

Primitivas

A primitivação é a operação inversa da derivação.

Def. A função F é uma *primitiva* da função f no intervalo (com mais do que um ponto) $I \subseteq \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. Para indicar que F é uma primitiva de f é usual escrever $F = Pf$ ou $F = \int f$.

$\therefore F = Pf$ sse $F' = f$.

Ex. $\frac{x^2}{2} = Px$, em $\mathbb{R}$; $\log x = P\frac{1}{x}$, em $]0, +\infty[$; $e^x = Pe^x$, em $\mathbb{R}$.

Obs. Decorre directamente da definição de primitiva de uma função que, se f é primitivável no intervalo I (i.e., existe uma primitiva de f em I):

- . Existe um número infinito de primitivas de f em I . (Se $F = Pf$, então $F + C = Pf$, qualquer que seja a constante C .)
- . Toda a primitiva de f em I é uma função contínua em X . (Uma primitiva é uma função derivável e portanto contínua.)

Teor. Se f é primitivável no intervalo I , quaisquer duas primitivas de f em I diferem de uma constante. (i.e., se $F = Pf$ e $G = Pf$, então $F - G = \text{constante}$).

Se $F = Pf$ e $G = Pf$ em I , tem-se $F' = f$ e $G' = f$, o que

implica $F' = G' \Leftrightarrow (F - G)' = 0 \Leftrightarrow (F - G)$ constante em I . $\square$

$\therefore$ Se $F = Pf$ no intervalo I , o conj. das primitivas de f em I é $\{G = F + C, \text{ para todo o } C \text{ em } \mathbb{R}\}$.

Ex. Determine a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabendo que $G'(x) = x^2$ e $G(0) = 1$.

$Px^2 = \frac{x^3}{3}$. Assim, $G(x) = \frac{x^3}{3} + C$, para alguma constante C . Como $G(0) = \frac{0^3}{3} + C = 1$, tem-se $C = 1$ e portanto $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$.

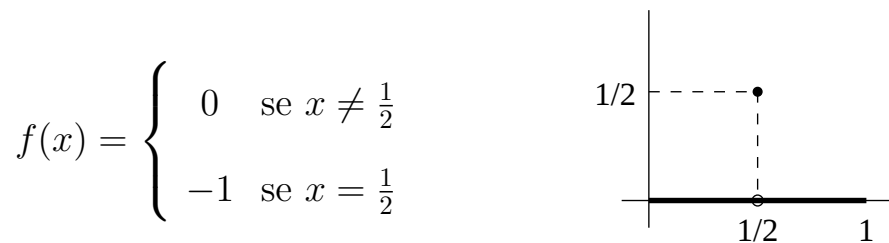
Obs. No Teorema anterior, é relevante o facto do conj. I ser um intervalo. As funções $F(x) = 1 - \frac{1}{x}$ e $G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ satisfazem $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. No entanto, $F(x) - G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, e portanto $F - G$ não é constante em X .

Em que condições é uma função primitivável num dado intervalo?

É válido o seguinte Teorema.

Teor. Toda a função contínua no intervalo I é primitivável em I .

Há funções “simples” que não são primitiváveis. Por exemplo,



não é primitivável no intervalo $]0, 1[$.

Suponha que f é primitivável em $]0, 1[$ e seja F uma primitiva de f nesse intervalo. Como $F' = f$ em $]0, 1[$, tem-se F constante em $]0, \frac{1}{2}[$ e em $]\frac{1}{2}, 1[$, i.e., $F = C_1$ em $]0, \frac{1}{2}[$ e $F = C_2$ em $]\frac{1}{2}, 1[$. De F ser contínua em $]0, 1[$ resulta que $C_1 = C_2 = F(\frac{1}{2})$ e portanto F é constante em $]0, 1[$, o que implica que $F' = f = 0$ em $]0, 1[$, em contradição com a definição da função f .

Regras de primitivação:

1. Se f e g são funções primitiváveis no intervalo I , a função $f + g$ é primitivável em I e $P(f + g) = Pf + Pg$.

Sejam $F = Pf$ e $G = Pg$. $(F + G)' = F' + G' = f + g$.

$\therefore F + G = P(f + g) = Pf + Pg$. $\square$

Ex. $P(x^3 + x + 1) = Px^3 + Px + P1 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

$$P\frac{2x+1}{x^2+1} = P\frac{2x}{x^2+1} + P\frac{1}{x^2+1} = \log(x^2 + 1) + \arctg x + C.$$

2. Se f é primitivável no intervalo I e λ é um número real, a função

λf é primitivável em I e $P(\lambda f) = \lambda P f$.

Seja $F = P f$. $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$.

$\therefore \lambda F = P \lambda f$. $\square$

Ex. $P - 3x = -3Px = -\frac{3}{2}x^2 + C$.

$$P \frac{x}{x^2+1} = P \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} P \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C.$$

$$P(3x^2 - 4 \cos 2x) = 3Px^2 - 2P2 \cos 2x = x^3 - 2 \sin 2x + C.$$

Métodos de primitivação:

1. **Primitivação por partes.** Sejam f e g funções definidas no intervalo I , $F = P f$ e g derivável em I . A função fg é primitivável em I e $P(fg) = Fg - P(Fg')$.

Ex.

$$\text{a) } P(x \sin x) = xP \sin x - P(P(\sin x)x') = -x \cos x - P(-\cos x) = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{b) } P(xe^x) = xPe^x - P((Pe^x)x') = xe^x - e^x + C.$$

$$\text{c) } P(x \log x) = \log x Px - P(P(x)(\log x)') = \frac{x^2 \log x}{2} - P\left(\frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2} Px = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(\log x) &= P(1 \log x) = \log x P1 - P(P(1)(\log x)') = x \log x - \\ &P1 = x \log x - x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P \operatorname{arctg} x &= P(1 \operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x - P \frac{x}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \\ &\frac{1}{2} P \frac{2x}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } P \sin^3 x &= P(\sin x \sin^2 x) = -\sin^2 x \cos x + P(\cos x 2 \sin x \cos x) = \\ &-\sin^2 x \cos x + 2P(\sin x \cos^2 x) = -\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

2. **Primitivação por substituição.** Sejam f uma função primitivável no intervalo I e φ uma bijecção derivável do intervalo J em I . Então, $Pf(x) = P(f(\varphi(t))\varphi'(t))$, com $x = \varphi(t)$.

Ex.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$e^x = t \Rightarrow x = \log t = \varphi(t), \quad t \in]0, +\infty[, \quad x' = \varphi'(t) = \frac{1}{t}.$$

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P\left(\frac{1}{1+t} \frac{1}{t}\right) = P\left(-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t}\right) = \\ &-\log(1+t) + \log t + C = -\log(1+e^x) + x + C =. \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) = \cos \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty].$$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 = \varphi(t), \quad t \in [0, +\infty[, \quad x' = \varphi'(t) = 2t.$$

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P2t(\cos t) = 2t \sin t - 2P \sin t = \\ &2t \sin t + 2 \cos t + C = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

$$x = \sin t = \varphi(t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x' = \varphi'(t) = \cos t.$$

$$Pf(x) = P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P\sqrt{1-\sin^2 t} \cos t = P \cos^2 t =$$

$$P\frac{1}{2}(1 + \cos 2t) = P\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P \cos 2t = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C =$$

$$\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

Primitivação de funções racionais.

Def. Uma *função racional* é uma razão de polinómios na mesma variável.

$$\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}, \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}, \frac{x^5}{x^2-5x+6} \text{ são exemplos de funções racionais.}$$

Uma função racional é *própria* se o grau do polinómio do denominador é maior do que o do numerador. Uma função racional não própria diz-se *imprópria*.

Obs. Toda a função racional pode ser escrita como a soma de um polinómio e de uma função racional própria.

Ex. $R(x) = \frac{2x^3-x}{x^2-5x+6}.$

$$\begin{array}{r} 2x^3 \qquad \qquad - \quad x \qquad | \quad x^2 - 5x + 6 \\ \hline -2x^3 + 10x^2 - 12x \qquad 2x \\ \hline 10x^2 - 13x \end{array}$$

$$\therefore 2x^3 - x = 2x(x^2 - 5x + 6) + 10x^2 - 13x \Rightarrow R(x) = 2x + \frac{10x^2 - 13x}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$\begin{array}{r} \text{Agora,} \quad 10x^2 - 13x \quad \underline{|x^2 - 5x + 6|} \\ -10x^2 + 50x - 60 \quad 10 \\ \hline 37x - 60 \end{array}$$

$$\text{e assim, } R(x) = 2x + 10 + \frac{37x - 60}{x^2 - 5x + 6}.$$

Def. Chama-se *fracção simples* a uma função racional própria do tipo $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ ou $\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k}$, em que $a, \alpha, A, B, p, q \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Note que } P_{\frac{a}{(x-\alpha)^k}} = \begin{cases} a \log |x - \alpha| & \text{se } k = 1 \\ a \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} & \text{se } k > 1 \end{cases}.$$

O cálculo de uma primitiva de $\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k}$ é mais complicado.

Tem-se $P_{\frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}} = \frac{Ap+B}{q} \operatorname{arctg} \frac{x-p}{q} + \frac{A}{2} \log((x-p)^2 + q^2)$ e, para $k > 1$, $P_{\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k}} = \frac{Ap+B}{q^{2k-1}} P_{\frac{1}{((\frac{x-p}{q})^2+1)^k}} + \frac{A}{2q^{2k-2}(1-k)} ((\frac{x-p}{q})^2 + 1)^{1-k}$, em que $P_{\frac{1}{(t^2+1)^k}} = \frac{t}{2k-2} \frac{1}{(t^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} P_{\frac{1}{(t^2+1)^{k-1}}}$.

Teor. Toda a função racional própria pode ser decomposta na soma de fracções simples. Se $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função racional própria,

a) Cada raiz real α de $Q(x)$ de multiplicidade k dá origem à soma

$$\text{das } k \text{ fracções simples: } \frac{a_1}{(x-\alpha)^k}, \frac{a_2}{(x-\alpha)^{k-1}}, \dots, \frac{a_k}{x-\alpha}.$$

b) Cada par de raízes complexas $p \pm iq$ de $Q(x)$ de multiplicidade k dá origem à soma das k fracções simples: $\frac{A_1x+B_1}{((x-p)^2+q^2)^k},$
 $\frac{A_2x+B_2}{((x-p)^2+q^2)^{k-1}}, \dots, \frac{A_kx+B_k}{(x-p)^2+q^2}.$

Ex.

$$1. R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^3+x}.$$

As raízes de $Q(x) = x^3+x = x(x^2+1)$ são 0 com multiplicidade 1 e $\pm i$ com multiplicidade 1.

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{Ax+B}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$1 = a(x^2+1) + (Ax+B)x \Leftrightarrow$$

$$1 = ax^2 + a + Ax^2 + Bx \Leftrightarrow$$

$$1 = (a+A)x^2 + Bx + a \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+A &= 0 \\ & B = 0 \\ a &= 1 \end{cases} \Rightarrow A = -1$$

$$\therefore R(x) = \frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

$$PR(x) = P \frac{1}{x^3+x} = P \frac{1}{x} - P \frac{x}{x^2+1} = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1).$$

$$2. R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4}.$$

1 é uma raiz de $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)T(x).$

$$\begin{array}{c|cccc}
& 1 & -5 & 8 & -4 \\
1 & & 1 & -4 & 4 \\
\hline
& 1 & -4 & 4 & | \underline{0}
\end{array}
\text{ Assim, } x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)T(x) =$$

$$(x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2.$$

$\therefore$ raiz 1 com multiplicidade 1 e raiz 2 com multiplicidade 2.

$$\frac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{a}{x-1} + \frac{b_1}{(x-2)^2} + \frac{b_2}{x-2} \Rightarrow$$

$$2x^2 - 5 = a(x - 2)^2 + b_1(x - 1) + b_2(x - 1)(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 5 = ax^2 - 4ax + 4a + b_1x - b_1 + b_2x^2 - 2b_2x - b_2x + 2b_2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 5 = (a + b_2)x^2 + (-4a + b_1 - 3b_2)x + 4a - b_1 + 2b_2 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b_2 = 2 \\ -4a + b_1 - 3b_2 = 0 \\ 4a - b_1 + 2b_2 = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow b_2 = 5, a = -3, b_1 = 3.$$

$$\therefore R(x) = \frac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4} = -\frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{5}{x-2}.$$

$$PR(x) = P \frac{2x^2-5}{x^3-5x^2+8x-4} = P - \frac{3}{x-1} + P \frac{3}{(x-2)^2} + P \frac{5}{x-2} =$$

$$-3 \log |x - 1| - \frac{3}{x-2} + 5 \log |x - 2|.$$