

TAN com capitalizações trimestrais - 6%

Determine, para as modalidades de desconto por dentro e desconto composto o valor da incógnita p (prazo) que torna os capitais equivalentes. (2 valores)

R: A taxa de juro (também de desconto por fora) mensal a utilizar em qualquer modalidade de desconto (RJS e RJC) é:

$$i_4 = \frac{i(4)}{4} = \frac{6\%}{4} = \frac{0,06}{4} = 0,015 = 1,5\%$$

Desconto por dentro

$$n = \frac{\frac{1000}{995} - 1}{\frac{0,06}{4}} = 0,335 \text{ TRIMESTRE}$$

Desconto composto

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1000}{995}\right)}{\ln\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)} = 0,337 \text{ TRIMESTRE}$$

4. Considere uma aplicação de 25.000 euros, em regime de juro composto e com a duração de 4 anos, vencendo juros às seguintes taxas: 3 % ao ano no primeiro ano; 1,5% ao semestre no segundo ano; 0,75 % ao trimestre no 3º ano e 0,25% ao mês no quarto e último ano. Determine o valor acumulado ao fim de dois anos e no fim do prazo da aplicação. Qual a taxa média da operação? (3 valores)

R: Teremos que calcular, em RJC, o factor de capitalização para cada ano, já que as taxas são diferentes em cada um.

1º ano – O factor é $(1 + i)^1 = (1 + 0,03)^1 = 1,03$

2º ano – O factor é $(1 + i_2)^2 = (1 + 0,015)^2 = 1,030225$

3º ano – O factor é $(1 + i_4)^4 = (1 + 0,0075)^4 = 1,0303392$

4º ano – O factor é $(1 + i_{12})^{12} = (1 + 0,0025)^{12} = 1,030416$

O valor acumulado ao fim de 2 anos obtém-se multiplicando o capital inicial pelo factor de capitalização ao fim de 2 anos, ou seja, é $25000 \times (1,03 \times 1,030225) = 25000 \times 1,0611318 = 26528,29 \text{ EUROS}$

Para o prazo da aplicação (4 anos) o factor será o produto dos quatro factores calculados, ou seja:

$$h = 1,03 \times 1,030225 \times 1,0303392 \times 1,030416 = 1,1265802$$

O valor acumulado obtido é então:

$$25000 \times 1,1265802 = 28164,51 \text{ EUROS}$$

A taxa média é a taxa que substituindo todas as outras produz o mesmo valor acumulado. Como se pede a taxa anual e o prazo é de 4 anos teremos:

$$i_{(med)} = \sqrt[4]{\frac{28164,51}{25000}} - 1 = \left(\frac{28164,51}{25000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1,1265802)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,030245 = 3,025\%$$

5. Com o propósito de amealhar para a sua reforma, uma pessoa depositou nos últimos 20 anos numa conta poupança de um banco, mensal e postecipadamente, a quantia de 185 euros. Sabe-se ainda que no final do décimo quinto ano da aplicação, tendo recebido 45.000 euros de uma herança, a pessoa depositou esse dinheiro na Instituição Bancária para reforço da sua aplicação. Considerando que a TAN, durante o prazo de aplicação – 20 anos - foi de 3 % com capitalização mensal, determine o valor hoje acumulado na conta poupança. (2,5 valores)

R: A taxa a considerar é a taxa mensal $i_{12} = 3\%/12 = 0,25\%$. O indivíduo aplicou 185 euros por mês, durante $20 \times 12 = 240$ meses e no momento 180 (15 anos $\times$ 12 meses) aplicou também o prémio recebido no valor de 45.000 euros, que estava a render juros durante 60 meses. O valor acumulado hoje é V:

$$V = \underbrace{45.000 \times (1 + 0,0025)^{240-180}}_{\text{valor acumulado do prémio}} + \underbrace{185 \times S_{\overline{240}|0,25\%}}_{\text{valor acumulado dos depósitos}} = 52.272,76 + 185 \frac{(1 + 0,0025)^{240} - 1}{0,0025}$$

$$V = 52.272,76 + 60.735,87 = 113.008,63 \text{ EUROS}$$

6. Um comerciante descontou no dia 11 de Abril de 2011, duas letras que tinha em carteira e com vencimentos respectivamente a 16 de Junho (5ª Feira) e a 5 de Julho (3ª Feira). A primeira letra tinha valor nominal de 1750 euros e a segunda 2.350 euros. Tendo em conta que na operação de desconto bancário foram considerados os seguintes encargos:

- Taxa de juro anual: 14,75%
- Comissão de cobrança: 0,75 % sobre o valor nominal de cada letra com um valor mínimo de 15 euros por letra
- Despesas de expediente e portes: 3,5 Euros / letra
- Imposto de selo sobre os juros e comissão de cobrança: 3 %

a) Determine o produto líquido do desconto das duas letras. (2,5 valores)

R: Determinação o prazo (em dias) de antecipação do recebimento das letras:

	Letra 1	Letra 2
Abril	19	19
Maio	31	31
Junho	16	30
Julho	xx	5
Adicional	4 (5ªF)	2 (3ªF)
<u>Total</u>	<u>70</u>	<u>87</u>

O DFT será então:

PLD	-1.750	- 2.350
		
0...	70.....	87 (dias)

A equação de equivalência de capitais (EEC), na data do desconto (momento zero) e que permite calcular o produto líquido do desconto é:

$$PLD = \overbrace{1750 - (1750 \times 70 \times \frac{0,1475}{360} + 1750 \times 0,0075) \times (1 + 0,03) - 3,5}^{Pld_1} + \underbrace{+ 2350 - (2350 \times 87 \times \frac{0,1475}{360} + 2350 \times 0,0075) \times (1 + 0,03) - 3,5}_{Pld_2} \Leftrightarrow$$

Temos que verificar se o valor da CC é igual ou superior a 15 euros, montante mínimo, a este título, cobrado pelo banco. Ora $1750 \times 0,0075 = 13,13$ euros valor inferior ao mínimo. Então teremos que considerar, na equação, o montante de 15 euros para a CC da primeira letra. Para a 2ª vem $2350 \times 0,0075 = 17,63$ pelo que está acima do mínimo. A nova equação será então:

$$PLD = \overbrace{1750 - (1750 \times 70 \times \frac{0,1475}{360} + 15) \times (1 + 0,03) - 3,5}^{Pld_1} + \underbrace{+ 2350 - (2350 \times 87 \times \frac{0,1475}{360} + 2350 \times 0,0075) \times (1 + 0,03) - 3,5}_{Pld_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PLD = \overbrace{1.679,35}^{Pld_1} + \overbrace{2242,07}^{Pld_2} = 3921,42 \text{ EUROS}$$

b) Escreva a expressão que permite determinar a TAEG da operação de desconto bancário. (1,5 valores)

R: Temos que estabelecer a equação de equivalência em RJC, considerando a TAEG como a taxa anual que torna equivalentes o PLD e as duas letras. A EEC no momento zero será então:

$$3921,42 = \frac{1750}{(1 + TAEG)^{\frac{70}{365}}} + \frac{2350}{(1 + TAEG)^{\frac{87}{365}}}$$

TAEG = 22,616% (Resolvido no EXCEL com a função XTIR)

7. Uma casa destinada a habitação própria, no valor de 87.526 Euros foi adquirida mediante o pagamento a pronto de 7.526 Euros e um financiamento bancário para o restante. O empréstimo será amortizado em 35 anos, por meio de prestações mensais, constantes de capital e juro. A TAN proposta pelo banco foi de 3,96%, com capitalizações mensais.

a) Determine o valor da prestação mensal. (1 valor)

R: A EEC, no momento zero, que permite determinar o valor da prestação periódica é, para $p=35 \times 12=420$ meses e $i_{12}=3,96\%/12=0,33\%$:

$$C = P \times a_{\overline{p}|i_{12}} \Leftrightarrow 87526 - 7526 = P \times a_{\overline{420}|0,33\%} \Leftrightarrow P = \frac{80000}{227,0773} = 352,30 \text{ EUROS}$$

- b) Construa o quadro de reembolso para as duas primeiras prestações. (1,5 valores)

R:

Momento	Prestação			Saldo da dívida por reembolsar	Taxa
	Total	Juro	Reembolso		
n	P_n	j_n	r_n	S_n	i_{12n}
0				80.000,00	
1	352,30	264,00	88,30	79.911,70	0,33%
2	352,30	263,71	88,59	79.823,11	0,33%
3	352,30	...	...	...	0,33%

As expressões utilizadas na construção do quadro foram:

$$S_0 = C = 80.000,00$$

$$P_1 = P_2 = 352,30$$

$$j_n = S_{n-1} \times i_{12}$$

$$r_n = P_n - j_n$$

$$S_n = S_{n-1} - r_n$$

- c) Qual o montante de juros e de reembolso do capital incluídos na prestação número 379? (1 valor)

R: Trata-se de saber as componentes da prestação número 379 e que se podem calcular de várias maneiras, por exemplo:

Como os reembolsos crescem em progressão geométrica de razão $1+i_{12}=1,0033$ temos:

$$r_{379} = r_1 \times (1 + 0,0033)^{379-1} = 88,30 \times 3,474138 = 306,77 \text{ EUROS}$$

$$j_{379} = P - r_1 = 352,30 - 306,77 = 45,53 \text{ EUROS}$$

- d) Qual o valor da nova prestação a pagar se, no final do quarto ano, a TAN passar para 4,17 %. (1 valor)

R: A taxa mensal passa para $4,17\%/12=0,3475\%$. O final do 4º ano corresponde ao momento 48 faltam $420-48=372$ meses para o final do empréstimo. A dívida no final do 4ª ano será:

$$S_{48} = 352,30 \times a_{\overline{372}|0,33\%} = 75.414,87 \text{ EUROS}$$

$$\text{O valor da nova prestação } P' = \frac{75414,87}{a_{\overline{372}|0,3475\%_{12}}} = \frac{75414,87}{208,59153} = 361,54 \text{ EUROS}$$