

Primitivação

A primitivação é a operação inversa da derivação.

Definição: *Seja f uma função definida num intervalo I .*

Qualquer função F definida e diferenciável em I tal que

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in I,$$

*diz-se uma **primitiva** de f em I .*

f diz-se primitivável em I se admitir uma primitiva em I .

Naturalmente, se F for uma primitiva de f , também $F + C$ (em que C é uma constante) é uma primitiva de f .

Mais, num intervalo, todas as primitivas de uma dada função diferem de uma constante:

Proposição: *Sejam F e G duas primitivas de f num intervalo I . Então, F e G diferem de uma constante.*

Notação: $P_x f(x)$, $Pf(x)$ e $\int f(x)dx$ representam (em geral) todas as primitivas de f .

Questões:

- $[P_x f(x)]' = ?$
- $P_x[f'(x)] = ?$

Propriedades das Primitivas

Proposição: Sejam f e g funções primitiváveis no intervalo I e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, nesse intervalo, tem-se que:

1. $P(f(x) + g(x)) = Pf(x) + Pg(x)$;
2. $P(\alpha f(x)) = \alpha Pf(x)$;



Atenção: a primitiva do produto não é o produto das primitivas!!!

Proposição: Se f é uma função contínua num intervalo, então f é primitivável nesse intervalo.

Mais:

Proposição: Se f é uma função contínua no intervalo I , para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma e uma só primitiva F de f em I tal que

$$F(x_0) = y_0.$$

$F(x_0) = y_0 \rightarrow$ **condição inicial do problema**

A esta questão, de determinar a (única!) primitiva que verifica uma certa condição inicial, chama-se **Problema de valores iniciais** ou **Problema de Cauchy**.

Exemplo: Sabendo que a velocidade de uma partícula é dada por $v(t) = e^{2t}$, determine a lei do movimento, considerando que no instante inicial se encontra na origem.

Recordemos algumas regras de derivação:

Sendo u e v funções deriváveis e $\alpha \in \mathbf{R}$:

- $\alpha' = 0$;
- $(u + v)' = u' + v'$;
- $(\alpha u)' = \alpha u'$;
- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, se $v \neq 0$; [em particular, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$]
- $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$;
- $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$, c/ $n \in \mathbf{N}$; $\leftarrow$ [resulta tb. do ant. c/ $\alpha = \frac{1}{n}$]
- $(e^u)' = u' e^u$;
- $(a^u)' = u' a^u \ln a$, c/ $a > 0$; $\leftarrow$ [resulta do anterior]
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
- $(\log_a u)' = \frac{1}{\ln a} \frac{u'}{u}$, c/ $a > 0$; $\leftarrow$ [resulta do anterior]
(portanto, $(\log_{10} u)' = \frac{u'}{u \ln 10}$)
- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$;
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$;
- $(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$ (recorde-se que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$);
- $(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$ (recorde-se que $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$);
- $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
- $(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$; $\leftarrow$ [resulta do anterior]
- $(\operatorname{arcsin} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
- $(\operatorname{arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\leftarrow$ [resulta do anterior]
- $(\sec u)' = u' \sec u \operatorname{tg} u$; • $(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$.

Separando - **Propriedades:** se f e g são funções diferenciáveis

- $(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t);$
- $(\alpha f)'(t) = \alpha f'(t), \text{ c/ } \alpha \in \mathbf{R};$
- $(f \cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t);$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}, \text{ se } g(t) \neq 0;$
- $\boxed{[f(g(t))]' = g'(t)f'(g(t))} \rightarrow \underline{\text{derivação da composta}}$

Derivadas conhecidas:

- $\alpha' = 0;$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$
- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ c/ } n \in \mathbf{N}; \leftarrow [\text{resulta tb. do ant. c/ } \alpha = \frac{1}{n}]$
- $(e^x)' = e^x;$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \text{ c/ } a > 0; \leftarrow [\text{resulta do anterior}]$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ c/ } a > 0; \leftarrow [\text{resulta do anterior}]$
- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x;$
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x;$
- $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x \quad (\text{recore-se que } \sec x = \frac{1}{\cos x});$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x \quad (\text{recore-se que } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x});$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}; \leftarrow [\text{resulta do anterior}]$
- $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
- $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \leftarrow [\text{resulta do anterior}]$
- $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x; \quad \bullet \quad (\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x.$

Algumas primitivas imediatas

Função	Primitiva
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$x^\alpha, (\alpha \neq -1, x > 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Uma tabela de primitivas, é uma tabela de derivadas apresentada ao contrário!

Nota: Pela regra de derivação da função composta,

$$(F(\varphi(x)))' = \varphi'(x)F'(\varphi(x)).$$

Assim, se F é uma primitiva de f , então $F(\varphi(x))$ é uma primitiva de $\varphi'(x)f(\varphi(x))$.

A versão mais geral da tabela anterior é:

Função	Primitiva
$\varphi'(x) \sin \varphi(x)$	$-\cos \varphi(x) + C$
$\varphi'(x) \cos \varphi(x)$	$\sin \varphi(x) + C$
$\varphi'(x) \varphi(x)^\alpha, (\alpha \neq -1, \varphi(x) > 0)$	$\frac{[\varphi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$\ln \varphi(x) + C$
$\frac{\varphi'(x)}{1+[\varphi(x)]^2}$	$\arctan \varphi(x) + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}$	$\arcsin \varphi(x) + C$

Primitivas imediatas FUNDAMENTAIS:

Sendo u função derivável e $\alpha \in \mathbf{R}$:

- $P(u' u^\alpha) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ se $\alpha \neq -1$;
- $P(u' e^u) = e^u + C$;
- $P(u' a^u) = \frac{a^u}{\ln a} + C$, c/ $a > 0$; $\leftarrow$ [dispensável, vem da ant.]
- $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + C$;
- $P(u' \operatorname{senu}) = -\cos u + C$;
- $P(u' \cos u) = \operatorname{senu} + C$;
- $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg} u + C$;
- $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsenu} + C$;
- $P(u' \sec^2 u) = \operatorname{tg} u + C$;
- $P(u' \operatorname{cosec}^2 u) = -\operatorname{cotg} u + C$.

Técnicas de Primitivação

Primitivação por partes

Proposição: *Sejam f e g são funções com derivada contínua no intervalo $[a, b]$.*

Então, neste mesmo intervalo,

$$P[f'(x)g(x)] = f(x)g(x) - P[f(x)g'(x)].$$

Primitivação por mudança de variável (ou substituição)

Notação: para representar $f(g(t))$ usa-se também a notação:

$$f(g(t)) = f(x)|_{x=g(t)}.$$

Proposição: *Seja f uma função contínua no intervalo I e $\varphi : J \rightarrow I$ uma aplicação cuja derivada é contínua e não se anula em J .*

Então,

$$P_x f(x) = P_t [f(\varphi(t))\varphi'(t)]|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Observação 1: prova-se que uma função definida num intervalo com derivada não nula é invertível.

Observação 2: existem versões da primitivação por substituição com hipóteses ligeiramente diferentes, por ex.- “ *f uma função primitivável no intervalo I e $\varphi : J \rightarrow I$ uma aplicação bijectiva com derivada contínua*”.

Uma das principais dificuldades na primitivação por substituição reside na escolha da mudança de variável adequada!

Algumas substituições aconselhadas

Sendo f uma função racional dos argumentos indicados,

Primitiva	Substituição
$Pf(e^x)$	$x = \ln t$
$Pf(\ln x)$	$x = e^t$
$Pf\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$x = t^m, m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
$Pf\left(x, (ax + b)^{\frac{p}{q}}, (ax + b)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$ax + b = t^m, m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
$P\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$	$x = \frac{a}{b} \sin t$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right), a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a} x$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right), c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right),$ com $b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t,$ com α raiz de $ax^2 + bx + c$

- **função racional de $\sin x$ e $\cos x$ → substituição:** $t = \tan \frac{x}{2}$

então:	$x = 2 \arctan t$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
---------------	-------------------	-----------------------------	--------------------------------	-----------------------------

- **Nota:** há casos particulares em que funcionam melhor outras substituições. Por exemplo:

c/ **funções rac. de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ e $\tan x$, a substituição**

$t = \tan x$ normalmente funciona melhor.

Primitivação de funções racionais (por decomposição)

Definição: Chama-se **função racional** a qualquer função que se possa escrever na forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com P e Q polinómios de coeficientes reais.

A **função racional** diz-se **própria** se $gr(P(x)) < gr(Q(x))$ e **imprópria** caso contrário.

Fase 1: Para primitivar devemos sempre trabalhar com funções racionais próprias!

- Qualquer função racional imprópria $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode escrever-se na forma

$$\boxed{\text{polinómio} + \text{f. rac. própria.}}$$

Basta fazer a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

Proposição (Regra da divisão):

Sendo $P(x)$ um polinómio e $Q(x)$ um polinómio de grau ≥ 1 , existem sempre polinómios $C(x)$ e $R(x)$, univocamente determinados, tais que

$$P(x) = Q(x) \cdot \underbrace{C(x)}_{\text{cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto da div.}}, \text{ com } gr(R(x)) < gr(Q(x)).$$

Então

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{poli.}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{f. rac. própria}}}$$

Resta-nos ver como primitivar funções racionais próprias.

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional própria.

Fase 2: decompõem-se $Q(x)$ tanto quanto possível como produto de parcelas mais simples, isto é, de:

- constantes;

- parcelas da forma $(x - r)^l$, $c/l \in \mathbf{N} \rightarrow$

parcelas corresp.
às raízes reais

- parc. da forma $\underbrace{(x^2 + bx + c)^k}_{\text{sem raízes reais}}$, $c/k \in \mathbf{N} \rightarrow$

parcelas corresp.
a pares de raízes
compl. conjugadas

aglomerando as parcelas correspondentes às mesmas raízes $\rightarrow l$ é a **multiplicidade da raiz** real r e k a multiplicidade das raízes de $x^2 + bx + c$ (2 complexos conjugados).

Então $Q(x)$ fica escrito na forma

$$Q(x) = \underbrace{a}_{\text{constante}} \times \underbrace{(x - r_1)^{l_1} \times \dots}_{\text{parcelas corresp. às raízes reais}} \times \underbrace{(x^2 + b_1 x + c_1)^{k_1} \times \dots}_{\text{parcelas corresp. a pares de raízes compl. conjugadas}}$$

Fase 3: Determinar uma expressão da forma

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-r)^l} \rightarrow$$

nº de parcelas = l =
= multipl. da raíz real r

para cada factor $(x-r)^l$

e uma expressão da forma

$$\frac{D_1 + E_1 x}{x^2 + bx + c} + \frac{D_2 + E_2 x}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{D_k + E_k x}{(x^2 + bx + c)^k}$$

↓

nº de parc. = k = multip. das raízes complexas
associadas a $x^2 + bx + c$

para cada factor $(x^2 + bx + c)^k$

de tal modo que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ seja soma de todas estas parcelas.

- Chamam-se **fracções elementares** (ou fracções simples) às funções racionais da forma

$$\frac{A}{(x-r)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{D + Ex}{\underbrace{(x^2 + bx + c)^m}_{\text{sem raízes reais}}}.$$

Proposição: Toda a f. rac. própria pode ser decomposta numa soma de fracções simples nas condições acima indicadas.

A decomposição anterior pode ser feita pelo **método dos coeficientes indeterminados**.

Fase 4 (e última!): Determinar as primitivas das fracções simples.

$$\bullet \quad P\left[\frac{A}{(x-r)^k}\right] = \begin{cases} A \ln|x-r| + C, & \underline{\underline{\text{se } k = 1}} \\ P[A(x-r)^{-k}] = A \frac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + C, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

com C constante real.

- Parcelas da forma $\frac{D+Ex}{x^2+bx+c}$:

Não tendo raízes reais, o polinómio $x^2 + bx + c$ pode escrever-se na forma

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

sendo $\alpha \pm \beta i$ as suas raízes.

Fazendo directamente as contas
(que dão sempre situações de logaritmo e/ou arctg) ou com a mudança de variável

$$x - \alpha = \beta t$$

conclui-se que

$$P\left[\frac{D+Ex}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right] = \frac{E}{2} \ln((x-\alpha)^2 + \beta^2) + \frac{(E\alpha+D)}{\beta} \arctg\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

Nota: se $E = 0$ obtém-se sempre um arctg; se $E \neq 0$ ou se obtém só um logaritmo ou se obtém uma soma de um logaritmo e um arctg.

- Parcelas da forma $\frac{D+Ex}{(x^2+bx+c)^k}$, $c/k > 1$:

Decompondo o polinómio como no caso anterior e com a mesma mudança de variável, reduz-se esta situação ao cálculo de uma primitiva imediata e da primitiva

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^k}\right].$$

Esta primitiva ($c/k > 1$) determina-se por partes, fazendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+t^2)^k} &= \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2} \underbrace{t}_f \cdot \underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^k}}_{g'}\end{aligned}$$

e baixando sucessivamente o grau do denominador.

Assim, por exemplo:

$$\begin{aligned}P\left[\frac{1}{(1+t^2)^2}\right] &= P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{1}{2}P\left(\underbrace{t}_f \cdot \underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}_{g'}\right) = \\ \text{pois } g &= -(1+t^2)^{-1} \quad = P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{1}{2}\left[-t\frac{1}{1+t^2} + P\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctgt + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\end{aligned}$$