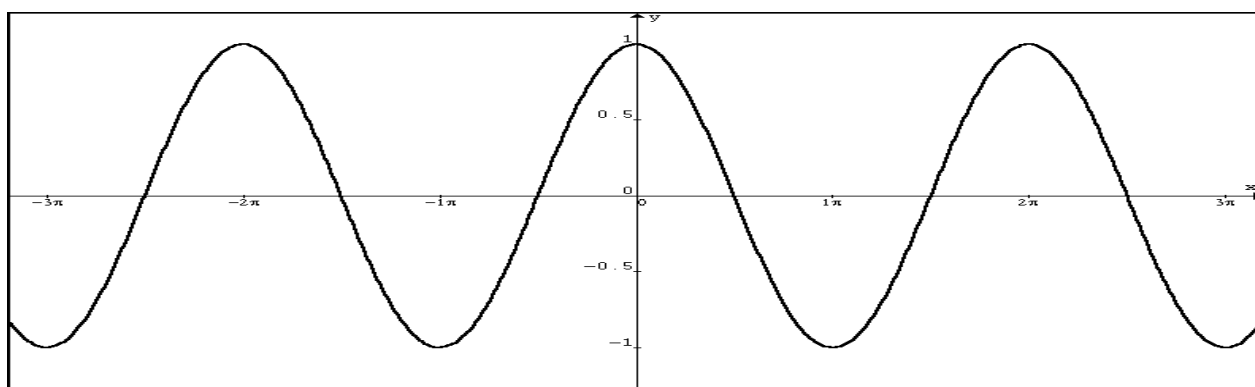
Cos x

Consideremos a função $x \rightarrow g(x) = \cos x$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto \cos x$$

O gráfico de $g(x)$:



➤ **Alguns dados sobre a função $f(x) = \cos x$:**

- $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [-1, 1]$;
- é uma função não monótona no seu domínio;
- não sobrejectiva;
- não injectiva;
- contínua;
- é uma função par;
- tem vários pontos máximos $(2k\pi, 1)$ e um mínimo em $(-\pi + 2k\pi, -1)$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- tem infinitos zeros em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- não tem limite no infinito;
- é limitada.

Nota: As funções Seno e Coseno são periódicas de período 2π (a função repete-se infinitamente num intervalo 2π).

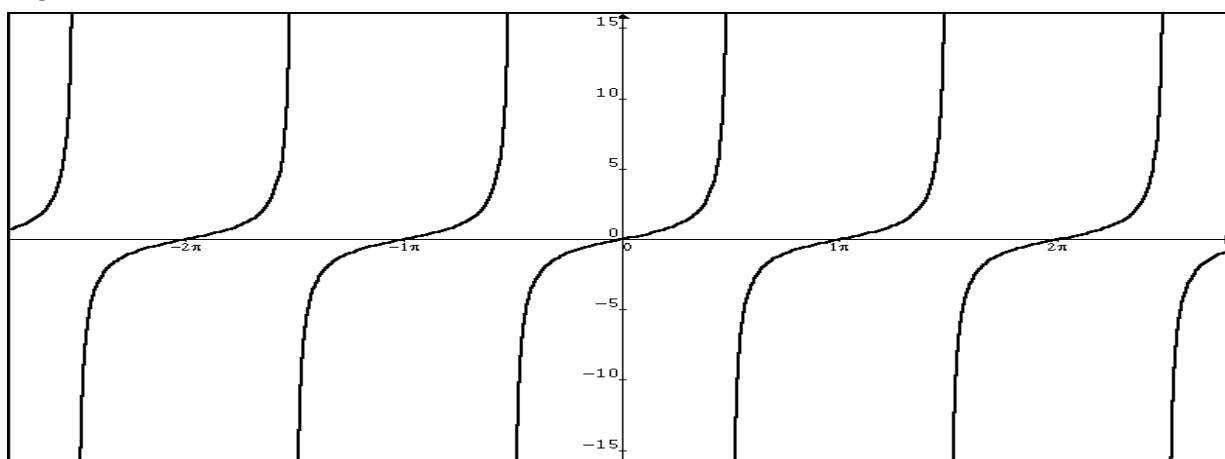
Tangente

Consideremos a função $x \rightarrow g(x) = \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} g : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

onde $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

O gráfico de $g(x)$:



➤ Alguns dados sobre a função $f(x) = \operatorname{Tg} x$:

- $D_f = D$ e $D'_f = \mathbb{R}$;
- é uma função crescente no seu domínio;
- é sobrejectiva;
- não injectiva;
- contínua no seu domínio;
- é uma função ímpar;
- não tem máximos nem mínimos;
- tem infinitos zeros em $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- não tem limite no infinito;
- não é limitada.

Nota: Esta função é periódica de período π (a função repete-se infinitamente num intervalo π).

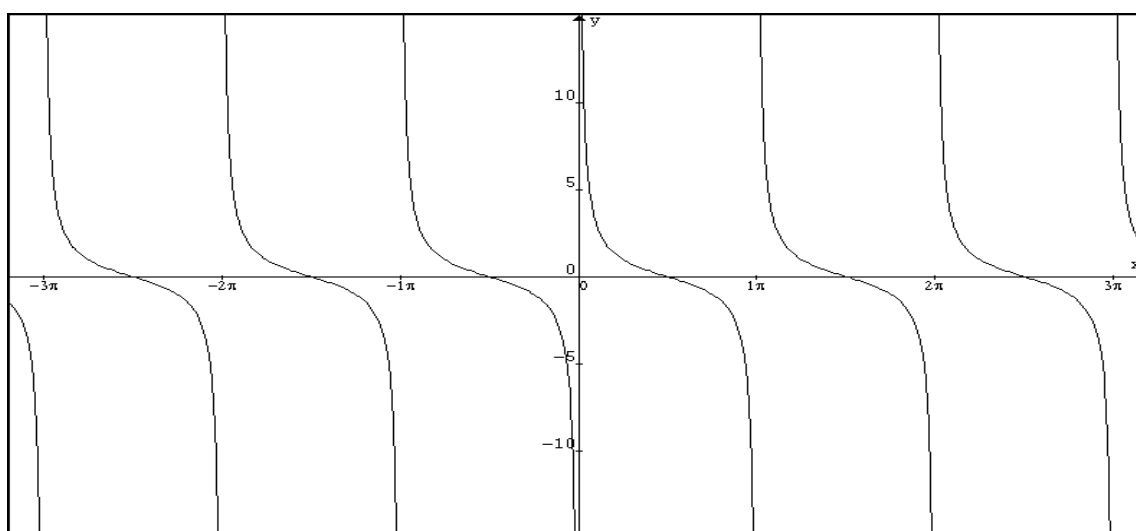
Cotangente

Consideremos a função $x \rightarrow g(x) = \cot gx$

$$\begin{aligned} g : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot gx \end{aligned}$$

onde $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

O gráfico de $g(x)$:



➤ Alguns dados sobre a função $f(x) = \cot x$:

- $D_f = D$ e $D'_f = \mathbb{R}$;
- é uma função decrescente no seu domínio;
- é sobrejectiva;
- não injectiva;
- contínua no seu domínio;
- é uma função ímpar;
- não tem máximos nem mínimos;
- tem infinitos zeros em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- não tem limite no infinito;
- não é limitada.

Exercícios

1) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$

2) Considere a função real de variável real, f , de domínio $[-2\pi, 2\pi]$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\pi}{2}, & x \geq -\frac{\pi}{2} \\ -2x - \frac{\pi}{2}, & x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Estude a continuidade de f .

1.6 Função Exponencial e Função Logarítmica

1.6.1 Função Exponencial

Definição

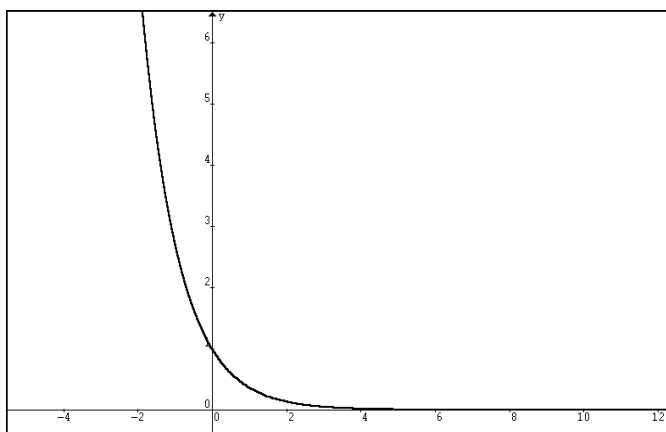
Chama-se função exponencial de base a à função f , real de variável real

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{aligned}$$

Algumas propriedades

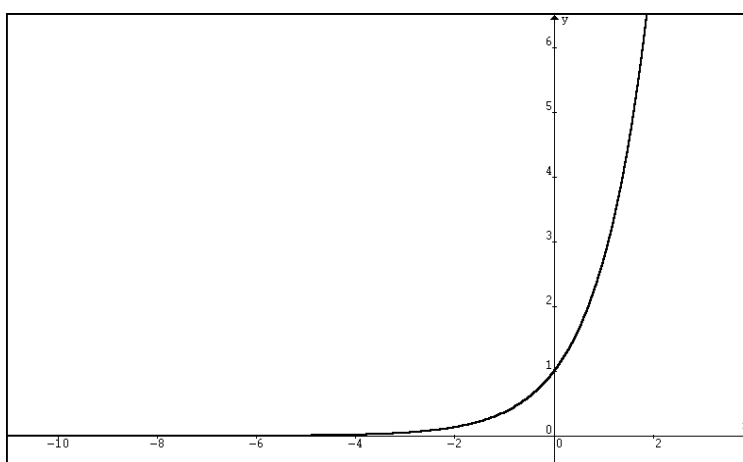
□ $0 < a < 1$

- O domínio é $\mathbb{R}$
- A função é contínua em $\mathbb{R}$
- A função é injectiva
- A função não é sobrejectiva
- A função não tem máximos nem mínimos
- A função não tem zeros
- $x > 0 \Rightarrow a^x < 1$
- $x = 0 \Rightarrow a^x = 1$
- $x < 0 \Rightarrow a^x > 1$
- a função f é decrescente
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
- $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f



□ $a > 1$

- O domínio é $\mathbb{R}$
- A função é contínua em $\mathbb{R}$
- A função é injectiva
- A função não é sobrejectiva
- A função não tem máximos nem mínimos
- A função não tem zeros
- $x > 0 \Rightarrow a^x > 1$
- $x = 0 \Rightarrow a^x = 1$
- $x < 0 \Rightarrow a^x < 1$
- a função f é crescente
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f



□ **a = e**

Define-se o número irracional e (número de Nepper) como sendo $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Seja $f(x) = e^x$

Esta função tem todas as propriedades da função a^x com $a > 1$ e ainda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, p \in \mathbb{R}$$

1.6.2. Função Logaritmo

Definição

Logaritmo de um número positivo, na base a, positiva e diferente de 1, é o número a que se deve elevar a base para se obter x

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Logo

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{e que} \quad \log_a x = y$$

Quando a base é e omite-se a base ficando $\log x$ ou $\ln x$, a estes chamam-se logaritmos neperianos.

Propriedades do logaritmo

Se x e y números positivos e a e b números positivos diferentes de um. Então tem-se

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \log_a x, \forall p \in \mathbb{R}$

- $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

➤ Função logaritmica

Definição

Como a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$x \rightarrow a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ é bijectiva, admite inversa,

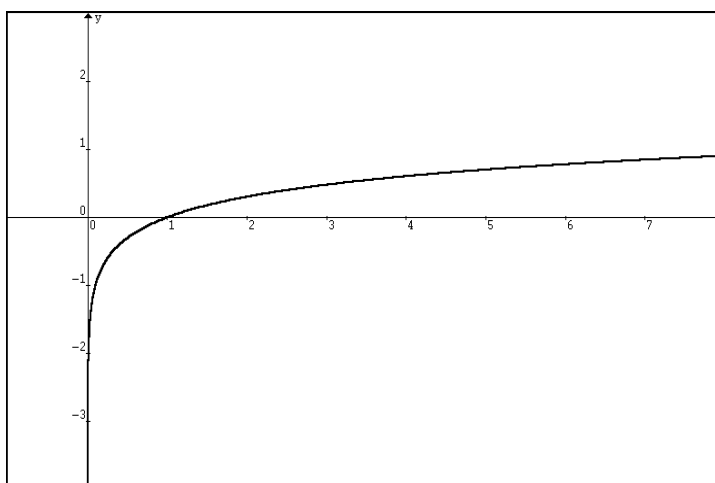
$$f^{-1} = g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \rightarrow \log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ que é chamada função logarítmica

Algumas propriedades

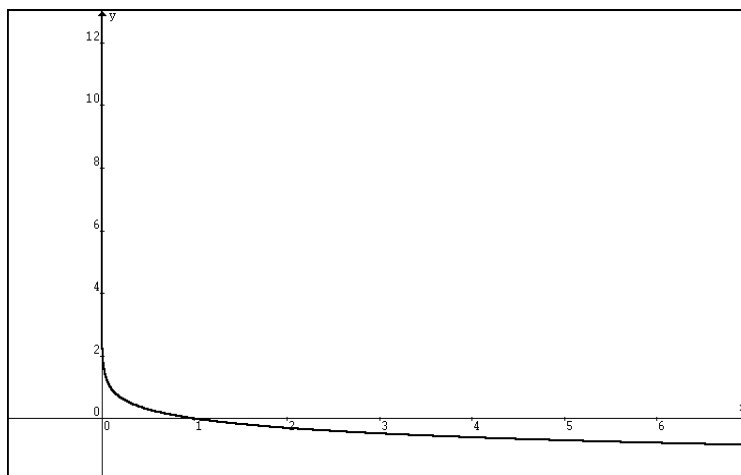
□ $a > 1$

- O domínio é $\mathbb{R}^+$
- A função é injectiva
- g tem um zero para $x=1$
- a função é contínua em $\mathbb{R}^+$
- a função é crescente
- $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
- $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$
- $x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$
- $x=0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f



□ $0 < a < 1$

- O domínio é $\mathbb{R}^+$
- A função é injectiva
- g tem um zero para $x = 1$
- a função é contínua em $\mathbb{R}^+$
- a função é decrescente
- $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
- $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$
- $x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$
- $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f



□ $a = e$

Seja $f(x) = \log x$

Esta função tem todas as propriedades da função $\log_a x$ com $a > 1$ e ainda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^p} = 0, p \in \mathbb{R}$$

1.7 Diferenciabilidade

1.7.1 Definição e Propriedades

Definição

Sejam $E \subset \mathbb{R}$ e $a \in E \cap E'$ (a é um ponto de acumulação, mas tem de pertencer ao domínio).

Dizemos que f é diferenciável no ponto a , quando $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Se o limite anterior existir é por definição, a **derivada da função f no ponto a** , designada pelo símbolo **$f'(a)$** .

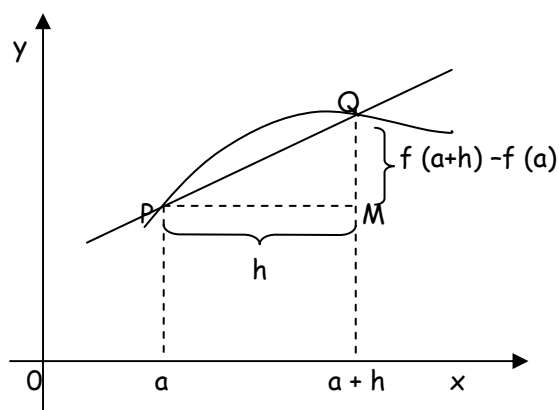
Pondo $x = a + h$ obtém-se imediatamente a fórmula, por vezes mais cómoda no cálculo de derivadas:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definição

Diz-se que f é diferenciável se f é diferenciável para todo o ponto a pertencente ao domínio de f .

Em termos intuitivos, é muito simples dar uma interpretação geométrica do conceito de derivada. Designando por P e Q , respectivamente os pontos do gráfico de f que têm abscissas a e $a+h$, a razão incremental $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ é o **declive** da recta PQ , secante ao referido gráfico.



- Quando $f'(a)$ existe e é finita, chama-se tangente ao gráfico de f no ponto $P=(a, f(a))$, à recta que passa por este ponto e tem declive igual a $f'(a)$, isto é, à recta de equação :

$$y = f(a) + (x - a) f'(a).$$

- Quando $f'(a) = +\infty$ ou $f'(a) = -\infty$, chama-se tangente ao gráfico de f à recta vertical de equação $x = a$.

Notação

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$f'(a) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

Denota-se por $f'' = f^{(2)} = (f')'$ a **2ª derivada** de f e por $f''(a) = f^{(2)}(a)$ a **2ª derivada de f em a** . Assim a **n -ésima derivada** de f denota-se por $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Definição

Quando $a \in E \cap E'_+$, podemos definir a derivada à direita da função f no ponto a , como sendo o limite (caso exista):

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Analogamente se define derivada à esquerda $f'_-(a)$ quando a é um ponto de acumulação à esquerda e pertence ao domínio de f ($a \in E \cap E'_-$).

Nota

Quando a pertence ao domínio de f e é ponto de acumulação à direita e à esquerda, então $f'(a)$ existe se e só se existem e são iguais as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Observação

- Uma função pode ser contínua num ponto onde não tenha derivada; a continuidade nem sequer garante a existência de derivadas laterais.

Um exemplo é a função: $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ que é contínua em $\mathbb{R}$ e cuja razão

incremental no ponto 0, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, não tem limite, nem limites laterais quando x tende para zero.

Teorema

Se f é diferenciável em a , então f é contínua em a .

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Se f é a função constante, $f(x) = c$, então $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- Se f é a função identidade, $f(x) = x$, então $f'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Teorema

Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis no ponto $a \in E \cap E'$.

Então $f + g$, $f - g$, $f \times g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são diferenciáveis em a .

Além disso tem-se:

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Corolário

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, então $f'(a) = n a^{n-1}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Corolário

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $g(x) = c \cdot f(x)$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e f diferenciável em $a \in \mathbb{R}$, então $g'(a) = c \cdot f'(a)$.

1.7.2 Regra da Cadeia

Teorema

Seja $E, H \subset \mathbb{R}$. Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : H \rightarrow \mathbb{R}$, $f(E) \subset H$, $a \in E \cap E'$ e $b = f(a) \in H \cap H'$.

Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$, então $g \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a , sendo

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

1.7.3. Derivada da Função Inversa

Teorema

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva definida num intervalo I .

Se f é diferenciável no ponto a , então $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$ se e

só se $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Definições

- Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é uma *função diferenciável* se for diferenciável para todo o ponto x pertencente a E , domínio de f .
- Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável, I um intervalo de $\mathbb{R}$. Considera-se a *função derivada* $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$.
- Se f' é uma função contínua, diz-se que f é uma *função de classe C^1* .
- Se f é n vezes diferenciável e $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua diz-se que f é uma *função de classe C^n* .
- Diz-se que f é uma *função de classe C^∞* se é de classe C^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.7.4 Teoremas Fundamentais do Cálculo Diferencial

Nos teoremas fundamentais que estudaremos terão papel de relevo as funções que são contínuas num intervalo fechado, $[a, b]$ e diferenciáveis em qualquer ponto pertencente ao intervalo $]a, b[$.

Teorema de Rolle

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, diferenciável em $]a, b[$, se $f(a) = f(b)$ então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário

Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo existe pelo menos, um zero da sua derivada.

Corolário

Se f é diferenciável num intervalo I e se a e b são zeros consecutivos de f' , então existe no máximo um zero de f em $]a, b[$

Nota

Conjugando este resultado com o teorema de Bolzano, podemos dizer que se f assumir valores de sinais contrários para dois zeros consecutivos de f' , entre esses números existe exactamente um zero; se o sinal for o mesmo, entre os dois zeros de f' então não existe nenhum zero de f .

Exercício

Prove que no intervalo $[1,5; 3]$ a função $f(x) = \log(x^2 - 2x + 1)$ admite exactamente um zero.

Teorema dos valores intermédios para a derivada

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, diferenciável em $[a, b]$ (entende-se por derivada nos pontos a e b como sendo as derivadas à direita de a e à esquerda de b).

Se $f'(a) < d < f'(b)$ (ou $f'(b) < d < f'(a)$), então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = d$.

Observação

Quando f é de classe C^1 , o teorema anterior decorre do teorema dos valores intermédios para funções contínuas aplicado a função f' . No entanto mesmo que a função derivada não seja contínua.

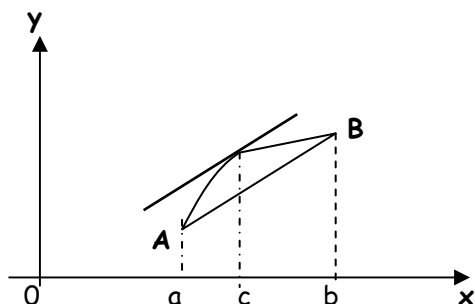
Corolário

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável num intervalo I , então f' não pode ter descontinuidades de primeira espécie em I .

Teorema de Lagrange

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, diferenciável em $]a, b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$

tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$



A interpretação geométrica é simples: em pelo menos um ponto do intervalo $]a, b[$, a tangente ao gráfico de f deverá ser paralela à corda que liga os pontos $A = (a, f(a))$, e $B = (b, f(b))$

Corolário 1

Se uma função é contínua num intervalo I , e possui derivada nula em todos os pontos desse intervalo, então f é constante nesse intervalo.

Corolário 2

Se f e g são duas funções contínuas num mesmo intervalo I e $f'(x) = g'(x)$ para todo o x pertencente a esse intervalo, então existe algum número $k \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + k$

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis.

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \lim_{x \rightarrow \beta} g(x) = \alpha, \text{ com } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pm\infty$$

Seja $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$, com $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Então

$$\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

1.7.5 Importância da Derivada

A partir do estudo da função f' , é nos possível ficar a conhecer o comportamento da função f .

Definição

Seja f uma função diferenciável em a . Diz-se que a é um ponto crítico de f se $f'(a) = 0$. O valor de $f(a)$ é chamado *valor crítico* para f .

Teorema

- Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável à direita no ponto $a \in E \cap E'_+$.
 - Se $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se para $x \in E$ e $a < x < a + \delta$ então $f(a) < f(x)$ (perto de a por valores à direita f é uma função crescente)
 - Se $f'_+(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se para $x \in E$ e $a < x < a + \delta$ então $f(x) < f(a)$ (perto de a por valores à direita f é uma função decrescente)
- Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável à esquerda no ponto $a \in E \cap E'_-$.
 - Se $f'_-(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se para $x \in E$ e $a - \delta < x < a$ então $f(x) < f(a)$ (perto de a por valores à esquerda f é uma função crescente)
 - Se $f'_-(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se para $x \in E$ e $a - \delta < x < a$ então $f(a) < f(x)$ (perto de a por valores à esquerda f é uma função decrescente)
- Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável no ponto $a \in E \cap E'_+ \cap E'_-$.
 - Se $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se para $x, y \in E$ e $a - \delta < y < a < x < a + \delta$ então $f(y) < f(a) < f(x)$ (perto de a f é uma função crescente)
 - Se $f'(a) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se para $x, y \in E$ e $a - \delta < y < a < x < a + \delta$ então $f(x) < f(a) < f(y)$ (perto de a f é uma função decrescente)

Corolário do Teorema de Lagrange

Se f é uma função contínua definida num intervalo I de $f'(x) > 0$ para todo o x pertencente a esse intervalo, então f é crescente nesse intervalo; se $f'(x) < 0$ para todo o x pertencente a esse intervalo, então f é decrescente nesse intervalo.

Nota

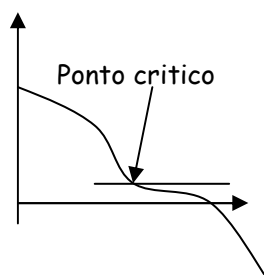
Se f é diferenciável e crescente em I então $f'(x) \geq 0, \forall x$; se f é diferenciável e decrescente em I então $f'(x) \leq 0 \quad \forall x$

Corolário

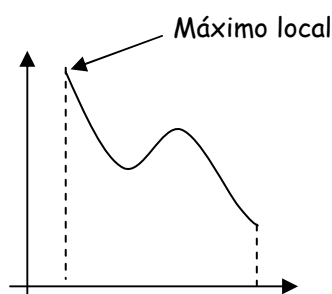
Seja $a \in E \cap E'_+ \cap E'_-$. Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, é diferenciável no ponto a e possui um máximo ou um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$, ou seja a é ponto crítico de f .

Observação

- a pode ser ponto crítico de f e no entanto não ser nem máximo nem mínimo local.



- O corolário anterior estabelece apenas uma condição de extremo máximo local para uma função diferenciável. É importante notar a hipótese de $a \in E \cap E'_+ \cap E'_-$; se apenas uma derivada lateral estiver definida, o ponto não será necessariamente crítico, mesmo que a seja extremo local.



Teorema

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função duas vezes diferenciável em $]a, b[$.

- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, para $c \in]a, b[$ então f tem um mínimo local em c .
- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, para $c \in]a, b[$ então f tem um máximo local em c .

Corolário

Suponha que $f''(c)$ existe. Se f tem um mínimo local em c , então $f''(c) \geq 0$; se f tem um máximo local em c então $f''(c) \leq 0$.

Nota

Para estudar os extremos locais e globais de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deve-se considerar três tipos de pontos:

- os pontos críticos de f em $]a, b[$;
- os pontos a e b ;
- os pontos $x \in]a, b[$, tal que f não seja diferenciável em x .

Exercícios

1) Seja $f(x) = e^x (x^2 - 5x + 6)$, estude f quanto á monotonia e existência de extremos relativos.

2) De uma função real de variável real sabemos que a sua derivada é $f'(x) = \log(x^2 - 2x + 1)$.

Estude f quanto á monotonia e existência de extremos relativos

1.8 Estudo de Funções

Teorema

A segunda derivada dá-nos o sentido das concavidades, assim se:

- $f''(x) > 0, \forall x \in I$, I intervalo de $\mathbb{R}$, então f é convexa em I
- $f''(x) < 0, \forall x \in I$, I intervalo de $\mathbb{R}$, então f é côncava em I .

Definição

Um ponto $a \in D_f$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se a segunda derivada muda de sinal numa vizinhança de a . (se a segunda derivada está definida em a então a é um zero de f'')

Para representar graficamente uma função deve-se determinar:

1. domínio de f .
2. Pontos de intersecção do gráfico com o eixo OX (zeros de f) e com o eixo OY
3. Pontos de descontinuidade
4. Assíntotas do gráfico (limite de f nos pontos de fronteira do seu domínio e os pontos de descontinuidade dá-nos as assíntotas verticais)
5. Derivada f' e o seu domínio
6. Sinal de f' (zeros de f')
7. 2ª derivada f'' e o seu domínio.
8. Sinal de f'' (zeros de f'').

Exercício

Fazer o estudo completo da função $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
2. $OX = OY = (0,0)$
3. não tem
4. $y = 3x$, $x = -2$ $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$,
 $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.
5. $f'(x) = \frac{3x^2(-12 + x^2)}{(-4 + x^2)^2}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \text{ zeros} = \{-\sqrt{12}, 0, \sqrt{12}\}$$

6.

		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
$3x^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$-12+x^2$	+	0	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(-4+x^2)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	s/s	-	0	-	s/s	-	0	+
$f(x)$	↗	$-9\sqrt{3}$ $\approx -15,6$	↘		↘	0	↘		↘	$9\sqrt{3}$ $\approx 15,$	↗

7.

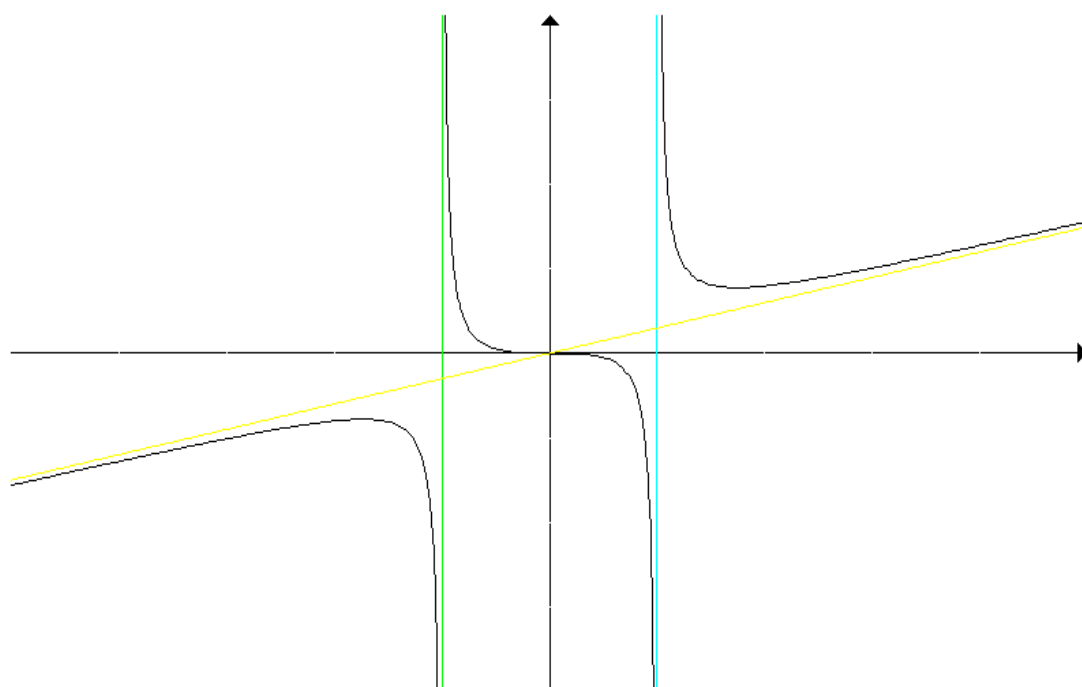
$$f'''(x) = \frac{24x(12+x^2)}{(-4+x^2)^3}$$

$$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \text{ zeros} = \{0\}$$

8.

		-2		0		2	
$24x$	-	-	-	0	+	+	+
$12+x^2$	+	+	+	+	+	+	+
$(-4+x^2)^3$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	s/s	+	0	-	s/s	+
$f(x)$	∩		∪	0	∩		∪

O gráfico:



Regras de Derivadas

$u = f(x); v = g(x); k = \text{Const.}; a = \text{Const.}; \alpha = \text{Const.}$

1. $k' = 0$	12. $(u^v)' = u^v v' \log u + v u^{v-1} u'$	23. $(\text{arc tg } u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$
2. $x' = 1$	13. $(\log u)' = \frac{u'}{u}$	24. $(\text{arc cotg } u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	14. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \log a}$	25. $(\text{arc sec } u)' = \frac{u'}{u \sqrt{u^2 - 1}}$
4. $(uv)' = u'v + uv'$	15. $(\text{sen } u)' = \cos u \cdot u'$	26. $(\text{arc cosec } u)' = -\frac{u'}{u \sqrt{u^2 - 1}}$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	16. $(\cos u)' = -\text{sen } u \cdot u'$	27. $(\text{sh } u)' = \text{ch } u \cdot u'$
6. $(ku)' = ku'$	17. $(\text{tg } u)' = \sec^2 u \cdot u'$	28. $(\text{ch } u)' = \text{sh } u \cdot u'$
7. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	18. $(\text{cotg } u)' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$	29. $(\text{tg h } u)' = \frac{u'}{\text{ch}^2 u} = \sec h^2 u \cdot u'$
8. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	19. $(\sec u)' = \sec u \text{ tg } u \cdot u'$	30. $(\text{arg sh } u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}}$
9. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	20. $(\text{cosec } u)' = -\text{cosec } u \text{ cotg } u \cdot u'$	31. $(\text{arg ch } u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$
10. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	21. $(\text{arc sen } u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	32. $(\text{arg tg h } u)' = \frac{u'}{1 - u^2}$
11. $(a^u)' = a^u u' \log a$	22. $(\text{arc cos } u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	

Exercícios

1. Determine o domínio e o conjunto de pontos de acumulação do domínio das seguintes funções (o conjunto dos pontos de acumulação do domínio de uma função f denomina-se derivado do domínio de f e denota-se por D_f'):

a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x - 2}$

c) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 3}}$

d) $t(x) = \frac{\sqrt{-x + 3}}{\sqrt{x - 2}}$

2. Calcule os seguintes limites, se existirem, ou mostre que não existem:

f) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 1 \\ x + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

g) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 1 \\ x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

h) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 1 \\ x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$, sendo $g(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$, sendo $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x - 2}}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, sendo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, sendo $g(x) = \frac{x}{x-2}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, sendo $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$

n) $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+4} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{se outros valores de } x \end{cases}$

o) $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+4} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{se outros valores de } x \end{cases}$

p) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+4} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{se outros valores de } x \end{cases}$

q) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+4} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{se outros valores de } x \end{cases}$

r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+4} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{se outros valores de } x \end{cases}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{(2x+1) \frac{1}{x^2}}$

t) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(2x-2) \frac{1}{x^2}}$

u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+3)}{x^2+1}$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x}$

w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{x^2+1}$

x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2-x+4}{2x^2+1}$

$$y) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x/(x^2 + 1)}{(2x^2 + 1)/x^4}$$

$$aa) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x/(x^2 + 1)}{(2x^2 + 1)/x^4}$$

$$bb) \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^2 - x + 4)$$

$$cc) \lim_{x \rightarrow 0} (6x^2 - x + 4)$$

$$dd) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$ee) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - |x| - 1}{|x| + 1}$$

$$ff) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| + 1}$$

$$gg) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$hh) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{x}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$$

$$jj) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(x+1)}$$

3. Para cada valor real de m a expressão seguinte define uma função real de variável real f :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - mx + 7 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ |x + 3| + m & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Determine m de modo que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Determine m de modo que $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(0)$.

c) Existirá algum valor de m de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$? Justifique.

4. Considere a seguinte função real de variável real f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3} & \text{se } x \neq -3 \\ 2 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

a) Determine, se existir, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

b) Esboce o gráfico de f .

c) Estude a injectividade e sobrejectividade de f .

5. Considere a seguinte função f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x > 3 \\ -x^2 - 4x & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$$

a) Calcule $f(2)$ e $f(4)$.

b) Poderemos aplicar o teorema de Bolzano ao intervalo $[2, 4]$ e concluir que f admite pelo menos um zero nesse intervalo? Justifique.

c) Justifique a existência de um máximo e de um mínimo de f no intervalo $[-1, 2]$.

6. Mostre que a função $x^2 - 2x - 3$ admite pelo menos um zero no intervalo $[2, 4]$.

7. Para cada valor real de m a expressão seguinte define uma função real de variável real f :

$$f(x) = \begin{cases} 2m+x & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Determine m de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$.

8. Considere a função real de variável real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x + 1}{x-1} & , \quad x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ 2x - e^{x-1} & , \quad x < 1 \end{cases}$$

- Determine o domínio da função f .
- Estude a função f quanto à continuidade no ponto de abscissa 1.
(No caso de f não ser contínua no ponto 1, deve indicar, justificando, se é contínua à esquerda, ou à direita, nesse ponto)
- Prove que f admite pelo menos um zero no intervalo $[0,1]$.
- Pode garantir a existência de máximos e mínimos no intervalo $[0,2]$?

9. Considere a função real de variável real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x e^x & , \quad x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

- Determine o domínio da função f .
- Estude a função f quanto à continuidade no ponto de abscissa 1.
(No caso de f não ser contínua no ponto 1, deve indicar, justificando, se é contínua à esquerda, ou à direita, nesse ponto)
- Verifique se f admite pelo menos um zero no intervalo $[-1,2]$.
- Pode garantir a existência de máximos e mínimos no intervalo $[1,2]$?

10. Sendo a e b números reais, considere a família de funções reais de variável real:

$$h(x) = \begin{cases} ax - b & , \quad x \leq -1 \\ -2x & , \quad -1 < x < 3 \\ bx^2 - a & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Determine a e b de modo que:

- h seja contínua em $\mathbb{R}$;
- h seja contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

11. Considere a seguinte função real de variável real $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$. Determine dois inteiros consecutivos, n e $n+1$, tais que a função f tenha uma raiz pertencente ao intervalo $[n, n+1]$.
12. Mostre que todo o número real positivo tem uma raiz quadrada. Utilize a função auxiliar $f(x) = x^2 - t$, $t > 0$ e aplique o teorema de Bolzano.
13. Mostre que a equação $0 = x^3 + 4x^2 + 2x + 5$ tem pelo menos uma solução real.
14. Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x > 3 \\ \frac{-x^2 + x}{3} & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$$

Mostre que a restrição de f ao intervalo $[2, 7]$, $f|_{[2, 7]}$, tem um máximo e um mínimo.

15. Use a definição para calcular a derivada das seguintes funções nos pontos indicados:
- a) $f(x) = x+3$, nos pontos $x = 0$ e $x = 2$
 - b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ no ponto $x = 2$
 - c) $h(x) = e^x$, nos pontos $x = 0$ e $x = 2$
 - d) $m(x) = \log x$, nos pontos $x = 1$ e $x = 2$
 - e) $n(x) = \cos x$, nos pontos $x = 0$ e $x = 2$
16. Para cada valor real de a e b a expressão representa uma função:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x > -1 \\ x^3 - 4x + 5 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Determine a e b de modo que a expressão seja diferenciável em $\mathbb{R}$.

17. Determine uma expressão que defina a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$

c) $f(x) = (3x^2 + 4x)(1-x^3)$

d) $f(x) = \frac{x(x+3)}{x^2+1}$

e) $f(x) = (-5x^2 + 3)^2$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x}}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

i) $f(x) = (x^2 + 2x)^{\frac{2}{3}}$

j) $f(x) = x \sin(2x - 1)$

k) $f(x) = 2x \operatorname{tg}^2(x+1)$

l) $f(x) = e^x \sin(x-1)$

m) $f(x) = \operatorname{cotg} \frac{x+3}{1-2x}$

n) $f(x) = e^{x^2-3}$

o) $f(x) = \log(2+x^2)$

p) $f(x) = \log_2(2+x^2)$

q) $f(x) = \log(\sin x)$

r) $f(x) = \log(2+3x^3) - x$

s) $f(x) = \frac{\log(x^2)}{\cos(e^{\frac{1}{x}})}$

18. Verifique se são ou não diferenciáveis as seguintes funções no ponto dado e, em caso afirmativo, indique o valor da derivada nesse ponto:

a) $f(x) = (x^2 + 2x)^2$, no ponto $x = 3$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $x = 3$

c) $f(x) = |x - 3|$, no ponto $x = 3$

d) $f(x) = |x^2 - 9|$, no ponto $x = 3$

e) $f(x) = |x^3 - 27|$, no ponto $x = 3$

f) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x}}$, no ponto $x = 3$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$, no ponto $x = 1$

h) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x > -1 \\ 1 & \text{se } x = -1 \\ x + 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$, no ponto $x = -1$

i) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$

j) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2 - 1} & \text{se } x \geq -1 \\ x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$, no ponto $x = -1$

k) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$

l) $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{4} \\ \frac{4x}{\pi} & \text{se } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$, no ponto $x = \frac{\pi}{4}$

ponto

19. Considere as seguintes funções f, g, h e m :

$$f(x) = (-5x + 1)^2, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad m(x) = \cos x$$

Utilizando e não utilizando a regra da cadeia calcule:

- a) $(f \circ g)'(1)$
- b) $(g \circ f)'(1)$
- c) $(m \circ h)'(1)$
- d) $(h \circ m)'(\pi/4)$

20. Considere a seguinte função:

$$f(x) = 2e^{-x^3} + 1$$

Determine $(f^{-1})'(2)$.

21. Considere a seguinte função:

$$f(x) = x^7 + 2x^5 + 5x^3 + 1$$

Determine $(f^{-1})'(9)$.

22. Considere a função:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

- a) Calcule $f'(2)$.
- b) Sendo h uma função real de variável real tal que $h(-1) = 2$ e $h'(-1) = 3$, calcule:
 - i) $(f + h)'(-1)$,
 - ii) $(f \cdot h)'(-1)$,
 - iii) $(f / h)'(-1)$,
 - iv) $(f \circ h)'(-1)$.

23. Mostre que a função $e^{\sin x} - 1$ admite exactamente um zero real no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

24. Considere a função real de variável real $f(x) = -x^3 + 9x + 2$.

- Mostre que a função f verifica as condições do teorema de Rolle no intervalo $[0, 3]$.
- Calcule um ponto $c \in]0, 3[$ tal que $f'(c) = 0$.
- Mostre que existe $c \in]0, 1[$ talque $f'(c) = 8$

25. Considere a seguinte função real de variável real f :

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Verifique que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- Mostre que f é contínua e diferenciável no intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- No intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ f' não tem zeros. Isto contradiz o teorema de Rolle?

26. Considere a seguinte função de variável real f :

$$f(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$$

- Verifique que no intervalo $[0, 3]$ a função satisfaz o teorema de Rolle.
- Mostre que a tangente ao gráfico de f no ponto $x = \frac{3}{2}$ é uma recta horizontal.

27. Considere a função

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

Poderá aplicar o teorema de Rolle a f no intervalo $[-2, 2]$?

28. Considere a seguinte função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & , x > 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 & , x \leq 0 \end{cases}$$

- Estude f quanto à continuidade e diferenciabilidade.

b) No intervalo $[-1,0]$ a função admite máximos e mínimos?

c) Mostre que no intervalo $[-1,0]$ f admite exactamente um zero.

d) Pode assegurar a existência de um ponto $c \in [-1,1]$ tal que $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$?

29. Considere as funções $f(x) = x^3 - 4x - 1$ e $g(x) = \ln x$.

a) Verifique as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[0,2]$ para a função f e determine o número de Rolle.

b) Calcule $(f \circ g)'(1)$.

30. Seja $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) - ax^2 & , x < 0 \\ e^{x^2} - ax^2 & , x \geq 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

a) Verifique se existe um valor de a real, de modo a que a função seja contínua e diferenciável.

b) Considere $a = 5$. Prove que no intervalo $[0,1]$ a função admite pelo menos um zero.

c) Considere $a = 0$. Averigüe a aplicabilidade à função, no intervalo $[0,2]$, do:

c.1) Teorema de Rolle;

c.2) Teorema de Bolzano;

c.3) Teorema de Lagrange.

31. Considere a seguinte função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + a & , x > -1 \\ x^3 - 4x + 5 & , x \leq -1 \end{cases}$$

a) Determine a de modo a que a função seja contínua.

b) Estude f quanto à diferenciabilidade.

c) Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(-2)$.

d) No ponto $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, a recta tangente ao gráfico é horizontal? Justifique.

e) Mostre que no intervalo $[-2,8]$ a função admite pelo menos um zero.

32. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ no ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo das ordenadas.

33. Considere a função $g(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$.

- Determine o domínio de g .
- No ponto $x = -1$, a recta tangente ao gráfico é horizontal?
- Considere h uma função real de variável real tal que $h(5) = -1$ e $h'(5) = 2$. Calcule $(f \circ h)'(5)$.
- Estude g quanto à monotonia e verifique quanto à existência de extremos relativos.

34. De uma função $g :]-1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ sabe-se que:

- $g(1) = 3$
- $g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{1 + x}$

- Estude g quanto ao sentido das suas concavidades e conclua quanto à existência de pontos de inflexão.
- Verifique se no ponto $x = 0$ a recta tangente ao gráfico é horizontal.
- Considere h uma função real de variável real tal que $h'(3) = 2$. Calcule $(h \circ g)'(1)$.

35. Considere a função $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$.

- Verifique a existência de assíntotas.
- Estude g quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

36. Seja $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

- Verifique se o gráfico de f admite assíntotas horizontais.
- Determine $f'(x)$.
- Determine $(f^{-1})'(e)$.
- Existe algum ponto onde a recta tangente ao gráfico seja horizontal?

37. Considere a função $g(x) = \frac{e^{x-1}}{x-2}$.

- Verifique se a função g admite assíntotas.
- Pode assegurar a existência de máximos e mínimos no intervalo $[0,3]$? Justifique.
- Calcule $(g^{-1})'(-1)$.

38. Considere as funções reais de variável real, h e f , definidas por:

$$h(x) = x^2 + 2 - 2\ln x \quad \text{e} \quad f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x}{x}.$$

- Estude h quanto à monotonia e conclua que $h(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}^+$.
- Verifique que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ e justifique que f é uma função estritamente crescente.
- Determine $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Mostre que a recta de equação $y = x - 1$ é assíntota do gráfico da função f .
- Mostre que o gráfico representativo da função f tem um ponto em que a recta tangente é paralela à assíntota $y = x - 1$.

39. Considere a função real de variável real h definida por:

$$h(x) = (1-x)e^x.$$

- Verifique que $h'(x) = -xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Estude h quanto ao sentido das suas concavidades e conclua quanto à existência de pontos de inflexão.
- Verifique se no ponto $x = 0$ a recta tangente ao gráfico é horizontal.
- Estude h quanto à existência de assíntotas.
- Determine $(h^{-1})'(0)$.

40. Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + e^x, & x < 0 \\ 1 + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Determine o domínio da função f .
- b) Verifique que f é contínua no ponto $x = 0$.
- c) Justifique, usando o Teorema de Bolzano, que f admite um zero no intervalo $] -2, 0[$.
- d) Estude f quanto à existência de assíntotas do gráfico.

41. Seja $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- a) Determine, se existirem, os extremos relativos e os pontos de inflexão do gráfico da função g .
- b) Determine, caso exista, $(g^{-1})'(0)$.

42. Estude e represente graficamente as seguintes funções:

- a) $f(x) = x^2 + 5$
- b) $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$
- c) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x$
- d) $f(x) = x^3 - 27$
- e) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 6}$
- f) $f(x) = \log(x^2 - 2x + 2)$
- g) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$
- h) $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$
- i) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
- j) $f(x) = \frac{\log |x|}{x^2}$

43. Considere a seguinte função $f(x) = \frac{(x+2)^2}{2}$.
- Calcule as coordenadas dos pontos A e B de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.
 - Considere uma recta paralela a AB. Calcule as coordenadas do ponto de tangência dessa recta com o gráfico de f.
 - Escreva a equação dessa recta.

44. Considere a função $f(x) = e^{x^2-4} + x$. Determine uma recta tangente ao gráfico da função f paralela à recta definida pelos pontos do gráfico de f de abcissas -1 e 1.

45. Determine a expressão da derivada de cada uma das seguintes funções:

- $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$;
- $y = \cos^2 x$;
- $y = \cos x^2$;
- $y = \frac{x + \tan x}{\cos x}$;
- $y = \sqrt{\sin x} + \sin x \cos x$

46. Considere a função real de variável real, f , de domínio $[-2\pi, 2\pi]$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\pi}{2}, & x \geq -\frac{\pi}{2} \\ -2x - \frac{\pi}{2}, & x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determine os extremos da função com recurso ao cálculo da função derivada.

Capítulo II: Estatística

1 Introdução. Breve nota histórica

1.1 Nota Histórica

As origens da estatística remontam a cerca de 2 000 anos antes de Cristo. Por volta do séc. XXII A.C. já os chineses realizavam inventários mais ou menos regulares da população.

Até ao séc. XV, a Estatística tratava quase exclusivamente de assuntos de estado. Tornou-se autónoma por volta do séc. XVII com a chamada escola alemã. Foram os alemães que lhe deram o nome STAATENKUNDE (Achemel, séc. XVIII) que significa "assuntos de estado".

Mais ou menos na mesma época é a "Escola dos Aritméticos Políticos" (John Graunt, William Petty e outros) que, em Inglaterra estudou algumas aplicações à Demografia, Saúde Pública, Comércio, etc. Simultaneamente começaram a aplicar-se à estatística conhecimentos de matemática.

Uma nova fase de grande desenvolvimento surgiu com a sua aplicação aos jogos de azar (Cavaleiro de Méré, Pascal, Fermat, etc). É nesta fase que também se verifica um grande desenvolvimento o Cálculo das Probabilidades.

A aplicação aos fenómenos sociais marcou o arranque definitivo do seu desenvolvimento e importância. Isto em meados do séc. XIX. Foi Chutelet quem, pela primeira vez definiu Homem Médio. Simultaneamente chamou a atenção para a notável consistência de alguns fenómenos sociais. Mostrou, por exemplo, que a criminalidade está, em geral ligada com a origem social do criminoso. Pearson estudou aplicações à Biometria. Student dedicou-se ao estudo de pequenas amostras seguidas de generalizações (inferência estatística). Mas houve muitos mais: Fisher, Edgeworth, Tchebychev, Wald.

1.2 Objecto da Estatística

Duma forma mais geral pode dizer-se que a estatística é um conjunto de métodos e técnicas destinadas ao estudo de populações, tendo em vista por um lado a interpretação da realidade e por outro a previsão com base nessa realidade.

É costume dividir-se a estatística em duas partes:

- **Estatística Descritiva** - recolha, ordenação, classificação e análise de dados;
- **Estatística Indutiva** (inferência estatística) - generalizações e previsões para populações a partir de dados das amostras.

Mais modernamente costuma considerar-se uma outra área da Estatística, a Análise exploratória de dados, em que se procura identificar características ou aspectos especiais dos dados com recurso às técnicas da Estatística Descritiva.

2. Estatística Descritiva

A estatística descritiva consiste na recolha, apresentação, análise e interpretação de dados numéricos através da criação de instrumentos adequados: quadros, gráficos e indicadores numéricos.

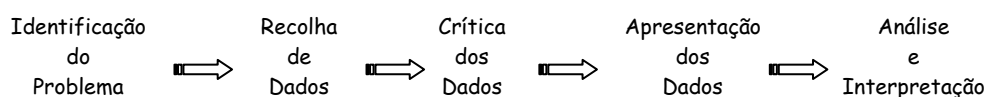
Os métodos para recolher, classificar, sintetizar, apresentar e interpretar informação quantitativa constituem uma parte importante da teoria estatística.

Convém referir que o termo "estatística" é utilizado para referir dois conceitos diferentes, conforme se utiliza no singular ou no plural. Quando utilizado no plural, é sinónimo de factos ou dados numéricos, enquanto que no singular constitui um objecto de estudo, uma ciência e compreende, como referido anteriormente, um conjunto de princípios e métodos de recolha, classificação, síntese e apresentação de dados numéricos.

A utilidade da estatística pode ser resumida do seguinte modo:

- Permite descrever e compreender relações entre variáveis;
- Permite a tomada de melhores e mais rápidas decisões;
- Facilita a tomada de decisões para fazer face à mudança.

O método estatístico de resolução de problemas é constituído pelas seguintes etapas:



2.1 As Etapas do Método Estatístico

2.1.1 Identificação do Problema

É necessário, desde o início do estudo, estar claro qual o problema a analisar e, uma vez conhecido, qual o tipo de decisões que se pretendem tomar. Esta etapa já requer algum conhecimento estatístico uma vez que os métodos a aplicar, não são de modo algum, independentes da informação que se pretende recolher. Uma identificação incorrecta do problema torna todas as etapas seguintes inúteis. Para identificar melhor o problema poderá ser usada alguma informação quantitativa já existente.

2.1.2 Recolha de Dados

A recolha de toda a informação necessária pode ser feita directamente quando os dados são obtidos de fonte originária (possível encontrar em ficheiros ou registos)-***dados primários***, ou de forma indirecta quando os dados provêm já de uma recolha directa-***dados secundários***.

Exemplo

Dados Primários: todos os dados resultantes da inquéritos feitos directamente a uma população ou a um grupo dessa população; todos os dados disponíveis nas estatísticas do INE.

Dados secundários: Uma estimativa da esperança de vida à nascença para a população portuguesa no ano 2000 com base nos valores observados nos últimos dez anos; a taxa de inflação para o ano de 1995.

As fontes de dados podem ainda ser classificadas como *internas* (por exemplo, os serviços de contabilidade, produção ou de marketing de uma empresa constituem fontes internas de informação económica e comercial) e *externas* (provenientes dos organismos públicos, como o Governo, o Instituto Nacional de Estatística, ou privados como os semanários económicos e revistas de especialidade).

Relativamente à periodicidade, a recolha de dados pode ser classificada como *contínua*-quando realizada permanentemente; *periódica*-quando efectuada em intervalos de tempo e *ocasional*-quando realizada de modo esporádico.

Quando a informação não está toda disponível, é necessário recolher nova informação, o que poderá ter vantagens e desvantagens. Vantagens porque permite uma definição precisa da informação, desvantagens porque poderá tornar o estudo e a obtenção de resultados demasiado morosos e caros.

2.1.3 Crítica dos dados

Feita a recolha dos dados, procede-se a uma revisão crítica de modo a suprimir valores estranhos ou eliminar erros capazes de provocar futuros enganos de apresentação e análise ou até mesmo enviesar as conclusões obtidas.

2.1.4. Apresentação dos Dados

Uma vez recolhidos os dados e feita a revisão crítica, convém organizar os dados de uma forma prática e racional, para um melhor entendimento do fenómeno que se pretende estudar. O principal objectivo da Estatística Descritiva é então criar os instrumentos necessários para classificar e apresentar conjuntos de dados numéricos de tal modo que a informação neles contida seja apreendida mais fácil e rapidamente.

2.1.5 Análise e Interpretação dos Resultados

A última etapa consiste em interpretar os resultados encontrados. Esta interpretação está tanto mais facilitada quanto se tiverem escolhido, em etapas anteriores, os instrumentos mais apropriados à representação e análise do tipo de dados recolhidos.

Conclusões enviesadas podem ser propositadas ou não e ter diferentes causas. O exemplo de entidades que, para situações idênticas, retiram conclusões bastante divergentes: as taxas de inflação e desemprego estimadas pelos órgãos governamentais e pelos sindicatos raramente coincidem. São exemplos de enviesamento propositado para servir fins políticos em que se torna difícil demonstrar, com rigor, qual delas está errada. No entanto, muitas vezes o enviesamento não é propositado. Pode começar por ser o resultado da utilização de dados pouco adequados, pode ser explicado pela utilização de medidas de estatística descritiva pouco adequadas ao problema em causa, por diferentes escalas de medida ou ainda por bases de comparação pouco adequadas.

2 Apresentação dos Dados: Quadros e Gráficos

2.1 Quadros

O sucesso na utilização de dados estatísticos depende, em grande parte, do modo como estes são apresentados e podem ser utilizados.

Quando nos deparamos com grandes massas de dados não classificados torna-se muito difícil tirar conclusões. É pois necessário proceder a um trabalho prévio de ordenação e apresentação adequada desses valores. Essa representação pode ser feita através de *quadros* ou *gráficos*.

Por exemplo, o Quadro 1 apresenta 40 tiragens de 6 bolas cada, de uma urna com bolas de várias cores, e que, em cada tiragem se anotou o número de bolas azuis. O resultado das observações foi o seguinte:

3	1	3	5	0	1	2	6	6	6
2	4	0	3	0	4	1	2	2	6
0	5	2	5	1	5	2	4	1	4
1	5	6	2	3	5	0	3	4	1

Quadro 1-Número de bolas azuis em 40 tiragens de 6 bolas

2.2 Gráficos

A representação gráfica dos dados estatísticos tem por finalidade, dar uma ideia, a mais imediata possível dos resultados obtidos permitindo chegar-se a conclusões rápidas sobre a evolução do fenómeno em estudo ou sobre a relação entre os diferentes valores apresentados. Para que tal seja conseguido, quando se constrói um gráfico deverá ter-se em conta os elementos simplicidade, clareza e veracidade.

2.2.1. Gráfico de Linhas

É porventura o mais utilizado de entre todos os tipos de gráficos devido à sua facilidade de execução e de interpretação. Não é tão preciso como um quadro mas tem a vantagem de clarificar as relações existentes entre as variáveis em análise.

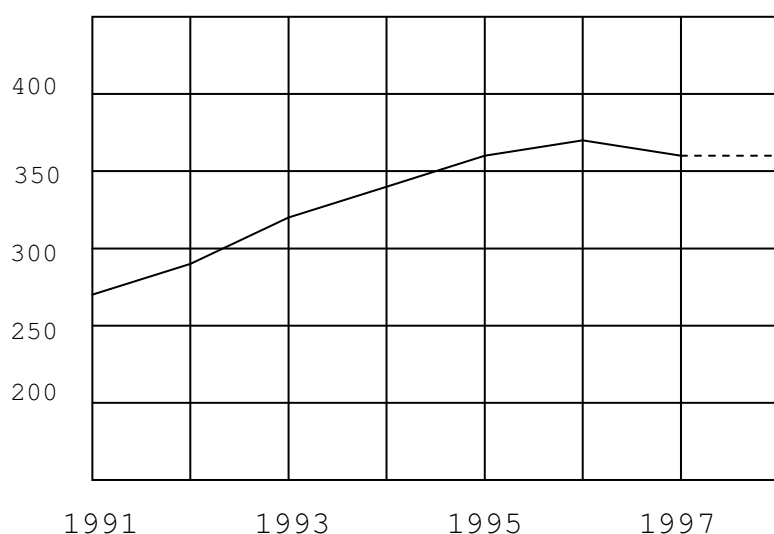


Gráfico 1-Vendas da Empresa X (milhares de contos); 1998 estimativa

O Gráfico 1 é um exemplo de um gráfico de linhas e mostra-nos as vendas da empresa X durante o período 1991/98 sendo o valor de 1998 uma previsão com base nos valores do primeiro semestre.

2.2.2. Gráfico de Barras

O gráfico de barras constrói-se colocando os valores da variável em observação num dos



eixos (horizontal) e as respectivas frequências no outro eixo (vertical).

Gráfico 2-Estimativas da população portuguesa 1985-2015 (milhões)

O Gráfico 2 é um exemplo de um gráfico de barras onde se apresentam as estimativas da população portuguesa até ao ano 2015 sendo, desde logo, visível que a população total crescerá até ao ano 2000, data a partir da qual diminuirá de forma constante.

Tal como os gráficos de linhas, também os gráficos de barras nos permitem fazer a comparação simultânea de duas ou mais variáveis.

2.2.3. Gráfico de Sectores

Consiste na representação gráfica dos resultados num círculo, por meio de sectores. Para o construir, divide-se o círculo em sectores, cujas as áreas serão proporcionais aos valores individuais. Como exemplo,

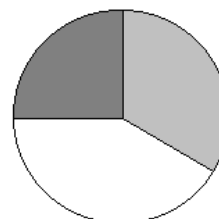


Gráfico 3-Distribuição da população activa portuguesa pelos três sectores da actividade

2.2.4. Gráfico Polar

Este tipo de gráfico representa os dados estatísticos por meio de um polígono. Para o construir, divide-se uma circunferência em tantos arcos quantos forem os dados a representar. Por esses pontos de divisão traçam-se os raios da circunferência. Em cada raio é representado um valor da série, marcando-se um ponto cuja distância ao centro é directamente proporcional a esse valor. Em seguida unem-se todos os pontos.

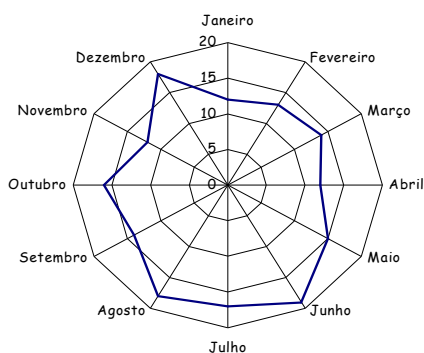


Gráfico 4-Vendas na Empresa ALFA durante o ano de 1996

3 Distribuição de Frequências

3.1 Alguns Conceitos Fundamentais

3.1.1 População ou Universo

A distribuição de frequências é a forma mais importante de apresentação dos dados em Estatística Descritiva. Esta, pretende medir ou contar os dados obtidos na tomada de observações de determinada fonte. Por exemplo, para conhecer a opinião pública sobre determinada medida governamental, uma pequena percentagem da população é seleccionada e inquirida a respeito da medida. Neste caso, a fonte de informação é a população a quem se destina a medida governamental.

A fonte de observação constitui a *população* ou *universo*, um conjunto de indivíduos que apresentam uma ou mais características em comum. A população pode ser finita ou infinita, dependendo do número de elementos que a compõe ser finito ou infinito.

Ao número de elementos da população chamamos *efectivo*. É usual chamar indivíduos aos elementos da população.

3.1.2. Amostra

Na maioria das vezes, é impossível conhecer as características de todos os elementos da população e torna-se necessário retirar uma *amostra* ou subconjunto (que se supõe ser representativo) dessa população, para a qual serão estudadas as características (a amostra só é representativa se for muito elevada a probabilidade de nela se verificarem as características da população).

3.1.3 Atributos ou características de uma população

Ao estudar uma população ou uma amostra dessa população o que se pretende é conhecer as suas *características* ou *atributos* para que, posteriormente, seja possível tomar decisões com base nesse conhecimento: fazer comparações com outras populações, fazer previsões para o futuro, etc. As características ou atributos dos elementos podem ser *qualitativos* ou *quantitativos*. Qualitativa, se as suas diferentes modalidades não são mensuráveis, isto é, não podem ser expressos através de números. Caso contrário, trata-se de um atributo quantitativo, ou seja, esse atributo varia de intensidade de elemento para elemento da população e essa intensidade pode ser expressa através de unidades físicas.

3.1.4 Dados Discretos e Contínuos

Os dados quantitativos referentes a determinada característica podem também ser classificados como *discretos* ou *contínuos*. São discretos aqueles que tomam um número finito ou infinito numerável de valores. Dados contínuos podem tomar um número infinito não numerável de valores.

3.1.5 Variável

Variável é um símbolo que representa determinada característica de uma população ou amostra de uma população. Tal como uma característica, uma variável pode ser qualitativa ou quantitativa, discreta ou contínua.

Na prática, a distinção entre variáveis discretas e contínuas é por vezes artificial. A precisão de uma medida é sempre limitada e os resultados são apresentados muitas vezes sob a forma discreta. Inversamente, desde que uma variável estatística possa tomar um grande número de valores, os valores vizinhos aparecem, relativamente, muito próximos, e a variável é considerada e tratada como sendo uma variável contínua.

Assim, a distinção entre variáveis estatísticas assenta essencialmente nos valores serem ou não apresentados agrupados em classes.

Exemplo

Variáveis discretas: número de crianças a cargo de uma família, número de acidentes de trabalho num determinado estabelecimento, número de vendas de um determinado aparelho, etc.

Variáveis contínuas: a altura, o peso e a idade de um indivíduo, a distância entre dois pontos, o débito numa canalização, etc.

4 Distribuição de Frequências de Variáveis Discretas

Considere-se uma população (N) ou amostra (n) de indivíduos com a característica que apresenta p modalidades observadas $x_1, x_2, \dots, x_p$. Dá-se o nome de distribuição de frequências ao conjunto de todos os valores ou modalidades de uma variável e das frequências ou número de ocorrências correspondentes.

O quadro da distribuição de frequências é construído da seguinte forma:

Numa coluna colocam-se todos os valores que a variável apresenta e na segunda coluna o número de ocorrências correspondente a cada valor da variável.

x_i	Frequências Absolutas
x_1	n_1
x_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_p
	n

Quando se trata de uma variável discreta, a construção de um quadro de distribuição de frequências é imediata: a cada valor da variável faz-se corresponder o número de ocorrências.

A *frequência absoluta* (n_i) é o número de vezes que cada modalidade da variável se repete na amostra ou população.

A *frequência relativa* (f_i) de um valor da variável é dada por $f_i = \frac{n_i}{n}$, isto é, o número de vezes que esse valor ocorre (n_i) relativamente ao total da amostra (n) ou população (N).

As frequências acumuladas são a soma do número de ocorrências para os valores da variável inferiores ou iguais ao valor dado. Representam assim, o número ou proporção de elementos observados que possuem o valor da característica igual ou inferior à modalidade em causa.

Assim, $\text{cum } n_i$ é a frequência absoluta acumulada, $\text{cum } f_i$ é a frequência relativa acumulada.

Verifica-se também que $\sum_{i=1}^p n_i = n$ e $\sum_{i=1}^p f_i = 1$.

Exemplo

O número de erros cometidos por uma dactilógrafa em 100 páginas nunca foi superior a quatro e distribui-se da seguinte maneira:

x_i	n_i	f_i	$\text{cum } n_i$	$\text{cum } f_i$
0	10	0,10	10	0,10
1	15	0,15	25	0,25
2	25	0,25	50	0,50
3	40	0,40	90	0,90
4	10	0,10	100	1,00
Total	$\sum = 100$	1,00		

As frequências absolutas mostram-nos, por exemplo, que apenas 10 páginas não tinham qualquer erro e que em 40 páginas foram encontrados três erros. As frequências relativas permitem-nos concluir que 25% das páginas tinham dois erros enquanto que as frequências acumuladas nos dão a informação de que 50 páginas, correspondendo a 50% do total das páginas dactilografadas, tinham no máximo dois erros.

5 Distribuição de Frequências de Variáveis Contínuas

As variáveis contínuas, por poderem tomar um número infinito não numerável de valores, obrigam-nos à definição de classes de valores, que passam a ser as modalidades da característica em estudo. Para definir estas classes é necessário introduzir alguns novos conceitos: o número de classes, a amplitude, limite e ponto médio ou centro das classes.

Não há uma fórmula exacta para determinar o número de classes. Não deverá ser um número muito grande para introduzir irregularidades que poderão não existir na população, mas também não deverá ser muito pequeno para que não haja perda de informação. É também de evitar um número muito pequeno ou muito elevado de intervalos.

Existem algumas regras básicas que deverão ser seguidas na construção dos intervalos:

1. O número de classes (k) deverá estar compreendido entre quatro e catorze;
2. Nenhuma das classes deverá ter frequência nula;
3. As classes deverão ter, sempre que possível amplitudes iguais;
4. Os pontos médios das classes deverão ser números de cálculo fácil;
5. Classes abertas deverão ser evitadas embora nem sempre seja possível fazê-lo;
6. Os limites das classes são definidos de modo a que cada valor da variável é incluído num e só num intervalo;

Tendo em conta estas regras, por vezes é adoptada uma das seguintes soluções:

- I) Número de classes $k=5$ para $n < 25$ e $k \approx \sqrt{n}$ para $n \geq 25$
- II) Fórmula de Sturges: $k \approx 1 + 3,22 \log n$

A *amplitude* das classes (a_i) poderá ser calculada, se pretendermos todas as classes com a mesma amplitude, da seguinte maneira: $a_i = \frac{R}{k}$ em que R é a diferença entre os valores máximo e mínimo da variável e k o número de classes.

Exemplo

Considere-se a distribuição dos salários (em euros) dos empregados da empresa ALFA.

Classes de rendimentos mensais ($\times 10\text{€}$) x_i	Número de empregados n_i	f_i	$\text{cum } n_i$	$\text{cum } f_i$
Menos de 40	5	0,083	5	0,083
40-60	23	0,383	28	0,467
60-80	17	0,283	45	0,750
80-100	8	0,133	53	0,883
Mais de 100	7	0,117	60	1,000
Total	$\sum = 60$	1,00		

Neste exemplo, duas classes extremas têm amplitude indeterminada e as restantes classes têm amplitude 20. O centro de cada classe é o seu ponto médio, sendo, por exemplo, para a segunda igual a 50. No que diz respeito aos limites da cada classe, estabelece-se que o limite superior não lhe pertence o que significa que, por exemplo, a segunda classe integra o valor 40 mas não integra o 60.

6 Representação Gráfica das Distribuições de Frequências

A leitura dos quadros de frequências, a síntese de informação que eles contêm é por vezes difícil.

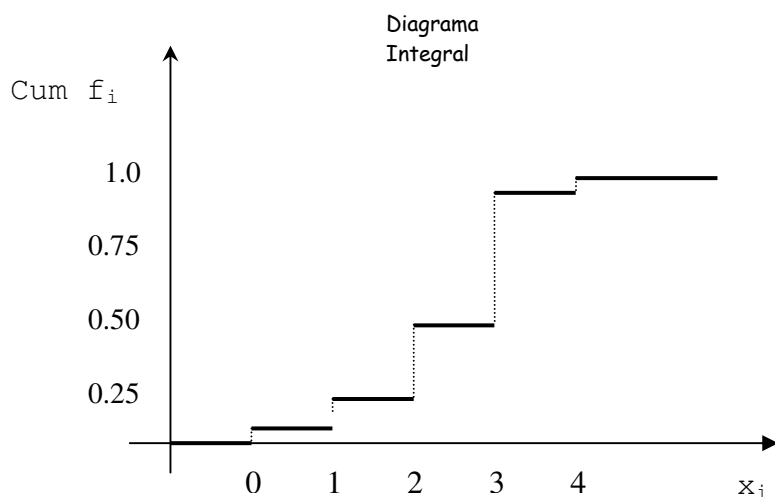
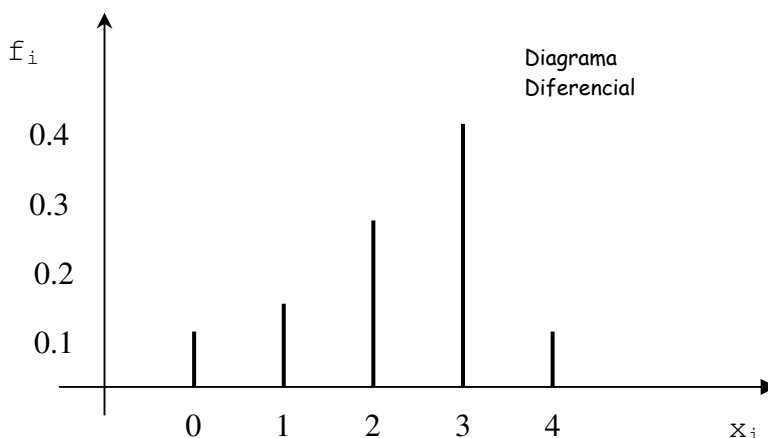
Uma distribuição estatística pode ser descrita de uma forma bastante mais clara graficamente. Uma representação gráfica aparece como um meio de síntese e de estudo extremamente eficaz.

A representação gráfica utilizada vai depender do tipo de variável (discreta ou contínua) e de se tratar de uma frequência simples ou acumulada.

6.1 Variáveis Discretas

Para representar a distribuição de frequências relativas de uma variável discreta utiliza-se o gráfico de barras ou diagrama diferencial.

No exemplo dado do número de erros cometidos por página dactilografada, a representação gráfica seria a representada ao lado.

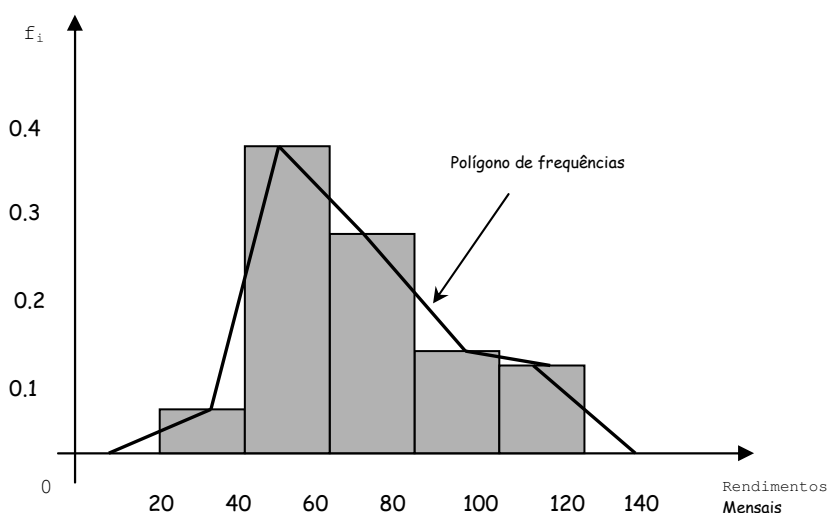


Como as variáveis discretas assumem valores separados uns dos outros, a representação gráfica das frequências acumuladas vai ter o aspecto de uma série de degraus: é o chamado *diagrama integral*.

6.2 Variáveis Contínuas

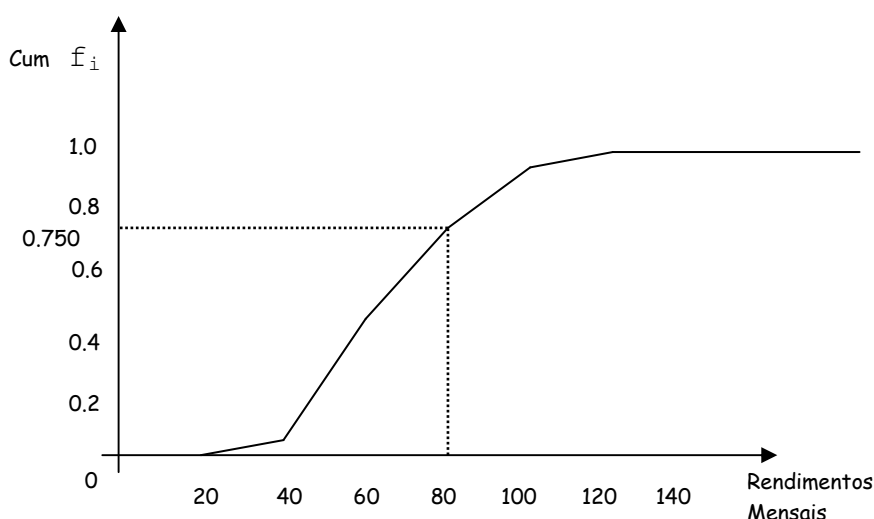
A representação gráfica adequada para as frequências simples deste tipo de variáveis é o *histograma*: diagrama de áreas em que a área de cada rectângulo é proporcional à frequência observada. No eixo horizontal colocam-se as classes e no eixo vertical as frequências absolutas ou relativas. Quando a amplitude das classes extremas não está definida, convencionam-se que estas classes têm a amplitude das classes adjacentes.

Para o exemplo anteriormente apresentado, da distribuição dos salários dos trabalhadores da empresa ALFA, pressupondo que a primeira e a última classes têm amplitude igual às classes adjacentes, ou seja 20, o histograma será o apresentado no gráfico seguinte:



A partir do histograma é usual construir-se o polígono de frequências, uma forma visual alternativa ao histograma, que se obtém unindo os pontos médios dos topos de rectângulos com segmentos de recta. Para fechar o polígono é necessário criar uma classe adicional em cada um dos extremos do histograma, com amplitude idêntica à das classes adjacentes e com frequência nula.

Uma outra maneira útil de apresentação gráfica é a que utiliza as frequências acumuladas. Para estas, pode traçar-se um polígono de frequências acumuladas pressupondo que a distribuição dos elementos dentro da classe se faz de uma forma uniforme o que origina, no intervalo de valores de uma mesma classe, uma representação de tipo linear.



Deste polígono de frequências acumuladas retiramos, por exemplo, que 75% dos empregados da empresa recebem salários inferiores a 80 contos.

6.3 Diagrama "Stem and Leaf"

Este diagrama utiliza algumas características do histograma mas sem se perder a informação contida nos dados individuais. O diagrama dá-nos as idades de 72 dos compradores de habitações em Telheiras. Podemos observar a partir dos dados que as idades variam entre 20 e 84 anos. Formam-se classes com amplitude, por exemplo, de 10 anos, cujos valores extremos (20, 30, 40, ...) se colocam na vertical de um diagrama de *stem and leaf*. Na horizontal e opostos a cada extremo da classe, escrevem-se os dígitos referentes às unidades das idades de cada comprador.

20 11599
 30 0011245578
 40 000112344556678899
 50 012222334445556677888
 60 0044589
 70 1355
 80 4

Se rodássemos o diagrama para a esquerda ele assemelhar-se-ia a um histograma sem que, no entanto, se perdesse a informação original. Por exemplo, neste caso é ainda possível saber quais as idades exactas dos dezanove compradores que têm entre 40 e 50 anos.

7 Medidas de Estatística Descritiva: Medidas de Localização

Do exame visual da representação gráfica duma distribuição estatística, destacam-se:

- A ordem de grandeza da variável estatística, caracterizada pelos valores da variável situados no centro da distribuição: *tendência central da variável*;
- A maior ou menor flutuação à volta da tendência central: *dispersão da variável*.

Yule definiu alguns critérios que as medidas de estatística descritiva deverão satisfazer:

1. Objectividade;
2. Dependência de todas as observações;
3. Significado bem preciso para a sua interpretação;
4. Facilidade de cálculo;
5. Pouca variabilidade às flutuações de amostragem;
6. Facilidade de manejo no cálculo algébrico.

Neste ponto o estudo recai sobre as medidas de localização, medidas estas que localizam os valores observados da variável no eixo dos números reais. As mais importantes são as medidas de tendência central pois representam os fenómenos pelos seus valores médios, em torno dos quais tendem a concentrar-se os valores observados.

7.1 Medidas de Tendência Central

7.1.1 Média Aritmética

A média aritmética é a soma de todos os valores observados dividida pelo número de observações.

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Média da População
(dados desagregados)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Média de uma amostra da população
(dados desagregados)

onde:

x_i valores individuais observados;

N tamanho da população;

n tamanho da amostra.

Exemplo 1

Considere-se o preço de algumas t-shirts numa determinada loja.

Modelo	Preço (€)
1. Simplex	3
2. Madonna	8,5
3. Julio Iglesias	3,75
4. Springsteen	4,6
5. David Bowie	6
6. Maradona	5,5

Quadro 2-Preço das T-shirts

Utilizando a fórmula da média aritmética, o preço médio dos vários modelos de T-shirts vendidas nesta loja é

$$\mu = \frac{3 + 8,5 + 3,75 + 4,6 + 6 + 5,5}{6} = 5,23 \text{€}.$$

É de salientar que este não será o preço médio das t-shirts vendidas na loja se as quantidades vendidas de cada modelo forem diferentes. Neste caso, é necessário ponderar os preços pelas respectivas quantidades vendidas, ou seja, o número de ocorrências (quantidade vendida) de cada valor da variável (preço de cada modelo de t-shirt).

Modelo	Preço do modelo x_i	Quantidade vendida n_i	Preço x Quantidade $x_i \times n_i$
1. Simples	3	15	45
2. Madonna	8,5	5	42,5
3. Julio Iglesias	3,75	10	37,5
4. Springsteen	4,6	8	36,8
5. David Bowie	6	6	36
6. Maradona	5,5	6	33
		$\Sigma = 50$	$\Sigma = 230,8$

Agora, a fórmula a utilizar será:

$$\mu = \frac{\sum x_i n_i}{N} = \sum x_i f_i \quad \text{Média da população (dados agregados)}$$

sendo $f_i = \frac{n_i}{N}$ a frequência relativa de cada valor da variável.

Podemos também definir o conceito de média aritmética para uma amostra de indivíduos cujos os dados nos são apresentados de modo agregado:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \sum x_i f_i \quad \text{Média de uma mostra (dados agregados)}$$

No caso de variáveis contínuas, para efectuar o cálculo da média aritmética, é necessário considerar as várias classes ou intervalos em que a variável se encontra dividida.

Exemplo 2

Calcule-se o preço médio das vendas de 112 vendidas em Telheiras.

Preço (×100 €)	Centro da classe c_i	Frequências n_i	$c_i \times n_i$
De 13 600 a 14 800	14 200	7	99 400
De 14 800 a 16 000	15 400	15	231 000
De 16 000 a 17 200	16 600	24	398 400
De 17 200 a 18 400	17 800	27	480 600
De 18 400 a 19 600	19 000	17	323 000
De 19 600 a 20 800	20 200	10	202 000
De 20 800 a 22 000	21 400	8	171 200
De 22 000 a 23 200	22 600	4	90 400
		$\sum = 112$	$\sum = 1\,996\,000$

A média calcula-se substituindo os valores da variável pelo centro da classe.

$$\mu = \frac{\sum c_i n_i}{N} = \sum c_i f_i \quad \text{Média da população (dados agregados em classes)}$$

Então, o preço médio das habitações vendidas é

$$\mu = \frac{1\,996\,000}{112} = 17\,821,4 \quad (\times 100 \text{ €}).$$

Nota

Para os atributos qualitativos (variáveis nominais) não faz sentido calcular a média pois os valores da variável não são numéricos e se o forem funcionam como meros índices.

Propriedades da média aritmética

1. A média dos desvios dos valores da variável em relação à média é nula:

$$\sum f_i (x_i - \mu) = 0$$

2. A média do quadrado dos desvios dos valores da variável em relação à média é mínima:

$$\sum f_i (x_i - \mu)^2 \text{ é mínimo}$$

Vantagens da média aritmética

Facilidade de interpretação e cálculo;

Utiliza toda a informação disponível e pode ser calculada com precisão matemática.

Desvantagens da média aritmética

- É influenciada por valores extremos que tomam um peso significativo no cálculo da média;
- Pode não corresponder a um valor concreto da variável.

7.1.2 Média Geométrica

Quando estamos perante fenómenos cujas as variáveis são proporcionais a um valor inicial é mais aconselhável utilizar a média geométrica (M_g) que se define da seguinte maneira:

$$M_g = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \quad \text{Média Geométrica (dados desagregados)}$$

$$M_g = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i^{n_i}} \quad \text{Média Geométrica (dados agregados)}$$

7.1.3 Média Harmónica

Em situações onde a proporcionalidade esteja presente é aconselhável o cálculo da média harmónica. Por exemplo, quando estudamos fenómenos como a velocidade média, o custo médio de bens comprados com uma quantia fixa.

Desta forma, a *média harmónica* é dada por

$$M_h = \frac{1}{\sum_{i=1}^N f_i \frac{1}{x_i}} .$$

7.1.4 Mediana

A mediana é o valor central médio depois de ordenar os dados por ordem crescente ou decrescente de tamanho ou importância. Ou seja, é definida como o valor da variável que ocupa a posição central na sucessão de observações ou na distribuição de frequências, isto é, o número de observações para valores que lhe são inferiores deverá ser igual ao número de observações para valores que lhe são superiores, depois de se colocarem os dados quer por ordem crescente, quer decrescente de valores.

Se N for ímpar, a mediana será o elemento central de ordem $\frac{N+1}{2}$;

Se N for par, a mediana será a média entre os elementos centrais de ordem $\frac{N}{2}$ e $\frac{N+2}{2}$.

Cálculo da mediana no caso de uma variável contínua

No caso de uma variável contínua agrupada em classes, o cálculo da mediana pode ser assim sumariado:

Calcula-se a ordem $\frac{N}{2}$. Como a variável é contínua não é necessário diferenciar entre N par e ímpar;

Pelas frequências acumuladas identifica-se a classe que contém a mediana e que será a classe mediana;

Calcula-se o valor exacto da mediana através da seguinte fórmula

$$Me = li(Me) + \frac{\frac{N}{2} - cum\ n(Me-1)}{n(Me)} a(Me)$$

Mediana
(frequências absolutas)

em que,

$li(Me)$ é o limite inferior da classe mediana; $cum\ n(Me-1)$ são as frequências acumuladas anteriores à classe mediana;

$n(Me)$ é a frequência absoluta da classe mediana;

$a(Me)$ é a amplitude da classe mediana.

Quando trabalhamos com frequências relativas a mediana é dada por

$$Me = li(Me) + \frac{0,5 - cum\ f(Me-1)}{f(Me)} a(Me)$$

Mediana
(frequências relativas)

7.1.4 Moda

A moda é o valor mais frequente da distribuição ou ainda o valor que mais observações apresenta no conjunto dos dados. Tal como a mediana, a moda é também uma medida de posição e torna-se mais fácil de calcular se os dados estiverem ordenados. No caso de variáveis discretas, o cálculo da moda não tem qualquer dificuldades, enquanto que para as variáveis contínuas é necessário definir primeiro a classe modal e depois aplicar a seguinte fórmula:

$$Mo = li(Mo) + \frac{n(Mo+1)}{n(Mo-1) + n(Mo+1)} a(Mo) \quad \text{Moda}$$

(frequências absolutas)

$$Mo = li(Mo) + \frac{f(Mo+1)}{f(Mo-1) + f(Mo+1)} a(Mo) \quad \text{Moda}$$

(frequências relativas)

onde,

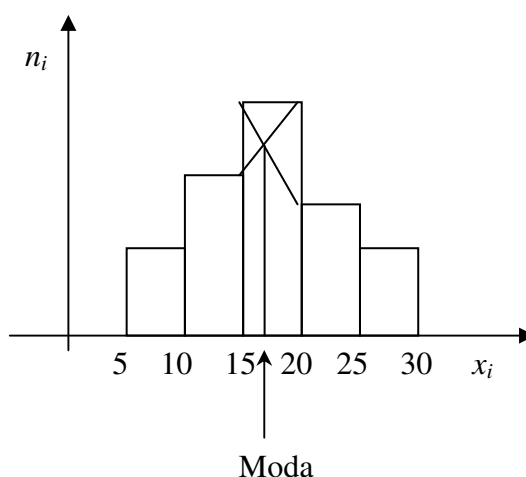
$li(Mo)$ é o limite inferior da classe modal;

$n(Mo-1)$, $f(Mo-1)$ são as frequências absoluta e relativa, respectivamente, da classe anterior à classe modal;

$n(Mo+1)$, $f(Mo+1)$ são as frequências absoluta e relativa, respectivamente, da classe a seguir à classe modal;

$a(Mo)$ é a amplitude da classe modal.

A moda pode ser determinada graficamente após a construção do histograma da distribuição e da identificação da classe modal. Após isto, faz-se a seguinte construção:



Como vantagens a moda é fácil de calcular e interpretar e não é afectada por valores extremos, no entanto, não pode ser definida com rigor e o seu valor exacto é muitas vezes incerto.

Uma distribuição de frequências poderá ter mais do que uma moda e, nesse caso, diz-se bimodal, trimodal, etc.

7.2 Medidas de Tendência Não Central

Existem outras medidas que nos dão a localização dos valores da variável, que em termos gerais são chamadas quantis e podem ser:

- quartis;
- decis;
- percentis.

Os *quartis* são os valores da variável que dividem a distribuição em quatro partes iguais.

Os *decis* são os valores da variável que dividem a distribuição em dez partes iguais e os *percentis* em 100 partes iguais.

8 Medidas de Estatística Descritiva: Medidas de Dispersão

8.1 Medidas de Dispersão

As medidas de localização não são por si só, suficientes para caracterizar de forma adequada a distribuição de frequências de uma variável e, por esta razão devem ser sempre acompanhadas de uma medida que dê uma indicação da dispersão dos valores da variável. As medidas de dispersão servem para verificarmos a representatividade das medidas de localização, pois é comum encontrarmos variáveis que, apesar de terem a mesma média, são compostas de valores bem distintos.

8.1.1 Intervalo de Variação

O intervalo de variação (R) é a medida de dispersão mais simples. É a diferença entre os valores máximo e mínimo da variável

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

A desvantagem que esta medida apresenta é o facto de ter apenas em conta os dois valores extremos que a variável toma e, portanto, não ser sensível aos valores intermédios.

8.1.2 Intervalo Interquartis

É definido como sendo a diferença entre o terceiro e o primeiro quartis e corresponde a um intervalo que engloba 50% das observações centrais.

$$IQ = Q_3 - Q_1$$

Tem como desvantagem o facto de não ser influenciado por metade dos valores observados e que são valores extremos.

8.1.3 Intervalo Absoluto Médio

Quando os dados estão desagregados o *desvio absoluto médio* (DM) é igual à soma das diferenças, em valor absoluto, entre os valores observados da variável e a sua média, divididas pelo número total de observações:

$$DM = \frac{\sum |x_i - \mu|}{N}$$

Para dados já agregados, o desvio absoluto médio é a média aritmética dos desvios absolutos dos valores da variável relativamente à sua média:

$$DM = \sum f_i |x_i - \mu|$$

Quanto maior for a concentração dos dados ao redor da média, menor é o desvio médio. O principal inconveniente desta medida é a utilização de módulos no seu cálculo. Dado que a sua utilização e tratamento não são fáceis, utiliza-se pouco.

8.1.4 Variância e Desvio Padrão

Para dados desagregados, a *variância* é a soma do quadrado das diferenças entre os valores da variável e a média, dividida pelo número total de observações:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

Para dados agregados, a variância é a média aritmética do quadrado dos desvios dos valores da variável relativamente à sua média:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i (x_i - \mu)^2}{N} = \sum f_i (x_i - \mu)^2$$

A grande vantagem da variância relativamente ao desvio médio é a facilidade de cálculo algébrico. O principal inconveniente é que vem expressa em quadrados. Se por exemplo, os dados forem expressos em metros a variância é expressa em metros quadrados.

Por essa razão, é mais utilizado como medida de dispersão, o *desvio padrão* (σ) que se define como sendo a raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Esta é a medida de dispersão mais utilizada e mais importante.

8.1.5 Coeficiente de Variação

O *coeficiente de variação* (C_v) é uma medida relativa da dispersão, útil para a compreensão em termos relativos do grau de concentração em torno das médias, de distribuição de frequências distintas. É dado pela relação, em termos percentuais, entre o desvio padrão e a média de distribuição.

$$C_v = \left(\frac{\sigma}{\mu} \right) \cdot 100$$

Em termos práticos, é usual considerar-se que um coeficiente da variação superior a 50% indica alto grau de dispersão relativa e, conseqüentemente, uma pequena representatividade da média como medida estatística. Para valores do coeficiente de variação inferiores a 50%, a média será tanto mais representativa quanto menor o valor desse coeficiente.

9 Medidas de Estatística Descritiva: Medidas de Assimetria e Curtose

9.1 Medidas de Assimetria

O método mais simples para se medir o grau de assimetria de uma distribuição consiste na comparação de três medidas de tendência central: a média, a mediana e a moda.

Numa *distribuição simétrica* verifica-se que a média, a mediana e a moda são iguais. Quando a média $\geq$ mediana $\geq$ moda a distribuição é *assimétrica positiva* ou *enviesada à esquerda*. No caso inverso, média $\leq$ mediana $\leq$ moda, a distribuição é *assimétrica negativa* ou *enviesada à direita*.



Fig.1 $\bar{x} = M_e = M_o$

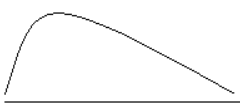


Fig.2 $M_o \leq M_e \leq \bar{x}$

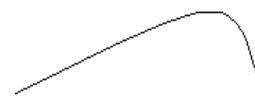


Fig.3 $M_o \geq M_e \geq \bar{x}$

O grau de assimetria pode ser medido da seguinte maneira:

$G = \frac{3(\text{média} - \text{mediana})}{\text{desvio padrão}}$, a divisão pelo desvio padrão permite-nos obter um resultado que

não é influenciado pela dispersão dos dados, mas apenas pelo grau de assimetria.

$$G = \frac{3(\mu - M_e)}{\sigma} \quad \text{Grau de Assimetria (para uma população)}$$

$$G = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{s} \quad \text{Grau de Assimetria (para uma amostra)}$$

Existem ainda outros indicadores quantitativos que nos permitem estimar, com maior precisão, o grau de assimetria de uma distribuição. Um deles é o *coeficiente de Pearson* que mede o grau de assimetria através da comparação da média e da moda:

$$G_1 = \frac{\mu - Mo}{\sigma}$$

Se $G_1 = 0$ a distribuição é simétrica,

Se $G_1 > 0$ a distribuição é assimétrica positiva, e

Se $G_1 < 0$ a distribuição é assimétrica negativa.

Pearson definiu um segundo coeficiente que nos permite calcular o grau de assimetria de uma distribuição quando não dispomos da média e do desvio padrão, utilizando apenas os quartis da distribuição.

$$G_2 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1}.$$

9.2 Medidas de Achatamento ou Curtose

Entende-se por curtose o grau de achatamento de uma distribuição. As medidas de achatamento dão-nos, assim, uma indicação da intensidade das frequências na vizinhança dos valores centrais. Como referência ao grau de achatamento podemos ter:

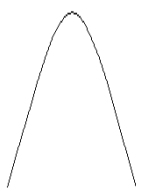


Fig.4 Distribuição Leptocúrtica

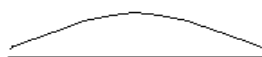


Fig.5 Distribuição Platicúrtica



Fig.6 Distribuição Mesocúrtica

Para medir o grau de achatamento pode ser utilizada a seguinte medida:

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

sendo

Q_1 e Q_3 , respectivamente, o primeiro e terceiro quartis;

P_{90} e P_{10} , o 90º e 10º percentis, respectivamente;

Se $K = 0,263$ a distribuição de frequências é mesocúrtica;

Se $K > 0,263$ a distribuição diz-se platicúrtica;

Se $K < 0,263$ a distribuição diz-se leptocúrtica.

Exercícios I – Estatística Descritiva

1. Uma urna contém bolas de várias cores. Suponha que fizeram 40 tiragens de 6 bolas cada e que, em cada tiragem se anotou o n.º de bolas azuis. O resultado das observações foi o seguinte

3	1	3	5	0	1	2	6	6	6
2	4	0	3	0	4	1	2	2	6
0	5	2	5	1	5	2	4	1	4
1	5	6	2	3	5	0	3	4	1

- a) Defina a variável estatística em estudo.
- b) Obtenha:
- b1) a função de frequências relativas da amostra e o respectivo diagrama diferencial.
- b2) a função de frequências relativas acumuladas e o respectivo diagrama integral.
- c) Indique a percentagem de tirar:
- c1) no máximo uma bola azul.
- c2) quanto muito, 2 bolas azuis.

2. Complete o seguinte quadro estatístico:

x_i	n_i	f_i	cum n_i	cum f_i
0	8			
1		0,15		
2			20	
3				0,9
4	4			

3. Foi feito um inquérito a um grupo de compradores de 40 carros novos para determinar quantas reparações ou substituições de peças foram feitas durante o primeiro ano de utilização dos carros. Obtiveram-se os seguintes resultados:

1	4	1	2	2	3	3	2
1	2	3	2	3	1	0	1
2	7	4	3	5	1	2	4
2	1	3	1	0	1	2	1
1	3	1	0	4	2	3	5

- Construa um quadro de distribuição de frequências absolutas.
- Calcule as frequências relativas.
- Construa um diagrama integral e outro diferencial.

4. Considere a seguinte distribuição de frequências:

x_i	n_i
2	30
3	30
4	20
5	18
>5	2
Total	100

- Construa um quadro de distribuição de frequências acumuladas absolutas e relativas.
- Elabore um diagrama diferencial e um diagrama integral.

5. Numa sondagem a 40 pessoas, sobre quantos anos achavam que eram necessários para que a população mundial duplicasse, se aumentasse na mesma proporção registaram-se os seguintes dados:

5	50	30	15	40	75	100	65	10	10
20	20	65	30	25	5	15	20	50	45
100	70	80	25	20	40	35	10	80	70
90	20	30	35	30	50	40	100	80	100

Desenhe um histograma agrupando os dados nas classes: 1 a 20, 21 a 40, 41 a 60, etc.

6. Numa fábrica fez-se um teste a 150 lâmpadas e registou-se a seguinte informação:

Nº de lâmpadas	5	10	42	75	18
Duração da vida (horas)	[0, 300 [	[300, 600 [	[600, 900 [	[900, 1200 [	[1200, 1500[

- Utilize um histograma e um polígono de frequências para representar esta informação.
- Construa uma tabela de frequências acumuladas.

c) Qual a percentagem de lâmpadas com duração de vida inferior a 900 horas?

7. O tempo gasto, em segundos, em 100 chamadas telefónicas está indicado na tabela seguinte:

Tempo (segundos)	Nº de chamadas
[0, 20[	1
[20, 40[	2
[40, 60[	3
[60, 80[	6
[80, 100[	11
[100, 120[	27
[120, 140[	23
[140, 160[	17
[160, 180[	10

- Desenhe o polígono de frequências correspondente à distribuição dada.
- Construa a tabela de frequências relativas e frequências absolutas acumuladas.
- Qual o número de chamadas de duração inferior a 1 minuto?
- Qual a percentagem de chamadas de duração superior ou igual a 100s?

8. Calcule a média aritmética, a mediana e a moda para cada um dos seguintes conjuntos de dados:

- 20, 22, 20, 18, 25, 23, 27, 24, 24, 28, 20;
- 20, 22, 20, 18, 25, 23, 27, 24, 24, 200, 20;
- 5, 4, 5, 7, 2, 1, 8, 4, 9, 5, 4, 1, 1, 4, 5, 1;
- 113, 105, 108, 107, 110, 105, 113, 109.
- Que conclusões retira da comparação dos resultados de a) e b)?

9. Perguntou-se a vinte e nove rapazes de 12 anos qual era a sua semanada. Obtiveram-se as seguintes respostas:

0	0	0	50	50	50	100	100	100	100
100	100	150	150	200	200	200	200	200	200
200	200	250	250	500	500	750	1000	2000	

- Calcule a média, a moda e a mediana.
- O João, elemento desse grupo, foi pedir um aumento ao pai, baseado nos cálculos anteriores. Qual foi, em sua opinião, a medida em que o João baseou a sua argumentação?

10. Numa Associação Desportiva, a altura média dos seus 200 atletas é de 1,65 m. As atletas femininas são 110 e têm uma altura média igual a 1,60 m. Determine a altura média dos homens.

11. A tabela seguinte indica a distância em Km, percorrida em 6 anos, por 100 carros.

Distâncias (em milhares de Km)	Frequências acumuladas absolutas
menos de 110	1
[110, 115 [	2
[115, 120 [	8
[120, 125 [	25
[125, 130 [	47
[130, 135 [	79
[135, 140 [	94
[140, 145 [	97
mais de 145	100

Considere para as classes extremas a mesma amplitude das outras classes.

- Quantos carros percorreram menos de 130 Km?
- Quantos carros percorreram 135 Km ou mais, mas menos de 140 Km?
- Construa o histograma das frequências absolutas e localize, geometricamente, a moda.
- Determine a distância média percorrida pelos 100 carros.

12. Um professor de Matemática perguntou aos alunos das suas 4 turmas quanto dinheiro tinham trazido nesse dia. Registou os dados como se indica na tabela:

Classes	Frequências Acumuladas
[0, 5[	6
[5, 10[	38
[10, 15[	82
[15, 20[	108
[20, 25[	118

- Quantos alunos tem o professor?
- Quantos alunos trouxeram 10 euros ou menos?
- Quantos alunos trouxeram mais de 15 mas menos de 20 euros?
- Desenhe o polígono de frequências acumuladas.
- Calcule a média e a classe modal.

13. É a seguinte a distribuição de frequências do rendimento mensal per capita das 22 007 famílias de um concelho nortenho:

Rendimento ($\times 10\text{€}$)	Nº de famílias
[15, 20[	635
[20, 25[	1 470
[25, 30[	1 410
[30, 35[	1 670
[35, 40[	1 670
[40, 45[	1 530
[45, 50[	1 490
[50, 55[	1 280
[55, 60[	1 170
[60, 65[	2 110
[65, 70[	1 760
[70, 75[	2 560
[75, 80[	1 400
[80, 85[	956
[85, 90[	616
≥ 90	280
Total	22 007

- Qual o rendimento médio mensal das famílias deste concelho?
- Qual a mediana e a moda do rendimento familiar?
- Que conclusões retiraria quanto ao grau de assimetria da distribuição do rendimento, a partir das medidas anteriormente calculadas?
- Quais os valores do primeiro e terceiro quartis da distribuição do rendimento?
- E qual o valor do nono decil?

14. Para a análise da estrutura salarial da indústria têxtil em Portugal, inquiriram-se 500 indivíduos sobre a remuneração mensal que auferem, tendo-se obtido informação, que depois de classificada, deu origem ao seguinte quadro:

Classes Salariais ($\times 10^6$ €)	Número de Trabalhadores
15 - 20	80
20 - 25	150
25 - 30	230
30 - 35	30
35 - 40	10

- Construa um histograma e um polígono de frequências.
- Calcule as medidas de tendência central.
- Calcule o desvio padrão e a variância.

15. Foi feita uma experiência para medir o tempo gasto na execução da determinada tarefa num circuito de construção, por operários de ambos os sexos. Os resultados foram os seguintes:

Tempo (minutos)	Número de Operários	Número de Operárias
menos de 10	1	2
10 - 15	2	1
15 - 20	3	5
20 - 25	19	16
25 - 30	60	30
30 - 35	40	10
35 ou mais	5	2

Pressuponha que os limites de tempo mínimo e máximo são, respectivamente 5 e 40 minutos.

Calcule as seguintes medidas estatísticas

- Média aritmética
- Mediana
- Desvio-padrão
- Coeficiente de Variação
- Coeficiente de Assimetria

para os seguintes grupos:

- Grupo de Operários
- Grupo de Operárias
- Grupo de todos os trabalhadores

16. O gerente de um supermercado decidiu registar as chegadas de clientes ocorridas numa terça-feira entre as 14 h. e as 16 h.

Para tal procedeu ao registo das chegadas em cada 100 períodos de um minuto, seleccionados aleatoriamente, obtendo o quadro seguinte:

x_i	n_i
0	1
1	8
2	19
3	23
4	17
5	15
6	8
7	3
8	3
9	2
10	1
Total	100

Calcule as medidas de tendência central e analise a distribuição quanto à simetria.

17. O departamento comercial de uma Empresa Importadora de vinhos que tem duas lojas, A e B, abertas ao público, resolveu estudar o número de unidades vendidas diariamente, durante seis semanas consecutivas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Nº de unidades vendidas	Loja A	Loja B
0 - 10	10	6
10 - 20	15	18
20 - 30	3	4
30 - 50	2	1
50 - 70	0	1

- Em qual das lojas é mais elevado o nível médio de vendas diárias?
- Utilizando as medidas de tendência central, compare as vendas das duas lojas quanto à simetria.

Como interpreta estes resultados em termos das vendas das duas lojas.

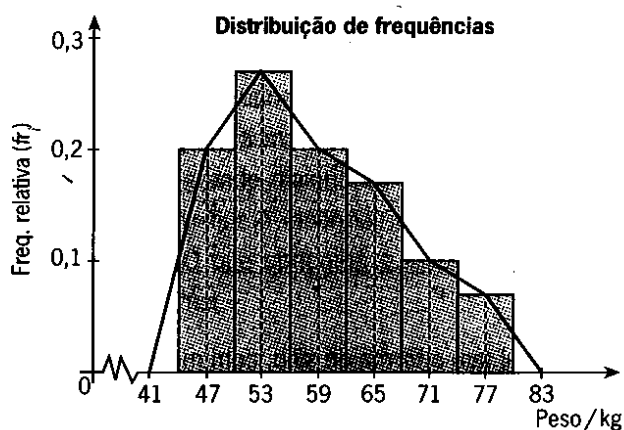
10 Distribuição Normal

10.1 Curva Normal. Propriedades

Considere-se a distribuição dos pesos dos 30 alunos de uma turma de uma determinada escola secundária.

Classes (peso em Kg)	n_i	f_i
[44,50[	6	0,20
[50,56[	8	0,27
[56,62[	6	0,20
[62,68[	5	0,17
[68,74[	3	0,10
[74,80[	2	0,06
Totais	30	1

Com os dados da tabela, construímos o polígono de frequências da distribuição.



Escolheram-se, em seguida, ao acaso, 1990 alunos da mesma escola e depois de observados os seus pesos construiu-se a tabela seguinte:

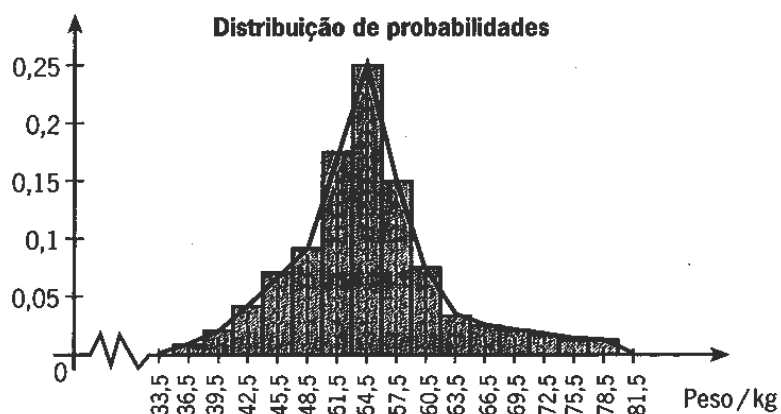
Classes (peso em Kg)	n_i	$f_i \approx \text{probabilidade}$
[35,38[	12	0,006
[38,41[	34	0,017
[41,44[	88	0,044
[44,47[	146	0,073
[47,50[	186	0,094
[50,53[	360	0,181
[53,56[	500	0,251
[56,59[	300	0,151
[59,62[	150	0,076
[62,65[	74	0,037
[65,68[	50	0,025
[68,71[	42	0,021
[71,74[	24	0,012
[74,77[	12	0,006
[77,80[	12	0,006
Totais	1990	1

Nota: A frequência relativa é um valor aproximado da probabilidade.

Assim, encontrado um aluno da escola ao acaso, pode-se afirmar que:

- A probabilidade de que tenha um peso entre [53,56[é de 25,1%
- A probabilidade de que tenha um peso entre [59,62[é de 7,6%.

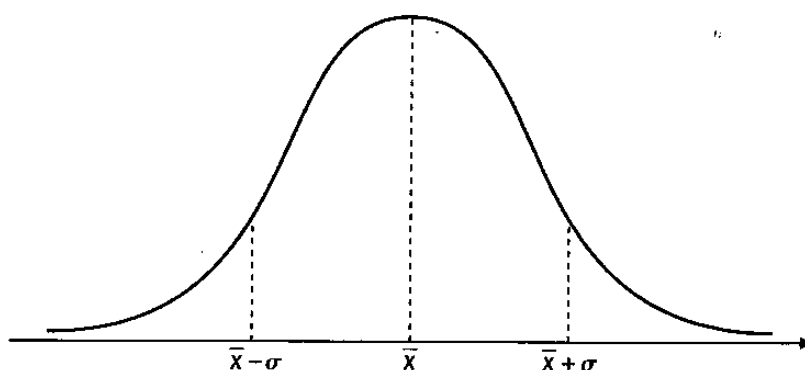
Com os dados da tabela construímos um polígono de frequências.



Observando os dois polígonos de frequências verifica-se que quando aumenta o número de alunos observados e se diminui a amplitude dos intervalos de cada classe, a linha poligonal aproxima-se de uma linha curva.

Se se aumentar o número de estudantes observados, obter-se-ia uma distribuição cada vez mais próxima da **distribuição normal**.

Curva normal

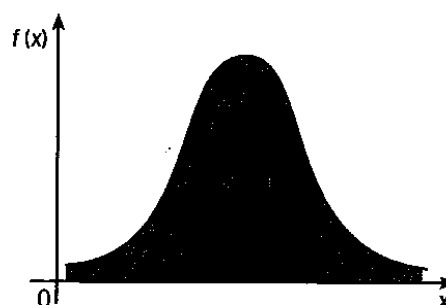


A curva normal tem a forma de sino, com máximo em $\bar{x}$.

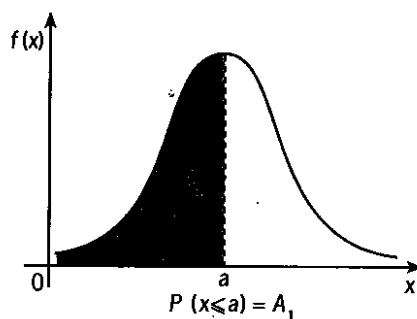
Quando se estuda uma variável aleatória contínua, a linha obtida quando a amplitude de cada um dos intervalos de classe tende para zero chama-se **curva de probabilidades**.

A curva de probabilidades de uma distribuição normal tem a forma da curva normal ou curva de Gauss e tem as seguintes propriedades:

- A probabilidade de que uma observação ao acaso pertença ao intervalo $]\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma[$ é de aproximadamente 68,3%.
- A probabilidade de que uma observação pertença ao intervalo $]\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma[$ é de aproximadamente 95,5%.
- A área sob a curva é 1.



- A probabilidade de obter um valor da variável inferior ou igual a um valor fixo a é dada pela área abaixo da curva de probabilidades e à esquerda desse valor.



A curva normal representa uma família de distribuições em que cada membro específico dessa família é representado por determinados valores dos parâmetros média e desvio padrão. Ou seja, qualquer distribuição normal é definida por duas medidas: a média μ que localiza o centro da distribuição e o desvio-padrão σ que mede a variabilidade da variável em estudo, X , em torno da sua média.

A simetria do gráfico é frequente em muitas situações da vida real, de tal modo que os matemáticos criaram um modelo a que chamaram distribuição normal.

A distribuição normal é também conhecida pelos nomes de distribuição de Gauss e distribuição de Laplace, pois tanto o alemão Gauss (1777-1855) como o francês Laplace (1749-1827) chegaram a esta distribuição ao estudarem a distribuição dos erros de medidas físicas.

Esta distribuição aparece, por exemplo, em:

Características morfológicas

- Peso
- Altura
- Comprimento dos membros
- Espessura das folhas
- Diâmetro das árvores

Características sociológicas

- Hábito de consumo de produtos (leite, vinho, ...)
- Número de filhos
- Hábitos de férias

Características psicológicas e fisiológicas

- Quociente de inteligência
- Tensão arterial
- Reacção a medicamentos

Curva normal estandardizada (curva Z). Propriedades

Dado que a média e o desvio padrão podem tomar uma infinidade não numerável de valores ($-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$) então existe também uma infinidade não numerável de diferentes distribuições normais.

Daí que, para o cálculo de probabilidades, qualquer distribuição normal é transformada na chamada normal-padrão, ou normal estandardizada.

Esta transformação, que consiste numa mudança de origem (subtracção por μ) e mudança de escala (divisão por σ) é chamada estandardização.

Isto é, se a variável aleatória X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ , então

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ é a chamada normal estandardizada ou reduzida ou ainda normal-padrão, cujos

parâmetros são agora: $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

10.2 Determinação das áreas na curva normal

Sendo a média e o desvio padrão parâmetros que, embora possam ser desconhecidos, são constantes, tem-se que:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \cap N(0,1).$$

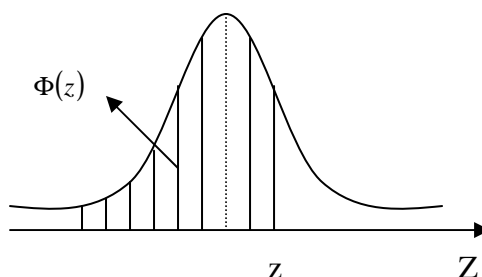
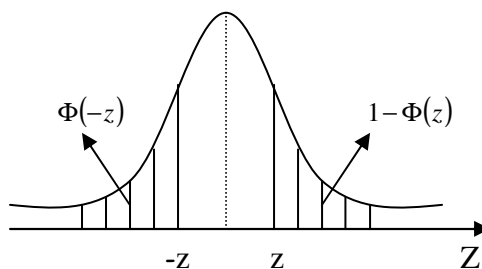
A respectiva função de distribuição, dada pela área abaixo da curva de probabilidades e à esquerda de um valor fixo z da variável, $\Phi(z)$; permite o cálculo da probabilidade acumulada até z . Então:

$$\Phi(z) = P[Z \leq z]$$

A consulta na tabela (página 47) permite concluir, a título de exemplo que:

- a) $P[Z \leq 0] = \Phi(0) = 0,5$
- b) $P[Z \leq 1,15] = \Phi(1,15) = 0,8749$
- c) $P[Z > 0,87] = 1 - P[Z \leq 0,87] = 1 - \Phi(0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922$.

Como $\phi(z)$ é simétrica, tem-se que $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, como se ilustra na figura seguinte:



Exemplo:

O tempo em horas que um grupo de operários leva a executar determinada tarefa tem distribuição normal com média 1000 horas e desvio padrão 200 horas.

Qual a probabilidade de os operários terminarem a tarefa em menos de 1200 horas e mais de 800 horas?

Seja X - tempo (medido em horas) que determinado grupo de operários leva a executar determinada tarefa

$$X \sim N(\mu = 1000; \sigma = 200)$$

$$\begin{aligned} P[800 < X < 1200] &= P\left[\frac{800-1000}{200} < Z < \frac{1200-1000}{200}\right] \\ &= P[-1 < Z < 1] = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 0,8413 - 1 + 0,8413 = 0,6826. \end{aligned}$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

VALORES DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

z	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,891	4,417
F(z)	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995	0,999995
2[1 - F(z)]	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001	0,00001

10.3 Teorema do Limite Central

Genericamente o **Teorema do Limite Central** (TLC) diz que a média de um grande número de variáveis aleatórias independentes tem uma distribuição que se aproxima à Normal.

Teorema

Se X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são v.a.'s independentes identicamente distribuídas (iid) então:

$$Y_i = \sum_{i=1}^n X_i \cap N(n\mu; \sigma\sqrt{n})$$

Teorema

Se X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são v.a.'s independentes com média μ e variância σ^2 , então, quando $n \rightarrow \infty$, a função de distribuição da v.a.,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \text{ tende para uma função de distribuição } N(0, 1)$$

Este teorema garante que a soma de n variáveis aleatórias independentes - todas com a mesma média e a mesma variância finitas - tem, depois de estandardizada e para n suficientemente grande, distribuição aproximada, $N(0, 1)$.

Corolário

Dada a sucessão de variáveis aleatórias iid, $X_1, X_2, \dots, X_n$, com média μ e variância σ^2 , então:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cap_{apr} N(0, 1) \quad \text{onde } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \text{ com } \bar{X} \cap_{apr} N(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

A questão que se coloca em relação ao TLC é saber quando é que n é suficientemente grande para se considerar que a distribuição Normal é de facto uma boa aproximação da distribuição da variável soma ou da média amostral. É comum considerar-se $n \geq 50$ para quando as distribuições originais são muito assimétricas, bastando no entanto $n \geq 10$ para distribuições simétricas.

Exemplo

Considere as variáveis aleatórias iid $X_1, X_2, \dots, X_{40}$, representando o peso real de pacotes de açúcar (em g). Considere ainda que o peso real tem uma distribuição uniforme no intervalo (8,14). Pretende-se determinar a probabilidade do peso médio dos 40 pacotes ser inferior a 10,5g.

Pretende-se saber $P[\bar{X} < 10,5]$. Recorrendo ao corolário do TLC, e sabendo que as v.a. são iid com distribuição uniforme de onde:

$$E[X] = \frac{8+14}{2} = 11 \quad e \quad Var[X] = \frac{(14-8)^2}{12} = 3 \Rightarrow \sigma = 1,73$$

$$P[\bar{X} < 10,5] = P\left[\frac{\bar{X} - 11}{1,73/\sqrt{40}} < \frac{10,5 - 11}{1,73/\sqrt{40}}\right] = \Phi(-1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336$$

Exercícios II – Distribuição Normal

1. A variável aleatória X segue uma distribuição normal de parâmetros $\mu = 20$ e $\sigma = 3$.

Determine as seguintes probabilidades:

- a) $P[X \leq 23]$.
- b) $P[X < 14]$.
- c) $P[X > 21]$.
- d) $P[X > 17]$.
- e) $P[21,5 < X < 25]$.
- f) $P[16,2 < X < 18,8]$.
- g) $P[17 < X < 29,3]$.

2. O tempo (em minutos) que um operário leva a executar certa tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal de $\mu = 72$ min. e $\sigma = 12$ min. . Qual a probabilidade de que:

- a) A tarefa leve mais de 93 minutos a executar?
- b) Não leve mais de 65 minutos a executar?
- c) Leve entre 63 e 78 minutos a executar?
- d) Determine os valores de a e b tais que: $P[X > a] = 0,2525$ e $P[X < b] = 0,0054$.

3. O diâmetro de um cabo eléctrico é normalmente distribuído com parâmetros 0,8 e 0,04.

- a) Qual a probabilidade de que o diâmetro ultrapasse 0,81?
- b) Qual a probabilidade de que o diâmetro ultrapasse 0,85?
- c) Qual a probabilidade de que o diâmetro não ultrapasse 0,85?
- d) Qual a probabilidade de que o diâmetro ultrapasse 0,75?
- e) Qual a probabilidade de que o diâmetro se situe entre 0,78 e 0,83?

4. O tempo (em minutos) que um operário leva a executar certa tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal.

Sabe-se que a probabilidade de o operário levar mais de 13 minutos é de 0,0668 e a de demorar menos de 8 minutos é de 0,1587.

- a) Calcule o tempo médio requerido para efectuar a tarefa, e o respectivo desvio padrão.
- b) Calcule a probabilidade de o operário demorar entre 9 e 12 minutos a executá-la.

5. Sabe-se que as alturas dos 13 400 estudantes de uma universidade têm uma distribuição normal com $\mu = 174\text{cm}$ e $\sigma = 12\text{cm}$. Determine o número de estudantes com altura inferior a 186 cm.

11 Testes de Hipóteses

11.1 Introdução

A inferência estatística além da estimação pontual e intervalar (por regiões) consiste também na realização dos chamados testes de hipóteses.

Em várias áreas das ciências é necessário, muitas vezes, decidir entre opções alternativas. Esta decisão comporta um risco, risco de errar, mas que pode ser controlado e minimizado.

De uma forma geral tem-se o seguinte problema: depois de formulada uma hipótese, para a testarmos teremos de recolher uma mostra, utilizar a informação fornecida por ela e avaliar a hipótese através de procedimentos próprios ou regras para quantificar a consistência dos dados com a hipótese formulada (teste de significância) ou decidir sobre a rejeição ou não da hipótese (teste de hipóteses).

Alguns exemplos:

- Testar se mais de metade da população irá consumir um novo produto a ser lançado no mercado;
- Testar se a nova versão de um "software" é mais eficaz em média que a versão anterior;
- Testar se uma nova técnica de vendas conduz a um aumento do número de produtos vendidos.

11.1.1 Hipóteses Estatísticas

Existem duas hipóteses envolvidas em qualquer estudo deste tipo:

- a hipótese alternativa H_1 , que é, em geral, a hipótese proposta pelo investigador;
- a hipótese nula H_0 , negação da hipótese anterior.

Note-se que, em geral, começa-se por definir a hipótese alternativa H_1 , que é (alguns dos motivos):

- a hipótese que se deseja verificar se é verdadeira com elevada certeza;
- a hipótese que se julga verosímil;
- a hipótese que só deverá ser aceite com evidências muito fortes;

- a hipótese cuja rejeição errada tem consequências menos nefastas.

A hipótese nula H_0 é (alguns dos motivos):

- a hipótese que se julga à partida inverosímil;
- a hipótese que se deverá aceitar se não houver evidências fortes em contrário;
- a hipótese cuja rejeição errada tem consequências mais graves.

Exemplo 1:

Para decidir se o novo processo de fabrico é melhor do que o anterior, o gestor de produção da fábrica formula as seguintes hipóteses:

- H_0 (hipótese nula): não há diferença entre os dois processos de fabrico;
- H_1 (hipótese alternativa): o novo processo de fabrico é melhor do que o anterior.

Exemplo 2:

Suponha que é feita uma auditoria à empresa do Sr. Zé das Tintas, a qual resulta numa acusação de infracção fiscal. Obviamente, se o fiscal das finanças não conseguir juntar provas que sustentem a acusação, a empresa não é considerada culpada. As hipóteses são as seguintes:

- H_0 (hipótese nula): a empresa não cometeu nenhuma infracção fiscal;
- H_1 (hipótese alternativa): a empresa cometeu uma infracção fiscal.

11.1.2 Regra de decisão

Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra casual da população em causa.

A regra de decisão consiste em estabelecer uma região W , no espaço das amostras possíveis de IR^n , tal que:

- se $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W$, rejeita-se H_0
- se $(X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W$ não se rejeita H_0

W designa-se por *região crítica* ou *região de rejeição*, denominando-se o seu complementar por *região de aceitação*.

O aspecto fundamental da teoria do ensaio de hipóteses prende-se com a escolha da região crítica $W \subset IR^n$, que permita controlar a probabilidade de cometer cada um dos tipos de erro. O estabelecimento da região crítica, é feita de acordo com uma regra de decisão baseada numa estatística amostral. A esta estatística chama-se *estatística de teste* e costuma-se representar pela letra T .

Exemplo:

Na situação do anterior exemplo 2, podem ser tomadas duas decisões:

- Rejeitar a hipótese H_0 : a empresa é considerada culpada, isto é, aceita-se a hipótese H_1 como sendo verdadeira;
- Não rejeitar a hipótese H_0 : não se conseguiu provar a veracidade de H_1 e como tal, não se pode rejeitar hipótese H_0 . Note que, isto não significa aceitar H_0 , significa tão só, que não há provas (não há evidência) para rejeitar esta hipótese. Por isso é preferível dizer "não rejeitar H_0 " a dizer "aceitar H_0 ".

11.1.3 Tipos de Erro: Erro Tipo I e Tipo II

Uma vez que os testes de hipótese são uma metodologia de Inferência Estatística, a qual assenta num raciocínio indutivo, pode conduzir a erros.

Exemplo

Relativamente ao exemplo anterior há duas possibilidades de tomar uma decisão errada:

- a empresa é considerada culpada quando de facto não cometeu nenhuma infracção fiscal: **Rejeitar H_0 sendo H_0 verdadeira;**
- não se rejeita a hipótese de a empresa ser inocente, quando de facto esta cometeu uma infracção fiscal: **Não rejeitar H_0 sendo H_0 falsa.**

Definição:

Ao proceder a um teste de hipóteses para testar H_0 podem-se cometer os seguintes tipos de erros:

- **Erro de tipo I ou de 1ª espécie:** rejeitar H_0 sendo H_0 verdadeira (erro de rejeição);
- **Erro de tipo II ou de 2ª espécie:** não rejeitar H_0 sendo H_0 falsa (erro de não rejeição).

Pode-se representar no seguinte esquema a situação anteriormente indicada:

		SITUAÇÃO REAL	
		H_0 verdadeiro	H_0 falso
DECISÃO TOMADA	Rejeitar H_0	Erro de tipo I	Decisão correcta
	Aceitar H_0	Decisão correcta	Erro de tipo II

Probabilidades associadas aos erros:

- $\alpha = P(\text{erro de tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$
é chamado dimensão do teste ou tamanho do teste ou nível de significância;
- $\beta = P(\text{erro de tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira})$
 $1 - \beta = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa})$ é chamada a potência do teste.

11.1.4 Metodologia para aplicar um teste de hipóteses

Uma vez recolhida uma amostra, observamos o valor de alguma estatística (função da amostra aleatória) cuja distribuição de probabilidade é conhecida sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira (estatística de teste já referida anteriormente).

A decisão a tomar será a de rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0 .

O valor de α (nível de significância do teste) e a distribuição de probabilidade da estatística do teste vão ser utilizados para definir a chamada região de crítica ou região de rejeição.

Se o valor observado da estatística do teste "cair" na região crítica, decidimos rejeitar H_0 ; caso contrário decidimos não rejeitar H_0 .

Em resumo, o processo geral consiste no seguinte:

1. Formular a hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1);
2. Especificar um nível de significância;
3. Escolher a estatística a usar e encontrar a sua distribuição de probabilidade sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira;
4. Determinar a região de rejeição;
5. Calcular o valor observado da estatística do teste;
6. Decidir rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0 .

Exemplo

O director comercial de uma cadeia de lojas pretende comparar duas técnicas de vendas, A e B, para o mesmo produto.

Utilizando a técnica de vendas A a quantidade de produto vendido por dia é em média de 816 kg com um desvio padrão de 45 kg. Adoptando a nova técnica de vendas B espera-se aumentar a quantidade de vendas diárias.

Para testar tal hipótese registou-se a quantidade diária de vendas do produto durante 50 dias, obtendo-se um valor médio de 839 kg.

Pode aceitar-se a hipótese ao nível de significância de 0.01?

Seja

X: "quantidade de produto vendida num dia com a técnica de vendas B"

X tem média μ e desvio padrão $\sigma = 45$ kg.

Hipóteses estatísticas:

- $H_0: \mu = 816$ kg
não há alteração na quantidade média diária de vendas;
- $H_1: \mu > 816$ kg
a quantidade média diária de vendas aumenta.

Pelo Teorema Limite Central,

$$\bar{X} \cap_{apr} N\left(\mu, \frac{45}{\sqrt{50}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{45 / \sqrt{50}} \cap_{apr} N(0,1).$$

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $\mu = 816$ kg, logo a estatística de teste é

$$\bar{X} \cap_{apr} N\left(816, \frac{45}{\sqrt{50}}\right) \quad \text{ou} \quad Z = \frac{\bar{X} - 816}{45 / \sqrt{50}} \cap_{apr} N(0,1).$$

► Região crítica

Para que valores da estatística do teste será de rejeitar a hipótese nula?

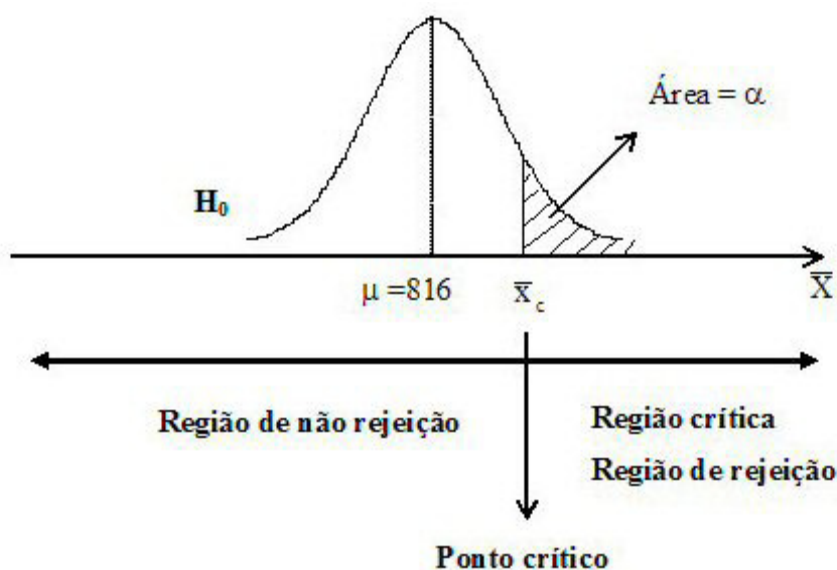
Quanto maior for o valor da média amostral ($\bar{x}$) relativamente a 816, mais credível se torna a hipótese H_1 e consequentemente, mais a decisão se encaminha no sentido de rejeitar H_0 .

Então, fixando um ponto $\bar{x}_c$ superior a 816, a regra de decisão será

rejeitar H_0 se $\bar{x} \geq \bar{x}_c$; caso contrário, não rejeitar H_0 .

Nota: A $\bar{x}_c$ dá-se o nome de ponto crítico.

A região crítica (região de rejeição da hipótese nula) é então $[\bar{x}_c, +\infty[$.



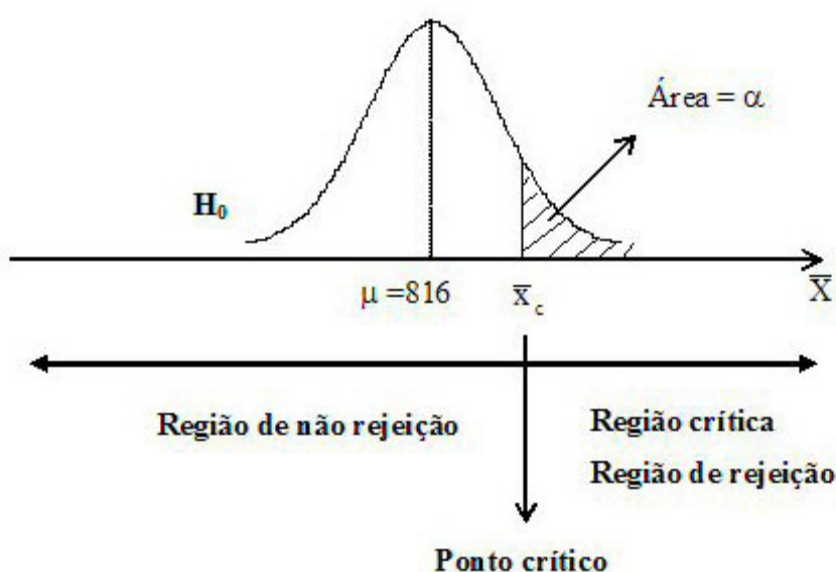
Distribuição da estatística de teste $\bar{X}$ quando H_0 é verdadeira

Sendo a hipótese H_0 verdadeira, a probabilidade a estatística de teste assumir valores na região de rejeição é pequena; estes valores são mais plausíveis se a hipótese H_1 for verdadeira.

Fixámos o nível de significância em 0.01. Isto significa que ao rejeitarmos a hipótese H_0 podemos estar a cometer um erro de tipo I com probabilidade 0.01. Por outras palavras, a probabilidade de rejeitarmos a hipótese $H_0: \mu=816$ quando de facto $\mu=816$, é quantificada em 1%.

Vamos calcular o ponto crítico $\bar{x}_c$ associado a este nível de significância.

$\alpha = 0.01 = P(\text{erro de tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} \geq \bar{x}_c \mid \mu = 816) \rightarrow \text{área sombreada}.$



$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} \geq \bar{x}_c \mid \mu = 816) &= 0.01 \Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X} - 816}{45/\sqrt{50}} \geq \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.01 \\
 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) &= 0.01 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.01 \\
 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) &= 0.99 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}} = 2.326 \Leftrightarrow \bar{x}_c = 830.8
 \end{aligned}$$

Ponto crítico: 830.8

Região crítica: $[830.8, +\infty[$

► Decisão

Como na amostra foi observada uma média amostral $\bar{x} = 839$ kg, que cai dentro da região crítica ($\bar{x} = 839 \geq 830.8$), então a decisão é a de rejeitar a hipótese H_0 .

Concluimos, assim, que há evidência de que a nova técnica de vendas B conduz a um aumento das vendas médias diárias, ao nível de significância de 0.01.

Neste caso, diz-se que a média observada na amostra é significativamente diferente de 816.

Suponha que a média amostral observada nos 50 dias era de 800 kg. Para o mesmo nível de significância qual seria agora a decisão a tomar?

Neste caso a média observada na amostra não cai na região crítica ($\bar{x} < 830.8$), logo a decisão será a de não rejeitar H_0 .

Não podemos concluir que nova técnica de vendas B aumente as vendas médias diárias.

A média observada na amostra não é significativamente diferente de 816. Podemos, então, estar a cometer um erro de tipo II (erro de não rejeição).

Interessa pois examinar $\beta = P(\text{erro de tipo II})$.

► Probabilidade de erro de tipo II

$$\beta = P(\text{erro de tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} < \bar{x}_c \mid \mu > 816)$$

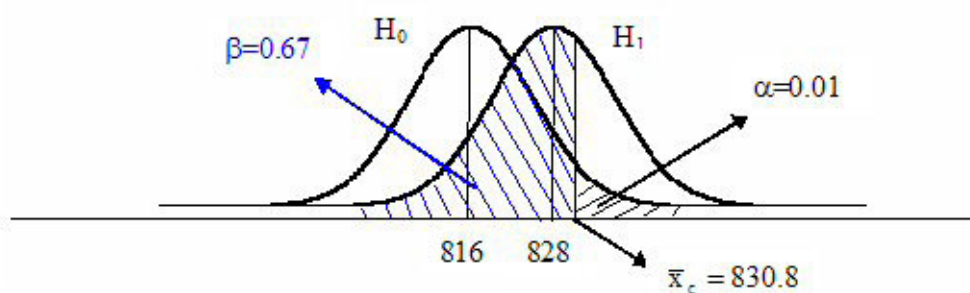
Nota: O valor de β depende do valor da média populacional μ . Para calcular esse valor de há necessidade de especificar um valor particular de μ de acordo com a hipótese alternativa.

Ainda admitindo que a média amostral observada nos 50 dias foi de 800 kg, compare as probabilidades de ocorrência de erro de tipo II, quando especificamos os valores $\mu = 828$ e $\mu = 832$ para a hipótese alternativa.

1º caso:

$$\beta = P(\text{erro de tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = 828) =$$

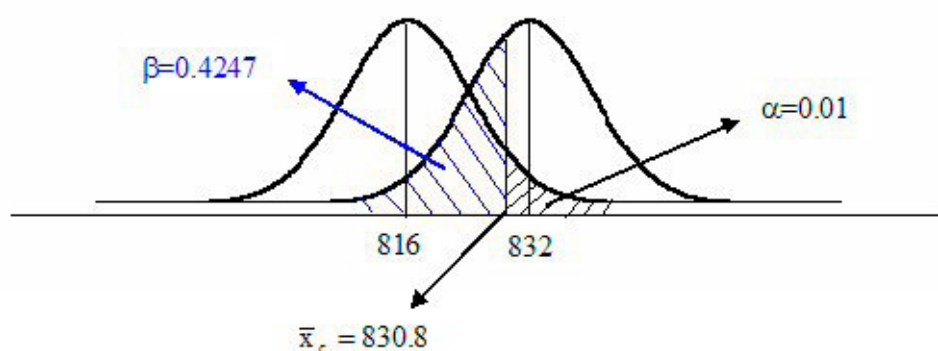
$$= P\left(\frac{\bar{X} - 828}{45/\sqrt{50}} < \frac{830.8 - 828}{45/\sqrt{50}}\right) = P(Z < 0.44) = 0.67$$



2º caso:

$$\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = 832) = P\left(\frac{\bar{X} - 832}{45/\sqrt{50}} < \frac{830.8 - 832}{45/\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P(Z < -0.19) = 0.4247$$



O valor de β diminui há medida que aumenta a diferença entre o valor de μ especificado para a hipótese H_1 e o valor de μ da hipótese H_0 .

A probabilidade de erro de tipo II também depende do tamanho da amostra.

Aumentando a dimensão da amostra de $n = 50$ para $n = 100$, passamos a ter, sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira,

$$\bar{X} \cap_{apr} N\left(816, \frac{45}{\sqrt{100}}\right).$$

É necessário tornar a calcular o ponto crítico e a região crítica.

$$\begin{aligned} \alpha = P(\bar{X} \geq \bar{x}_c \mid \mu = 816) &\Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X} - 816}{45/\sqrt{100}} \geq \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.01 \\ \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.01 &\Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.01 \\ \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.99 &\Leftrightarrow \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}} = 2.326 \Leftrightarrow \bar{x}_c = 826.5 \end{aligned}$$

A região crítica é então: $[826.5, +\infty[$

Supondo que o verdadeiro valor da produtividade média é 828, a probabilidade de se cometer um erro de tipo II é agora:

$$\begin{aligned} \beta &= P(\text{erro de tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} < \bar{x}_c \mid \mu = 828) = \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 828}{45/\sqrt{100}} < \frac{826.5 - 828}{45/\sqrt{100}}\right) = P(Z < -0.33) = 0.37077 \end{aligned}$$

Note que, para $n=50$ encontrámos $\beta = 0.67$ (considerando igualmente $\mu = 828$ na hipótese alternativa).

Ao aumentar o tamanho da amostra, reduzimos a probabilidade de se cometer um erro de tipo II.

► Variação de α e β

Fixando a dimensão da amostra, não é possível reduzir simultaneamente α e β .

Na hipótese alternativa de $\mu = 828$ e para um nível de significância igual a 0.05, calcule o valor de β . Que conclusões pode tirar acerca da variação de α e β ?

Calculemos o ponto crítico para $\alpha = 0.05$.

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\bar{X} \geq \bar{x}_c \mid \mu = 816) \Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X} - 816}{45/\sqrt{50}} \geq \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.05 \\ \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) &= 0.05 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.05 \\ \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) &= 0.95 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}} = 1.645 \Leftrightarrow \bar{x}_c = 826.47\end{aligned}$$

Agora a probabilidade de erro de tipo II para o valor alternativo $\mu = 828$ é:

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} < \bar{x}_c \mid \mu = 828) = P\left(\frac{\bar{X} - 828}{45/\sqrt{50}} < \frac{826.47 - 828}{45/\sqrt{50}}\right) = \\ &= P(Z < -0.24) = 0.4052.\end{aligned}$$

Portanto, ao aumentarmos α de 0.01 para 0.05, mantendo $n=50$, β (a probabilidade de não rejeitar H_0 quando $\mu = 828$), diminui de 0.67 para 0.4052.

Se tentarmos reduzir a probabilidade de ocorrência de um tipo de erro, aumenta-se a probabilidade de ocorrência do outro.

Nota: a única forma de conseguir reduzir simultaneamente os dois tipos de erro é aumentar o tamanho da amostra.

11.1.5 Testes bilaterais e unilaterais

Sem perda de generalidade vamos considerar que o parâmetro em teste é a média de uma população, μ .

As hipóteses podem cair numa das seguintes situações gerais:

Teste unilateral à direita

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Teste unilateral à esquerda

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Teste bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

1º CASO: Teste unilateral à direita

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

1º caso reduz-se a →

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

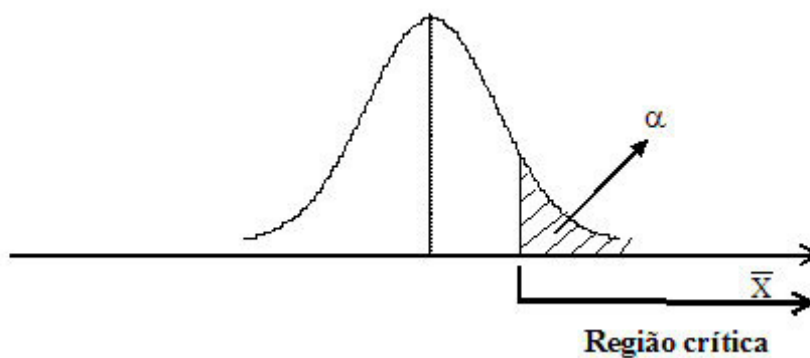
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Os valores da estatística de teste que nos levarão a rejeitar H_0 e concluir que $\mu > \mu_0$, também nos levarão a rejeitar qualquer valor menor do que μ_0 .

1º Caso:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$



2º CASO: Teste unilateral à esquerda

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

2º caso reduz-se a →

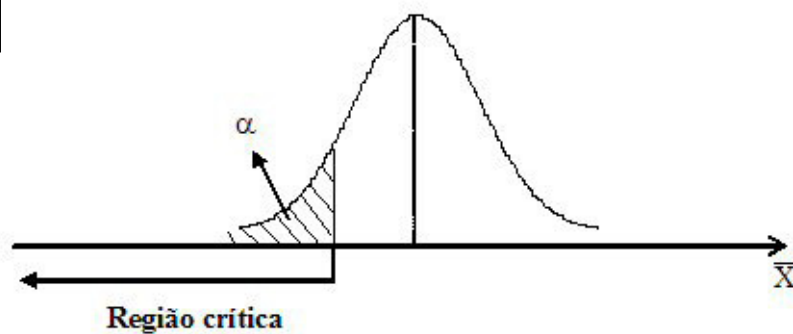
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

2º Caso:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

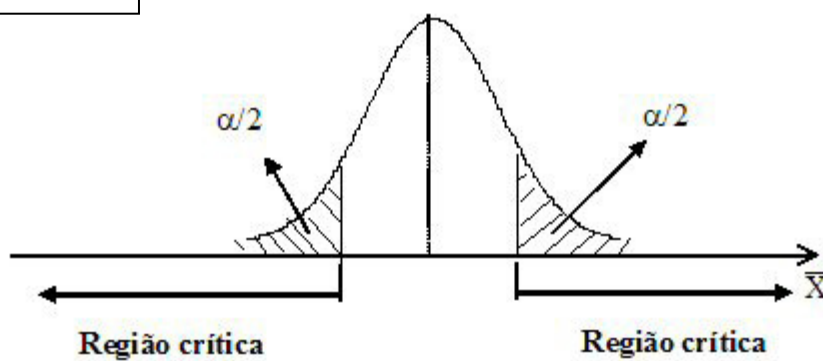


3º CASO: Teste bilateral

3º Caso:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$



11.2 Testes a Populações Normais

Foi apresentada a metodologia sugerida para resolver problemas de testes de hipóteses. Agora serão apresentadas algumas das situações mais habituais. Conforme o tipo de população, o conhecimento da respectiva variância e a dimensão da amostra, assim será utilizada a estatística adequada e a correspondente distribuição amostral.

11.2.1 Testes de Hipóteses para a média

11.2.1.1 A população é normal e a variância do universo é conhecida

Em certas situações, a população é normal (ou aproximadamente normal) e conhece-se a sua variância, σ^2 . O parâmetro de interesse é a média μ da população, em qual foi formulado o ensaio.

A estatística de teste a usar e a respectiva distribuição amostral é:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cap_{apr} N(0,1).$$

Válida para pequenas amostras ($n \leq 30$) ou grandes amostras.

11.2.1.2 A população normal e a variância do universo é desconhecida

Na situação anterior, era conhecida a variância do universo σ^2 , o que permitia calcular o desvio-padrão da distribuição do estimador $\bar{X}$: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Mas, normalmente, σ^2 é desconhecida.

Porém existe a possibilidade de estimar σ através da informação da amostra:

$$\hat{\sigma} = S' = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (\text{pequenas amostras})$$

$$\hat{\sigma} = S' \approx S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (\text{grandes amostras})$$

E, sabendo que $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$, estimar o desvio-padrão da estatística $\bar{X}$.

a) Amostra pequena ($n \leq 30$)

Nesta situação, a estatística a usar ($\bar{X}$) tem a seguinte distribuição amostral:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} \cap t_{n-1}$$

Exemplo

O peso das latas de conserva de determinada marca segue uma distribuição normal, devendo ter, de acordo com as normas, um peso médio de 100 gramas.

O controle interno da qualidade retirou da produção, aleatoriamente, 9 latas e registou os seguintes resultados (x_i - peso da lata i , em gramas):

$$\sum_{i=1}^9 x_i = 820 \text{ gr. e } \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{X})^2 = 87,12 \text{ gr}^2$$

Será possível que esta amostra tenha provido de uma população com média 100? Use um nível de significância de 0,05.

Sabe-se que:

- X - peso de uma lata, em gramas
- $X \cap N(\mu, \sigma)$

Pretende-se ensaiar a hipótese de o peso médio das latas ser de 100 gramas; em alternativa, não existe nenhuma direcção privilegiada de variação de peso.

Será então,

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu \neq 100$$

O teste a usar será:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} \cap t_{n-1}$$

Dado que se desconhece σ e a amostra é pequena ($n=9$).

Sendo o teste bilateral e com um nível de significância de $\alpha = 0,05$, a consulta da tabela da distribuição t_8 fornece a seguinte regra de decisão:

$$RA =] -2,306; 2,306 [$$

$$RC =] -\infty; -2,306] \cup [2,306; +\infty [$$

Para calcular o valor do teste, com a amostra recolhida, é necessário determinar

$$\bar{X} = \frac{820}{9} = 91,111 \text{ e } S' = \sqrt{\frac{87,12}{8}} = 3,3.$$

Virá então,

$$t = \frac{91,111 - 100}{3,3/\sqrt{9}} = -8,081.$$

Como o valor de teste pertence à Região Crítica, a decisão é rejeitar H_0 , isto é, rejeitar a média de 100 gramas para a população que gerou esta amostra. Se esta é de facto

representativa, então a empresa produtora das latas de conserva deve proceder a uma correcção, já que as latas estão apesar menos do que é devido.

b) Amostra grande ($n > 30$)

Se a população é normal, a variância é desconhecida, mas a amostra é grande, então pode ser usada a distribuição amostral limite da t-Student utilizada na situação anterior.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \cap_{apr} N(0,1)$$

O estimador para o desvio padrão de $\bar{X}$, com amostra grande, é $S/\sqrt{n} \approx S'/\sqrt{n}$.

Exemplo

Considere o exemplo anterior, mas com a particularidade de que recolheu uma amostra de 36 latas, tendo obtido os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{36} x_i = 3420 \text{gr. e } \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{X})^2 = 649 \text{ gr}^2$$

A sua decisão sofre alterações?

Trata-se então de ensaiar, para a média (μ) da distribuição do peso das latas produzidas por aquela fábrica, que se sabe

$$X \cap N(\mu, \sigma)$$

As seguintes hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 100 \\ H_1 : \mu &\neq 100 \end{aligned}$$

Nas condições de uma grande amostra (com população normal e σ desconhecido), o teste a usar será

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \underset{\text{aprox}}{\sim} N(0,1)$$

Sendo o teste bilateral e com $\alpha = 0,05$, a consulta da tabela da normal padrão permite-nos definir a regra de decisão:

RA =] -1,96; 1,96 [

RC =] - ∞ ; -1,96] $\cup$ [1,96; + ∞ [

A amostra fornece a seguinte informação

$$\bar{X} = \frac{3420}{36} = 95 \text{ e } S = \sqrt{\frac{649}{36}} = 4,246.$$

Virá então,

$$t = \frac{95 - 100}{4,246/\sqrt{36}} = -7,065,$$

Valor que pertence à Região Crítica, pelo que a conclusão a retirar se mantém: rejeita-se que as latas estejam a ser produzidas com peso médio de 100 gr., para aquele nível de significância.

11.2.1.3 A população é desconhecida

Quando se desconhece a distribuição da população, conhecido ou não o seu desvio-padrão, só com uma amostra grande é possível construir um teste com distribuição amostral conhecida. De facto, o recurso ao Teorema do Limite Central permite deduzir a distribuição amostral do estimador a usar

$$T = \frac{X - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \cap_{apr} N(0,1) \text{ com } \sigma \text{ conhecido}$$

$$T = \frac{X - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \cap_{apr} N(0,1) \text{ com } \sigma \text{ desconhecido}$$

Exemplo

A exploração de uma nascente de água minero-medicinal tem revelado uma quebra acentuada no débito por minuto da referida nascente. É proposto um novo método cuja implementação obrigará a um avultado investimento, mas que garantirá os desejados 800 litros por minuto, no mínimo.

O concessionário actual, de acordo com os proponentes do novo método recolhe informações junto de uma outra exploração, em tudo análoga à sua, e onde o novo método já está em funcionamento. Em 100 períodos de um minuto, aleatoriamente determinados, verificou-se um débito médio de 796 litros, apresentando os valores registados um desvio-padrão de 20 litros.

Qual a decisão que aconselharia o concessionário a tomar, com um nível de significância de 0,05?

A variável em questão que se pode designar por *X* - *débito por minuto da nascente, em litros*, não tem distribuição conhecida e também não se conhece o seu desvio padrão.

Quer-se, porém, efectuar o ensaio para a respectiva média μ ; de acordo com a apresentação da questão será:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &\geq 800 \\ H_1 : \mu &< 800 \end{aligned}$$

Nas condições em causa, só a recolha de uma grande amostra possibilita que se encontre uma solução: o teste a usar será

$$T = \frac{X - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \cap_{apr} N(0,1)$$

Sendo o ensaio unilateral esquerdo e com $\alpha=0,05$, consultando a tabela da normal padrão, teremos

$$RA=] -1,645; +\infty [$$

$$RC=] -\infty; -1,645]$$

A partir da amostra, obtém-se $\bar{X} = 796$ e $S = 20$ pelo que o valor do teste virá

$$t = \frac{796 - 800}{20/\sqrt{100}} = -2,0$$

Valor pertencente à Região Crítica.

A decisão a tomar - rejeitar H_0 - significa, então, que se aconselharia o concessionário a não investir no novo método, com base na observação que realizou.

11.2.2. Testes de Hipóteses para a proporção

Quando a população tem distribuição de Bernoulli, a inferência acerca do seu parâmetro p (probabilidade de ocorreu um sucesso numa prova de Bernoulli) pode ser realizada através de um teste de hipóteses. A amostra adequada fornece informação acerca da população nela observada e deseja-se compará-la com a verdadeira proporção da população.

Para grandes amostras ($n > 30$), a distribuição amostral de $\bar{X}$, estimador de p , será:

$$T = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \cap_{apr} N(0,1)$$

Definição

Considere-se uma experiência aleatória que tem apenas dois resultados possíveis: A que se designa por sucesso e $\bar{A}$ designado por insucesso.

O sucesso ocorre com probabilidade p e o insucesso com probabilidade $q = 1 - p$.

Ou seja:

$$\Omega = \{A, \bar{A}\}$$

A - Sucesso

$\bar{A}$ - Insucesso

$$P(A) = p$$

$$P(\bar{A}) = q = 1 - p$$

Uma experiência aleatória com as características anteriores chama-se prova de Bernoulli.

Exemplo

Suponha que, com o objectivo de medir a audiência de determinado programa de televisão, se pergunta a um potencial telespectador se viu ou não aquele programa.

Trata-se de uma prova de Bernoulli se:

Se admitir que só há dois resultados possíveis, isto é, que o telespectador só pode responder "sim" ou "não", tem-se que $\Omega = \{\text{sim}, \text{não}\}$.

Se conhecer a probabilidade com que o telespectador iria dizer "sim" ou "não".

Exemplo

Uma empresa de lavagem a seco manteve 28% do mercado nos últimos três anos. Este ano, uma amostra de 49 cidades revelou que esta empresa só detinha uma percentagem de 25,4% nas vendas do sector. Será que este resultado é significativamente mais baixo que o anterior, para um nível de significância de 0,01?

A característica em estudo - um utilizador, escolhido ao acaso, recorrer aos serviços da empresa de lavagem a seco - tem distribuição de bernoulli, de parâmetro p a estimar:

As hipóteses em causa são:

$$H_0 : p = 0,28$$

$$H_1 : p < 0,28$$

Sendo o teste unilateral esquerdo, e dado , o ponto crítico é $z_{0,01} = -2,326$.

Então,

$$RA =] -2,326; +\infty [$$

$$RC =] -\infty; -2,326]$$

O valor do teste para a hipótese nula será

$$t = \frac{0,254 - 0,28}{\sqrt{\frac{0,28(1-0,28)}{49}}} = -0,405$$

Valor que, pertencendo à região de Aceitação, permite não rejeitar H_0 e, como tal, afirmar que o resultado obtido não é significativamente mais baixo que o *share* anterior.

11.2.3. Testes de Hipóteses para a variância

Um outro parâmetro que pode interessar estimar numa população normal é a variância, σ^2 .

Neste caso, o teste vai ser realizado através da estatística

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \cap \chi_{n-1}^2.$$

Exemplo

Uma máquina está construída de forma a assegurar que a medida-padrão das peças que produz tenha uma média igual a 4. Mas deseja-se também que a variabilidade dessa medida não ultrapasse uma unidade de medida (controlo pelo desvio padrão).

No último controlo de qualidade, as 16 peças analisadas segundo a medida padrão revelaram uma média de 4, mas uma variabilidade de 1,05 unidades de medida.

Será a diferença de variabilidade significativa? A que nível de significância?

Trata-se de um teste para a variância. Admita-se que a distribuição da medida padrão das é aproximadamente normal.

Representando por X - medida padrão das peças, então:

$$X \sim N(\mu, \sigma).$$

As hipóteses em estudo são:

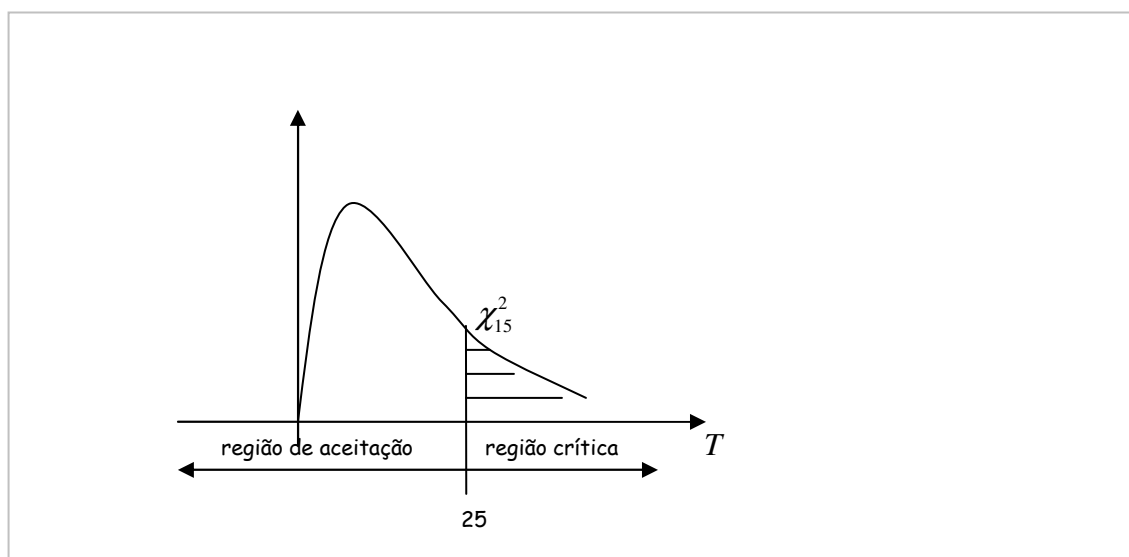
$$H_0: \sigma^2 \leq 1$$

$$H_1: \sigma^2 > 1$$

O teste a usar será:

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Com $n = 16$ e admitindo um $\alpha = 0,05$, virá:



Sendo então

$$RC = [25; +\infty[$$

$RA=[0; 25[$

O valor do teste é

$$t = \frac{(16-1) \cdot (1,05)^2}{1} = 16,5375$$

Que pertence à Região de Aceitação, pelo que não se rejeita H_0 , isto é, não há diferença significativa entre a variabilidade observada na amostra e a desejada pelas normas de qualidade.

Exercícios III – Testes de Hipóteses

1. O número de disparos de flash que determinado tipo de pilhas assegura (500 para as pilhas A_1 e 420 para as A_2) segue uma distribuição aproximadamente normal com $\sigma = 81$.

Suponha que a empresa F, importadora do respectivo material tinha recebido um grande lote de pilhas para distribuição imediata, mas de que desconhecia o tipo (a especificação das pilhas tinha-se perdido...).

Foi decidido testar nove pilhas e classificar o lote em função dos resultados obtidos nessa amostra.

Tendo-se estipulado $\alpha = 0,05$ e as seguintes hipóteses: $H_0 : \mu = 500$ contra $H_1 : \mu = 420$.

- a) Identifique os erros que podem decorrer da decisão a tomar. Calcule as suas probabilidades.
 - b) Se α fosse fixado em 0,01 que valor resultaria para β ?
 - c) Como varia o valor de β se se decidir recolher uma amostra maior?
Calcule β se a dimensão da amostra for $n = 16$.
 - d) Que decisão tomaria ($\alpha = 0,05$) se nas nove pilhas testadas, o número médio de disparos fosse de 436?
2. Um fabricante produz dois tipos de baterias, A e B cuja duração média é de 25 e 30 meses respectivamente. O responsável pelo inventário viu-se confrontado com um lote de 100 baterias cujo tipo se desconhece.
Embora seja sua convicção que o lote é do tipo A, o responsável decidiu proceder a um ensaio com base numa amostra de 4 baterias cuja duração média foi de 26,5 meses.
Supondo que a duração dos dois tipos de baterias segue uma distribuição normal com variância de 9 meses² o que é que se pode concluir a um nível de significância de 1%?
 3. O departamento de controle de qualidade de uma firma produtora de conservas de alimentos especifica que o peso líquido médio por embalagem de certo produto deve ser de 500 gramas.

Experiência passada indica que os pesos são normalmente distribuídos com desvio padrão $\sigma = 15$ gramas.

Se numa amostra de 20 embalagens for encontrado um peso líquido médio de 495 gr., constitui isso prova suficiente de que o verdadeiro peso é inferior ao estabelecido? ($\alpha = 0,05$)

4. Uma estação de rádio quer estimar o tempo médio que uma família dedica, por dia, a ouvir essa rádio.

Foi recolhida uma amostra aleatório de 81 famílias, tendo sido calculados uma média diária de audição de 2,4 horas e um desvio-padrão de 0,7 horas.

Suponha que o grupo empresarial responsável por essa rádio tinha decidido o fecho dessa estação se a média de audiência diária fosse inferior a 2,5 horas.

Para um nível de significância de ,05, diga se o grupo empresarial deve fechar a estação de rádio.

5. Um fabricante de fitas magnéticas para computadores sabe que a resistência à ruptura destas fitas é uma variável aleatória normalmente distribuída com média 300 kg e desvio-padrão 20 kg.

Para ajuizar se uma nova técnica/processo de fabrico produz fitas em média mais fracas do que as do processo antigo, foi usado o seguinte teste estatístico com um nível de significância de 5% e um tamanho de amostra $n = 100$:

$$H_0 : \mu = 300Kg$$

$$H_1 : \mu = 295Kg$$

E em que:

Se $\bar{X} \leq \bar{X}_c$ rejeita-se H_0

Se $\bar{X} > \bar{X}_c$ não se rejeita H_0

- a) Calcule $\bar{X}_c$.
- b) Use este teste, para com base numa amostra de tamanho 100, onde se obteve uma média igual a 290 Kg, tomar a respectiva decisão.

6. Uma empresa farmacêutica está disposta a lançar no mercado um medicamento, se 90% dos pacientes tratados com esse novo medicamento ficarem curados.

Caso verifique que apenas 70% dos pacientes ficam curados, então não lança o novo medicamento. Para tomar uma decisão, a empresa procedeu ao tratamento com o novo tratamento de 50 doentes, tendo-se registado que 45 deles ficaram curados.

- Qual deverá ser a decisão tomada pela farmacêutica? Utilize $\alpha = 0,05$.
- Suponha que a empresa farmacêutica decidiu utilizar a seguinte regra de decisão: se pelo menos 40 dos 50 doentes tratados ficarem curados, então lança o medicamento no mercado; caso contrário não o lança.

Quais as probabilidades de erro associadas àquela regra de decisão?

7. Uma agência de publicidade desenvolveu determinado tema para anúncio, baseado no pressuposto de que 50% dos espectadores que o vissem tinham mais de 30 anos.

A agência está interessada em saber se, naquele grupo etário, houve alteração do índice de audiência.

Para testar essa possibilidade, a agência efectuou uma sondagem sobre 400 espectadores, escolhidos aleatoriamente, dos quais 210 tinham idade superior a 30 anos. O teste foi efectuado ao nível de significância de 5%.

A que conclusão chegou a agência de publicidade? Justifique.

8. Com o intuito de decidir sobre a compra de tempo de antena num programa de TV de grande audiência, certa empresa decidiu recolher uma amostra de 100 pessoas.

- No inquérito efectuado, 75 pessoas declararam ver o programa assiduamente, 10 de vez em quando e os restantes declararam nunca ver.

Suponha que a empresa só comprará o referido tempo de antena se for credível a hipótese de que a percentagem de pessoas que vê assiduamente o programa é de, pelo menos, 80%.

- Qual a decisão a tomar ($\alpha = 0,05$)?
- Com a decisão que tomou, qual o tipo de erro que pode estar a cometer? Qual a sua probabilidade se na realidade 75% das pessoas vêem assiduamente o programa de TV?

b) Com base nas hipóteses formuladas na alínea anterior, determine para que valores do nível de significância esta amostra levará à tomada de decisão contrária.

9. A BUESPEED opera no mercado da União Europeia na área da distribuição de encomendas.

A empresa garante que todas as encomendas chegam ao seu destinatário, em média, em menos de 48 horas com variabilidade máxima de 8 horas.

Para avaliar este desempenho, foram recolhidos os tempos (em horas) relativos a uma amostra de 65 encomendas, tendo obtido os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{65} x_i = 3250; \quad \sum_{i=1}^{65} x_i^2 = 578500$$

O que deve concluir sobre o desempenho da BUESPEED?

(Deve proceder a dois testes distintos: um sobre o tempo médio de entrega com $\alpha = 0,025$ e outro sobre a variabilidade relativa ao tempo de entrega, $\alpha = 0,05$).

Bibliografia

Matemática:

Apostol, T.: Cálculos - Vol.1. Blaidell Publishing Company

Lipschuyz, S.: Álgebra Linear. Colecção Schaum, McGraw-Hill

Giraldes, E., Fernandes,V., Smith, P.: Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica.
McGraw-Hill

Spivak, M.: Cálculos. New York, W.^a Benjamin

Estatística:

Murteira, B.: Análise Exploratória de Dados. McGraw-Hill

Murteira, B.: Probabilidades e Estatística - Vol 1 e 2. Edições Sílabo

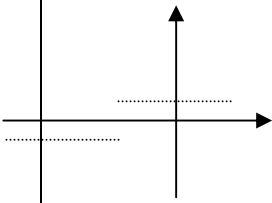
Reis, E., Melo, P., Andrade, R., Calapez,T. : Estatística Aplicada - Vol 1 e 2. Edições Sílabo

Robalo, A.: Estatística - Exercícios - Vol 1 e 2. Edições Sílabo

www.estv.ipv.pt/paginaspessoais/carlahenriq/testes%20formato%20aluno.pdf -

Soluções dos exercícios

Análise Matemática:

1	a) $D=[-3, +\infty[$ $D'=[-3, +\infty[$	b) $D= [-3, +\infty[\setminus \{2\}$	c) $D=]-3, +\infty[$ d) $D'=[-3, +\infty[$	d) $D=]2, 3]$ $D'=[2, 3]$
2	a) não; b)-4 ; c) 8; d) 0;e) $+\infty$; f) 0; g)1; h) $+\infty$; i)0; j)0; k)0; l)não m) $-\infty$ n)0 o)1/2; p)1; q)0; r)1; s)3 ; t)1/3; u) $+\infty$; v)0; w) $+\infty$ x) 4; y)0; z)0; aa)1 bb)1; cc)8; dd)-1; ee)-2;			
3	a) $m=4$	b) $m=1$	c) não	
4	a)não existe		c) não é injectiva nem sobrejectiva	
5	$f(2)= -12$; $f(4)= 9$	b) não é continua em $x=3$	c) Weistrass	
7	$m=-2$			
11	Por exemplo $n= 0$			
15	a) 1; 1	b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$	c) 1, e^2	d) 1; 1/2 e) 0, $-\text{sen } 2$
16	$a=-1$; $b= 7$			

17)

a) $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$	b) $\frac{d(3x^2+4x-8)}{dx} = 6x + 4$
c) $\frac{d((3x^2+4x)(1-x^3))}{dx} = 6x - 15x^4 + 4 - 16x^3$	d) $\frac{d(\frac{x(x+3)}{x^2+1})}{dx} = -\frac{-2x+3x^2-3}{(x^2+1)^2}$
e) $\frac{d((-5x^2+3)^2)}{dx} = 20(5x^2 - 3)x$	f) $\frac{d(\sqrt{x^2+\sqrt{4x}})}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2x^{\frac{3}{2}+1}}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}+2}\right)\right)}\sqrt{x}}$
g) $\frac{d(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}})}{dx} = \frac{1}{3} \frac{2x^2-1}{\sqrt{(x^2+1)}\sqrt[3]{x}x}$	h) $\frac{d(\sqrt[3]{x^2+1})}{dx} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+1}x$
i) $\frac{d((x^2+2x)^{\frac{2}{3}})}{dx} = \frac{4}{3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x(x+2)}}$	j) $\frac{d(x \sin(2x-1))}{dx} = \sin(2x-1) + 2x \cos(2x-1)$
k) $\frac{d(2x(\frac{\sin(x+1)}{\cos(x+1)})^2)}{dx} = \frac{2 \cos(x+1) - 2 \cos^3(x+1) + 4x \sin(x+1)}{\cos^3(x+1)}$	l) $\frac{d(e^x \sin(2x))}{dx} = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x$
m) $\frac{d(\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}})}{dx} = \frac{2(\cos 2x)x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^{\frac{3}{2}}}$	n) $\frac{d(\frac{\sin 2x}{\tan 3x})}{dx} = -4(\cos x \sin x) \frac{16 \cos^6 x - 24 \cos^4 x + 11 \cos^2 x - 3}{-1 + \cos^2 3x}$
o) $\frac{d(2 \sin(\sqrt{2x-1}) \tan x)}{dx} = 2 \frac{\cos \sqrt{2x-1} \sin x \cos x + (\sin \sqrt{2x-1}) \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1} \cos^2 x}$	p) $\frac{d(\cot(\frac{x+3}{1-2x}))}{dx} = -7 \frac{1 + \cot^2 \frac{x+3}{1-2x}}{(2x-1)^2}$
q) $\frac{d(\arcsin 2x)}{dx} =: \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$	r) $\frac{d(-\arctan[\cos(1+x^3)])}{dx} = 3(\sin(1+x^3)) \frac{x^2}{1+\cos^2(1+x^3)}$
s) $\frac{d(\arccos \sqrt{x^2-4})}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-4)}} \frac{x}{\sqrt{(5-x^2)}}$	t) $\frac{d(\sin(\arccos(1+x^2)))}{dx} = -2x \frac{x^2+1}{\sqrt{(x^2(-x^2-2))}}$
v) $\frac{d(e^{x^2-3})}{dx} = 2xe^{x^2-3}$	w) $\frac{d(xe^x)}{dx} = e^x + xe^x$
x) $\frac{d(\ln(2+x^2))}{dx} = 2 \frac{x}{2+x^2}$	y) $\frac{d(\log_2(2+x^2))}{dx} = 2 \frac{x}{(2+x^2) \ln 2}$
z) $\frac{d(\ln(\sin x))}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$	aa) $\frac{d(\ln(2+3x^3)-x)}{dx} = -\frac{-9x^2+2+3x^3}{2+3x^3}$
bb) $\frac{d(\frac{\ln(x^2)}{\cos(e^{\frac{1}{x}})})}{dx} =: \frac{2x \cos(e^{\frac{1}{x}}) - (\ln x^2 \sin(e^{\frac{1}{x}}))e^{\frac{1}{x}}}{(\cos^2(e^{\frac{1}{x}}))x^2}$	cc) $\frac{d(x^{x^2})}{dx} = x^{1+x^2}(2 \ln x + 1)$
dd) $\frac{d((2x-3)^{x^2+1})}{dx} = 2(2x-3)^{x^2} (2x^2 \ln(2x-3) - 3x \ln(2x-3) + 1 + x^2)$	

18)

a) 240	b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$	c) não é dif.	d) não é dif.	e) não é dif.	f) $\frac{4}{135} \sqrt[3]{103^{\frac{2}{3}}}$
g) -1	h) não é dif.	i) não é dif.	j) -2	k) 0	l) não é dif.

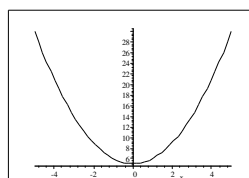
19)

a) 40	b) 5	c) 0	d) $-\frac{\sqrt{2}}{9}$
-------	------	------	--------------------------

20) - $\frac{1}{6}$	21) $\frac{1}{32}$	22) b) $\frac{-1}{\sqrt{6}} + 3; \frac{-2}{\sqrt{6}} + 3\sqrt{6}; \frac{-2}{\sqrt{6}} - 3\sqrt{6}; 2$
------------------------	--------------------	--

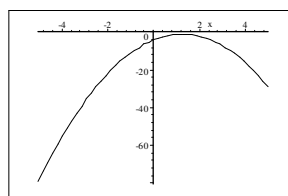
42

$f(x) = x^2 + 5$



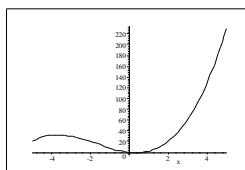
b)

$f(x) = -2x^2 + 5x - 4$



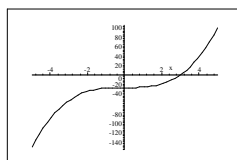
c)

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x$$



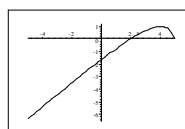
d)

$$f(x) = x^3 - 27$$



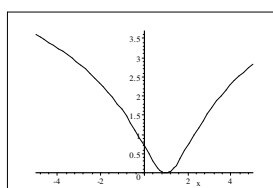
e)

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 6}$$



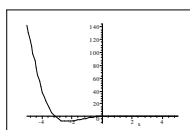
f)

$$f(x) = \log(x^2 - 2x + 2)$$



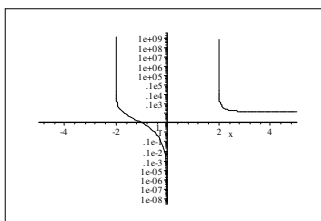
g)

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$$



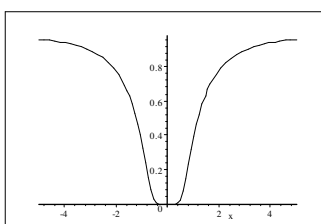
h)

$$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-4}$$



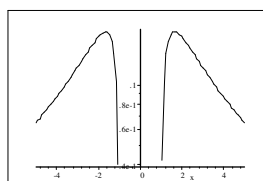
i)

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$



j)

$$f(x) = \frac{\log|x|}{x^2}$$



24) b) c=2

30) f não é diferenciável para $x = 0$, 31) $y = x + e^{-4}$

43)

a) $A = (0, 2); B = (-2, 0)$	b) $(-1, -\frac{1}{2})$	c) $y = x + \frac{3}{2}$
------------------------------	-------------------------	--------------------------

Estatística:

ESTATÍSTICA DESCRITIVA									
1.	c1)	30%	9.	a)	$\mu = 272,4$ Me=200 Mo=200	13.	a)	$\mu = 53,3$	
	c2)	47,5%		10.	1,71 m		b)	Me=54,4 Mo=72,2	
6.	c)	38%	11.	a)	47	14.	c)	Distribuição Assimétrica Negativa	
7.	c)	6		b)	15		b)	$\mu = 24,9$ Me=25,4 Mo=25,8	
	d)	77%		d)	$\mu = 129,85$		d)	$\sigma = 4,5$ $\sigma^2 = 20,24$	
8.	a)	$\mu = 22,82$ Me=23 Mo=20	12.	a)	118	15.	Para Grupo de operários	$\mu = 28,08$ Me=28,33 Mo=28,39 $\sigma = 6,2$ CV=22,08 $G = -0,11$	
	b)	$\mu = 38,45$ Me=23 Mo=20		b)	38			$\mu = 3,79$ Me=3 Mo=3	
	c)	$\mu = 4,125$ Me=4 Mo=1;4;5		c)	26	17.	a)	O nível médio de vendas da loja A é inferior ao da loja B	
	d)	$\mu = 108,75$ Me=108,5 Mo=105;113		e)	$\mu = 126,34 ;$ [101,150[		b)	Distribuição Assimétrica Positiva	

DISTRIBUIÇÃO NORMAL									
1.			1.	f)	0,2426		4.	a)	$\mu = 10$ $\sigma = 2$
				g)	0,8403			b)	0,5328
			2.	a)	0,0401		5.	11273	
				b)	0,281				
				c)	0,4649				
				d)	$a \cong 80,04$ $b = 41,4$				
	a)	0,8413	3.	a)	0,4013				
				b)	0,1056				
				c)	0,8944				
				d)	0,8944				
				e)	0,4649				