

Época Recurso ☐

Época Especial ☒

Duração: 1 h 30 m Tolerância: 0 minutos

☐ Com Consulta

☐ Sem consulta

Docente: Ana Luísa Nunes e Mariana Carvalho

Data: 03 / 09 / 2008

Notas:

- As questões do Grupo I são de escolha múltipla e, para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na sua folha de exame a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se no Grupo I apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- No Grupo II apresente todos os cálculos e justificações convenientes.
- No final da prova deve numerar e indicar o número de folhas de exame que entregar. Deve entregar todas as folhas de rascunho que utilizou e o formulário.

[4V]

GRUPO I

1. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

O domínio de f é

- (A) $]1, +\infty[$ (B) $\mathbb{R}^+$ (C) $\mathbb{R}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. Seja $h(x) = \begin{cases} 2x^2 + k & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$. O valor de k para o qual é possível aplicar o Teorema de

Bolzano à função h , no intervalo $[0, 2]$ é:

- (A) -1 (B) 2 (C) 0 (D) -2

3. Uma função g está definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que $y = 1$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de g .

Qual é o valor de a ?

- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) 1

4. Seja f uma função tal que a sua derivada no ponto de abcissa $x = 2$ é igual a 2. Sabe-se que $f(2) = 4$.

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x^2 - 2x}$?

- (A) 1 (B) 0 (C) $+\infty$ (D) -1

GRUPO II

[9,5V]

1. Considere a seguinte função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & , se \ x \leq 0 \\ \frac{\cos x}{x} & , se \ x > 0 \end{cases}$.
- Determine, justificando, o domínio de f .
 - Estude a função f quanto à continuidade.
 - A função f admite derivada no ponto de abcissa $x = 0$? Justifique.
 - Calcule, usando a definição de derivada num ponto, $f'(0^-)$.
 - Pode garantir a existência de pelo menos um $c \in [-2; 0]$ tal que $f(c) = -\frac{3}{2}$? Justifique.
 - Justifique se f tem máximos e mínimos no intervalo $[0, \pi]$.
 - Determine, se existirem, as assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função.
 - A recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = \frac{\pi}{2}$ é horizontal? Justifique.

[6,5V]

2. Considere as funções $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2 + 4}$.
- Determine, justificando, o domínio da função g .
 - Determine, se existirem, as assíntotas não verticais do gráfico da função.
 - Verifique que $g'(x) = \frac{x^2 + 4 - 2x^2 \ln(2x)}{x(x^2 + 4)^2}$.
 - Pode garantir a existência de pelo menos um ponto $c \in \left] \frac{1}{2}; 2 \right[: g'(c) = 0$? Justifique.

Bom Trabalho!