

2. PRIMITIVAS

2.1. Definições

No capítulo anterior, centramos a nossa atenção no seguinte problema: dada uma função, determinar a sua função derivada. Neste capítulo, vamos considerar o problema inverso, ou seja, determinar uma função sendo conhecida a sua derivada.

Por outras palavras, iremos desenvolver a operação inversa da derivação conhecida por **primitivação**.

Definição 1.1: Seja F uma função derivável. Diz-se que F é uma **primitiva** da função f se $F' = f$.

Definição 1.2: Diz-se que uma função f é **primitivável** no intervalo $[a, b]$ se admite uma primitiva no intervalo $[a, b]$.

Notas: 1) Existem funções que não são primitiváveis. No entanto, toda a função contínua num intervalo admite uma primitiva nesse intervalo.

2) Uma dada função admite mais do que uma primitiva. Este resultado decorre do facto da derivada de uma constante ser zero.

Teorema 1.3: Se F_1 e F_2 são duas primitivas da função f no intervalo $[a, b]$ então $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $F_2(x) = F_1(x) + C$, $\forall x \in [a, b]$.

Notação: $Pf(x)$ ou $\int f(x)dx$.

Teorema 1.4:

(i) $\int dx = x + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

(ii) Sejam α e β números reais. Se f e g são funções primitiváveis então $\alpha f + \beta g$ é primitivável e

$$\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx$$

2.2. Primitivas imediatas

Esta secção é dedicada ao cálculo de primitivas de certas funções elementares, conhecidas por **primitivas imediatas**, que se obtêm (de imediato) por “inversão” das regras de derivação. As regras de primitivação imediata figuram no formulário 3.

Exemplo 2.1: Calcule a primitiva das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = -\frac{1}{2}x^6; & 2) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}; & 3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-2}}; \\ 4) f(x) = x^2 e^{x^3}; & 5) f(x) = (-3x)tg(x^2); & 6) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}. \end{array}$$

2.3. Primitivação por partes

O método de primitivação por partes permite calcular a primitiva de um produto de duas funções a partir do conhecimento da primitiva de uma delas.

Teorema 3.1: Sejam f uma função contínua num intervalo I e g uma função continuamente derivável em I . Então a função $h: x \rightarrow f(x)g(x)$ é primitivável em I e tem-se

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx,$$

sendo F uma primitiva de f em I .

Na prática, é necessário saber escolher a função a primitivar e a função a derivar. Existem algumas regras para ajudar a escolher esses factores.

REGRA 1: Se só um dos dois factores admite uma primitiva imediata, designaremos este por f e o outro por g .

REGRA 2: Se a função a primitivar é o produto de um polinómio por uma função trigonométrica ou exponencial deve-se começar a primitivação por ela.

REGRA 3: Se só temos uma função que não sabemos primitivar escreve-se $\int f(x) dx = \int 1 f(x) dx$ e primitiva-se o 1.

REGRA 4: Pela aplicação sucessiva da regra de primitivação por partes, pode aparecer no segundo membro uma primitiva igual à que se pretende calcular. Isola-se então essa primitiva e trata-se a igualdade como uma equação, sendo a incógnita a primitiva pedida inicialmente.

Exemplo 3.2: Calcule $\int (1+x)e^x dx$.

Exemplo 3.3: Calcule $\int \ln(x+1)dx$.

Exemplo 3.4: Calcule $\int x \cos(3x)dx$.

2.4. Primitivação de funções racionais

Nesta secção vamos aprender uma técnica de primitivação que envolve a decomposição de uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na soma de várias funções racionais simples, designadas por **elementos simples**.

2.4.1. Decomposição em elementos simples

Para obter a decomposição, começa-se por factorizar o denominador. Consideremos que o denominador só tem raízes reais (simples ou/e múltiplas).

Sejam α_p as raízes reais do polinómio Q de multiplicidade k_p , $p=1,2,\dots,n$. Temos a seguinte factorização:

$$Q(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_n)^{k_n},$$

onde a representa o coeficiente do termo de maior grau.

Logo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_n)^{k_n}}.$$

A cada factor do tipo $(x - \alpha_p)^{k_p}$, com $p=1,2,\dots,n$ corresponde uma soma de k_p elementos simples, ou seja,

$$(x - \alpha_p)^{k_p} \rightarrow \frac{A_1}{(x - \alpha_p)^{k_p}} + \frac{A_2}{(x - \alpha_p)^{k_p-1}} + \frac{A_3}{(x - \alpha_p)^{k_p-2}} + \cdots + \frac{A_{k_p}}{x - \alpha_p},$$

com $A_i \in IR$.

Exemplo 3.5: Determine a decomposição em elementos simples

da função $\frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

Cálculo das constantes: Regra do Tapa.

Seja $x = \alpha$ uma raiz real (não necessariamente única) do polinómio Q de multiplicidade k , com $k \geq 1$.

Temos $Q(x) = (x - \alpha)^k Q_1(x)$ e α não é raiz do polinómio $Q_1(x)$.

Logo,

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-\alpha} + E(x).$$

Então,

$$A_1 = \left[\frac{P(x)}{Q_1(x)} \right]_{x=\alpha} ; \quad A_2 = \left[\frac{(A_1(x))'}{1!} \right]_{x=\alpha} ; \quad A_3 = \left[\frac{(A_1(x))''}{2!} \right]_{x=\alpha} ; \quad \dots ;$$

$$A_n = \left[\frac{(A_1(x))^{(n-1)}}{(n-1)!} \right]_{x=\alpha}, \text{ sendo } A_1(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)}.$$

Exemplo 3.6: Calcule $\int \frac{4x}{x^2-1} dx$.

2.4.2. Primitivação de funções racionais

1º caso: grau(P) < grau(Q)

Nesse caso, devemos decompor $\frac{P(x)}{Q(x)}$ em elementos simples e de seguida primitivar.

2º caso: grau(P) $\geq$ grau(Q)

Nesse caso, devemos começar por efectuar a divisão de P por Q .

Dessa forma, $\frac{P(x)}{Q(x)} = I(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, sendo grau(R) < grau(Q).

$I(x)$ é a **parte inteira** e $R(x)$ é o **resto da divisão**.

Então,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int I(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx .$$

Para calcular $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$, temos em primeiro de decompor $\frac{R(x)}{Q(x)}$ em elementos simples (1º caso).

Exemplo 3.7: Calcule $\int \frac{x^5 + x - 1}{x^4 - x^3} dx$.

Exercício 3.8: Calcule $\int \frac{1}{3x^2 - x} dx$.