Exercícios de Revisão

Primitivas Imediatas

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$P\,f = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^{x}	e^{x}
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

N.B.: Nesta colecção vamos reduzir todas as primitivas a determinar, às expressões nesta tabela. Este aspecto deve ser bem ponderado pelos leitores, no contexto da avaliação a que serão sujeitos, nas respectivas faculdades.

Algumas Fórmulas Úteis

Fórmulas trigonométricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sec x \equiv \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x \equiv \frac{1}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

$e^{ix} \equiv \operatorname{cis} x = \cos x + i \sin x$ (fórmula de *Euler*) $\qquad i \equiv \sqrt{-1}$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Funções hiperbólicas

$$\sinh x \equiv \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x \equiv \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{tgh} x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

§1 Introdução Teórica

Definição 1.1: Primitiva

"Sejam f e F funções definidas no intervalo $[a,b]$; F é diferenciável em todos os pontos de $[a,b]$ e se para todo o $x \in [a,b]$ se tem:

$$F'(x) = f(x),$$

diz-se que a função f é primitivável em $[a,b]$ e que F é uma primitiva de f em $[a,b]$."

Observação 1.2: Notação

"Para denotar uma primitiva F de uma função f é habitual usar-se uma das seguintes notações: $F(x) = Pf(x) = P_x f(x) = \int f(x)dx$."

§2 Exercícios Resolvidos

Para resolver este grupo de exercícios, o método a utilizar é transformar a função a primitivar, evidentemente sem a alterar, numa função do tipo das existentes na tabela de primitivas elementares (Tabela 1.1), e de seguida primitivá-la imediatamente recorrendo à dita tabela. Em geral nesta fase inicial, além da Tabela 1.1 vamos usar o seguinte resultado:

Teorema 2.1: Regra da Derivada da Função Composta

$$\text{“}\frac{d}{dx}\left[F(u(x))\right] = F'(u(x)).u'(x)\text{”}$$

2.1 Potência

$$P\left[x^\alpha\right] = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad P\left[u^\alpha u'\right] = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

2.1.1 Primitive as seguintes funções:

(a) $\frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{3}{x^3}$

(b) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}$

(c) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x}$

Resolução:

(a) $P\left(\frac{x^4}{3}-2x^2+\frac{3}{x^3}\right) = \frac{1}{3}Px^4-2Px^2+3Px^{-3} = \frac{x^5}{15}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^{-2}$

(b) $P(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[5]{x})=Px^{2/3}+2Px^{1/5}=\frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{5}{3}x^{6/5}$

(c) $P\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x} = P\left(\sqrt{\frac{x}{x^2}}-2\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}\right) = P\,x^{-1/2}-2Px^{-2/3} = 2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$

2.2 Exponencial

$$P\left[e^x\right]=e^x \qquad\qquad P\left[e^u u'\right]=e^u$$

2.2.1 Primitive as seguintes funções:

(a) $x^3 e^{x^4}$

(b) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(c) $e^{\sin 2x}\cos 2x$

(d) $\frac{e^{1/x}}{x^2}$

Resolução:

(a) Exponencial: $P(x^3e^{x^4})=\frac{1}{4}P4x^3e^{x^4} \underset{u=x^4}{=} \frac{1}{4}Pu'e^u=\frac{1}{4}e^u=\frac{1}{4}e^{x^4}$

(b) Exponencial: $P\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=2P\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \underset{u=\sqrt{x}}{=} 2Pu'e^u=2e^u=2e^{\sqrt{x}}$

(c) Exponencial: $P(e^{\sin 2x}\cos 2x)=\frac{1}{2}P2\cos 2xe^{\sin 2x} \underset{u=\sin 2x}{=} \frac{1}{2}Pu'e^u=\frac{1}{2}e^u=\frac{1}{2}e^{\sin 2x}$

(d) Exponencial: $P\frac{e^{1/x}}{x^2}=-P\left(-\frac{1}{x^2}e^{1/x}\right) \underset{u=1/x}{=} -Pu'e^u=-e^u=-e^{1/x}$

2.3 Logaritmo

$$P\left[\frac{1}{x}\right]=\log|x| \qquad P\left[\frac{u'}{u}\right]=\log|u|$$

2.3.1 Primitive as seguintes funções:

(a) $\dfrac{e^x}{1+4e^x}$

(b) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

(c) $\dfrac{1}{x\log x}$

Resolução:

(a) Logaritmo: $P\dfrac{e^x}{1+4e^x}=\dfrac{1}{4}P\dfrac{4e^x}{1+4e^x}\underset{u=1+4e^x}{=}\dfrac{1}{4}P\dfrac{u'}{u}=\dfrac{1}{4}\log|u|=\dfrac{1}{4}\log\left|1+4e^x\right|$

(b) Logaritmo: $P\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=-P\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\underset{u=\sin x+\cos x}{=}-P\dfrac{u'}{u}=-\log|u|=-\log|\sin x+\cos x|$

(c) Logaritmo: $P\dfrac{1}{x\log x}=P\dfrac{1/x}{\log x}\underset{u=\log x}{=}P\dfrac{u'}{u}=\log|u|=\log|\log x|$

2.4 ArcTan/ArcSin

$$P\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\arctan(x) \qquad P\left[\frac{u'}{1+u^2}\right]=\arctan(u)$$

$$P\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\arcsin(x) \qquad P\left[\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right]=\arcsin(u)$$

2.4.1 Primitive as seguintes funções:

(a) $\dfrac{x^2}{1+x^6}$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ (d) $\dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$

(e) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (f) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$

Resolução:

(a) $$P\frac{x^2}{1+x^6}=P\frac{x^2}{1+(x^3)^2}=\frac{1}{3}P\frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\underset{u=x^3}{=}\frac{1}{3}P\frac{u'}{1+u^2}=\frac{1}{3}arctgu=\frac{1}{3}arctgx^3$$

(b) $$P\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}=P\frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}P\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\underset{u=x^2}{=}\frac{1}{2}P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\arcsin u=\frac{1}{2}\arcsin x^2$$

(c) $$P\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=P\frac{1/\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=2P\frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\underset{u=\sqrt{x}}{=}2P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=2\arcsin u=2\arcsin\sqrt{x}$$

(d) $$P\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}=P\frac{e^{2x}}{1+(e^{2x})^2}=\frac{1}{2}P\frac{2e^{2x}}{1+(e^{2x})^2}\underset{u=e^{2x}}{=}\frac{1}{2}P\frac{u'}{1+u^2}=\frac{1}{2}arctgu=\frac{1}{2}arctge^{2x}$$

(e) $$P\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}\underset{u=e^x}{=}P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u=\arcsin e^x$$

(f) $$P\frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}=P\frac{1/x}{\sqrt{1-\left(\log x\right)^2}}\underset{u=\log x}{=}P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u=\arcsin(\log x)$$

§3 Exercícios Propostos

3.1 Preencha a primeira coluna da tabela seguinte:

Tabela 1.2: Tabela de Primitivas Imediatas

f	***P f =F***
	$c\,u$
	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$\log\lvert u\rvert$
	e^{u}
	$\sin u$
	$-\cos u$
	tg u
	$-\mathrm{cotg}\,u$
	$arctg\ u$
	$\arcsin u$
	$\sinh u$
	$\cosh u$

Note que $u = u(x)$.

3.2 Primitive as seguintes funções:

(a) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\dfrac{e^{6x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$ (c) $\dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $\dfrac{x^5}{1+x^6}$ (e) $\sqrt{2x}+\sqrt{x/2}$ (f) $3\sin x + 2x^2$

(g) xe^{-x^2} (h) $\dfrac{3\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (i) $x\sqrt{1+x^2}$

3.3 Primitive as seguintes funções:

(a) $e^{2\sin x}\cos x$ (b) $\tan x$ (c) $\dfrac{1}{x^2+2}$

(d) $\sin^3 x\cos^3 x$ (e) $\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$ (f) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

(g) $\dfrac{e^x}{4+e^{2x}}$ (h) $\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}$ (i) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$

§4 Sugestões para as resoluções dos Exercícios Propostos

3.1 O que se está a pedir não é que primitive, mas sim que derive a 2ª coluna, resultando:

f
cu'
$u'u^{\alpha}$
$\dfrac{u}{u'}$
$u'e^u$
$u'\cos u$
$u'\sin u$
$u'\sec^2 u$
$u'\text{cosec}^2 u$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$u'\cosh u$
$u'\sinh u$

3.2

(a)

$$P\,\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} = P\left(x^3\,(1-x^4)^{-1/2}\right) = -\frac{1}{4}P\left(-4x^3(1-x^4)^{-1/2}\right) = -\frac{1}{4}P\,u'\,u^{-1/2} = -\frac{1}{4}\frac{u^{1/2}}{1/2} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$$

(b)

$$P\,\frac{e^{6x}}{\sqrt{1-e^{6x}}} = P\left(e^{6x}\,(1-e^{6x})^{-1/2}\right) = -\frac{1}{6}P\left(-6e^{6x}\,(1-e^{6x})^{-1/2}\right) = -\frac{1}{6}P\,u'\,u^{-1/2} = -\frac{1}{6}\frac{u^{1/2}}{1/2} = -\frac{1}{3}\sqrt{1-e^{6x}}$$

(c) $P\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}P\dfrac{2x}{1+x^2}\underset{u=1+x^2}{=}\dfrac{1}{2}P\dfrac{u'}{u}=\dfrac{1}{2}\log|u|=\dfrac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$

(d) $P\dfrac{x^5}{1+x^6}=\dfrac{1}{6}P\dfrac{6x^5}{1+x^6}=\dfrac{1}{6}P\dfrac{u'}{u}=\dfrac{1}{6}\log|u|=\dfrac{1}{6}\log\left(1+x^6\right)$

(e) $\sqrt{2x^3}$ (f) $3\cos x+2/3x^3$ (g) $-0.5e^{-x^2}$

(h) $P\left[3\sin x(1+\cos x)^{-2}\right]=\dfrac{3}{1+\cos x}$ (i) $1/3\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$

3.3

(a) $\dfrac{1}{2}e^{2\sin x}$ (b) $\log|\cos x|$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

(d)

$P\left(\sin^3 x\cos^3 x\right)=P\left[\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\sin^3 x\right]=P\left[\cos x\sin^3 x\right]+P\left[\cos x\sin^5 x\right]=\dfrac{\sin^3 x}{4}-\dfrac{\sin^6 x}{6}$

(e) $P\left[\dfrac{1/\left(1+x^2\right)}{\arctan x}\right]=\log|\arctan x|$ (f) $2P\left[\dfrac{1/\left(2\sqrt{x}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}\right]=2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$

(g) $1/2\arctan\left(e^x/2\right)$

(h) $P\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)^{-\frac{1}{2}}\right]=\dfrac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}$ (i) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}x^2\right)$

Bibliografia

[1] “Introdução à Análise Matemática” J. Campos Ferreira (Fundação Gulbenkian, 1990).

[2] “Calculus, Vol. I” T. M. Apostol (John Wiley, 1976).