

$$C_n = C_0 (1+i)^n \quad \rightarrow \quad \text{Fórmula de cálculo do capital acumulado em regime composto}$$

$$\underline{J_{Total} = C_n - C_0 = C_0 [(1+i)^n - 1]} \quad \rightarrow \quad \text{Fórmula de cálculo do juro total produzido em regime composto}$$

Como a taxa de juro é variável

$$C_n = C_0 \cdot \prod_{k=1}^n (1+i_k) \quad J_{Total} = C_n - C_0 = C_0 \cdot \left[\prod_{k=1}^n (1+i_k) - 1 \right]$$

Taxas efectivas e taxas nominais

Taxas efectivas são aquelas que efectivamente presidem à formação do juro.

Relação de equivalência:

$$1+i = \left(1+i_{\frac{1}{m}}\right)^m \Leftrightarrow (1+i)^{\frac{1}{m}} = 1+i_{\frac{1}{m}}$$

Exemplo:

Qual a taxa semestral ($i_{1/2}$) equivalente à taxa anual efectiva (i) de 5%?

$$1+5\% = \left(1+i_{\frac{1}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow (1+5\%)^{\frac{1}{2}} = 1+i_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow i_{\frac{1}{2}} = 2,47\%$$

Exemplo:

Qual a taxa anual efectiva (i) equivalente à taxa mensal ($i_{1/12}$) de 1%?

$$1+i = \left(1+i_{\frac{1}{12}}\right)^{12} \Leftrightarrow i = (1+1\%)^{12} - 1 = 12,68\%$$

Taxas nominais são apenas declaradas como presidindo à formação do juro.

Relação de proporcionalidade:

$$i^{(m)} = m \cdot i_{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow i_{\frac{1}{m}} = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Exemplo:

Qual a taxa semestral ($i_{1/2}$) correspondente à taxa anual nominal de 5% composta semestralmente ($i^{(2)}$)?

$$i^{(2)} = 2 \cdot i_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow i_{\frac{1}{2}} = \frac{5\%}{2} = 2,5\%$$

Exemplo:

Qual a taxa anual nominal composta mensalmente ($i^{(12)}$) correspondente à taxa mensal ($i_{1/12}$) de 1%?

$$i^{(12)} = 12 \times 1\% = 12\%$$

Taxas de juro e fiscalidade

Em regra, os juros de depósitos estão sujeitos a imposto sobre o rendimento por retenção na fonte, a uma taxa liberatória de 20%.

Tal significa que, do montante de juro produzido em cada período do processo de capitalização, só 80% ficam para o aforrador, já que os restantes 20% são para o Estado.

$$i_{liquida} = i_{bruta} \times 0,8$$

Taxas de juro e inflação

Contudo, deve notar-se que o juro efectivamente produzido corresponde ao juro corrente; o juro real é apenas um valor de referência, que reflecte a perda de poder de compra resultante da inflação.

Podem dar-se 3 situações:

1) **taxa de inflação < taxa de juro**

o valor real do juro é positivo, mas não tão elevado quanto aparenta; a taxa real é positiva, mas inferior à taxa corrente.

2) **taxa de inflação = taxa de juro**

o valor real do juro é nulo; a taxa real é, também, nula.

3) **taxa de inflação > taxa de juro**

o juro obtido é insuficiente para compensar a perda de poder de compra; a taxa real é negativa.

Vejamos como determinar a **taxa real**, em função da **taxa corrente** e da **taxa de inflação**.

Simbologia:

i = taxa de juro corrente

i' = taxa de juro real

z = taxa de inflação

$$i' = \frac{1+i}{1+z} - 1$$

Taxa de custo/rendibilidade real

A **taxa de custo/rendibilidade real** corresponde, respectivamente, à taxa de custo efectiva ou de rendibilidade efectiva de uma operação de crédito/aplicação financeira.

Contudo, como nem sempre os encargos do mutuário coincidem com os recebimentos do mutuante (ex.: os montantes pagos pelo mutuário a título de imposto não constituem receita da instituição de crédito), torna-se necessário distinguir dois conceitos:

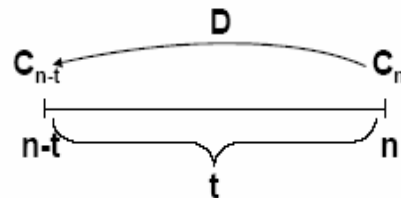
Taxa Anual de Encargos Efectiva Global (TAEG)

Taxa Anual Efectiva (TAE)

O Desconto:

Desconto – preço a pagar para se dispor de um capital num momento de tempo anterior ao do seu vencimento.

C_n = valor **nominal** do capital, com vencimento em n .
 C_{n-t} = valor **actual** do capital (sendo $n-t$ o momento actual).
 t = prazo que decorre entre o momento actual e o vencimento.
 D = desconto sofrido pelo capital C_n no prazo t .



$$C_{n-t} = C_n - D \quad \Leftrightarrow \quad D = C_n - C_{n-t}$$

Desconto em RJS

O desconto em RJS abrange duas modalidades: o desconto por dentro e o desconto por fora.

Desconto por dentro

No caso do desconto por dentro (**Dd**), o montante a deduzir é calculado sobre o próprio produto líquido do desconto (C_{n-t}), pelo que corresponde à soma de todos os juros simples produzidos (à taxa de juro i) pelo capital C_{n-t} no prazo t :

$$C_n = C_{n-t} + D_d \Leftrightarrow C_n = C_{n-t}(1 + it) \Leftrightarrow \boxed{C_{n-t} = \frac{C_n}{1 + it}}$$

Desconto por fora

No caso do **desconto por fora** (**Df**), também denominado desconto comercial, o montante a deduzir é calculado sobre o valor nominal (C_n):

$$C_{n-t} = C_n - D_f \Leftrightarrow C_{n-t} = C_n - C_n \cdot i \cdot t \Leftrightarrow \boxed{C_{n-t} = C_n(1 - it)}$$

Existirão resultados absurdos se o valor actual obtido for negativo ou nulo, ou seja:

$$C_{n-t} \leq 0 \Leftrightarrow (1 - it) \leq 0 \Leftrightarrow it \geq 1$$

Assim, sempre que $t \geq \frac{1}{i}$ ou $i \geq \frac{1}{t}$ não faz sentido aplicar a modalidade do desconto por fora.

Exemplo:

Uma dívida de valor nominal igual a 100 u.m. vence-se daqui a 10 anos. Qual o seu valor actual, calculado com base numa taxa de desconto por fora de 10%/ano?

$C_0 = 100 \cdot (1 - 10 \times 0,1) = 0$!!! Neste caso concreto, como $t = 1/i$, o desconto por fora conduz a um resultado absurdo (valor actual nulo).

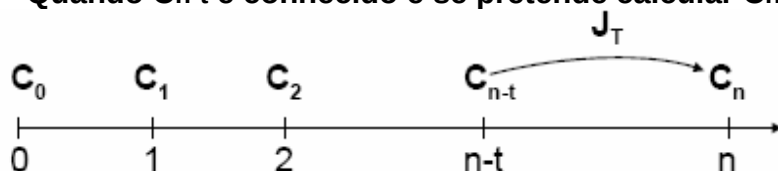
Se o prazo fosse superior a 10 anos e/ou a taxa de juro superior a 10%, o valor actual seria negativo!!!

Desconto em R J Composto

No caso do **desconto composto (Dc)**, pressupõe-se a existência de um processo de capitalização com produção de juros entre o momento actual (**n-t**) e o momento do vencimento do capital (**n**).

Esta perspectiva teórica do desconto consiste em efectuar a operação inversa da capitalização composta, pelo que o valor do desconto coincide com o do juro total composto.

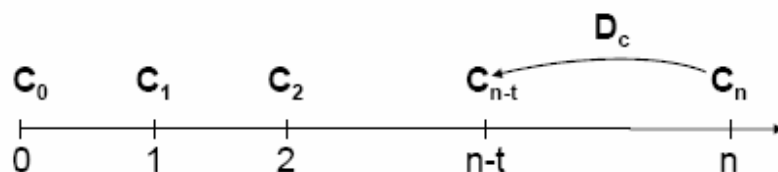
Quando C_{n-t} é conhecido e se pretende calcular C_n :



$$C_n = C_{n-t} (1+i)^t$$

$$J_{Total} = C_n - C_{n-t} \Leftrightarrow J_{Total} = C_{n-t} (1+i)^t - C_{n-t} \Leftrightarrow J_{Total} = C_{n-t} [(1+i)^t - 1]$$

Quando é dado C_n e se pretende calcular C_{n-t} :



$$C_{n-t} = C_n (1+i)^{-t}$$

$$D_c = C_n - C_{n-t} \Leftrightarrow D_c = C_n - C_n (1+i)^{-t} \Leftrightarrow D_c = C_n [1 - (1+i)^{-t}]$$

Custo efectivo do desconto

No caso do desconto por dentro (**Dd**):

$$d_{\text{effect. Dd}} = it$$

No caso do desconto por fora (**Df**):

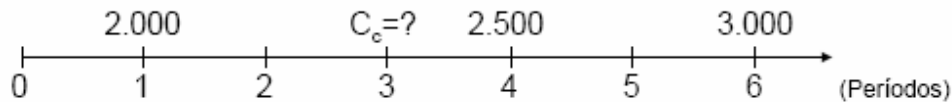
$$d_{\text{effect. Df}} = \frac{it}{1-it}$$

No caso do desconto composto (**Dc**):

$$d_{\text{effect. Dc}} = (1+i)^t - 1$$

Capital único

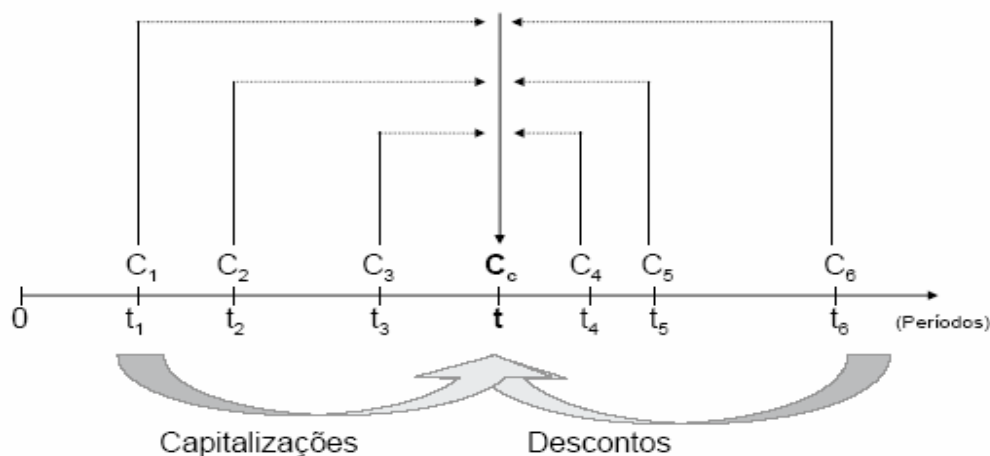
Vejam os o seguinte exemplo (considerando uma taxa de juro $i = 5\%$ cujo período de referência coincide com a unidade de tempo em que se exprimem os vencimentos dos capitais):



$$C_{c(3)} = 2.000(1 + 5\%)^2 + 2.500(1 + 5\%)^{-1} + 3.000(1 + 5\%)^{-3}$$

$$C_{c(3)} = 2.205 + 2.380,9524 + 2.591,5128$$

$$C_{c(3)} = 7.177,4652$$



Então, como se obtém o Capital Comum no momento t ?

$$C_k (1 + i)^{t - t_k} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$t - t_k > 0$, quando é necessário fazer capitalizações;

$t - t_k < 0$, quando há que fazer descontos;

$t - t_k = 0$, quando os dois momentos coincidem.

Somar os valores obtidos.

$$C_{c(t)} = \sum_{k=1}^m C_k (1 + i)^{t - t_k} \quad C_{c(t)} = \sum_{k=1}^m C_k (1 + i)^t (1 + i)^{-t_k}$$

$$C_{c(t)} = (1 + i)^t \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^m C_k (1 + i)^{-t_k}}_{\text{Somatório de todos os capitais no momento zero: } C_{c(0)}}$$

Somatório de todos os capitais
no momento zero: $C_{c(0)}$

Vencimento médio

O vencimento médio é um caso particular do vencimento comum. Consiste no momento de tempo (t) em que se deve vencer um capital comum igual à soma pura e simples dos vários capitais:

Assim, o vencimento médio (t) em **RJC** será calculado através da expressão seguinte:

$$\sum_{k=1}^m C_k = (1+i)^t \cdot \sum_{k=1}^m C_k (1+i)^{-t_k} \quad \Leftrightarrow \quad (1+i)^t = \frac{\sum_{k=1}^m C_k}{\sum_{k=1}^m C_k (1+i)^{-t_k}} \quad \Leftrightarrow \quad \log(1+i)^t = \log \left(\frac{\sum_{k=1}^m C_k}{\sum_{k=1}^m C_k (1+i)^{-t_k}} \right)$$

$$t \cdot \log(1+i) = \log \sum_{k=1}^m C_k - \log \sum_{k=1}^m C_k (1+i)^{-t_k}$$

$$t = \frac{\log \sum_{k=1}^m C_k - \log \sum_{k=1}^m C_k (1+i)^{-t_k}}{\log(1+i)}$$

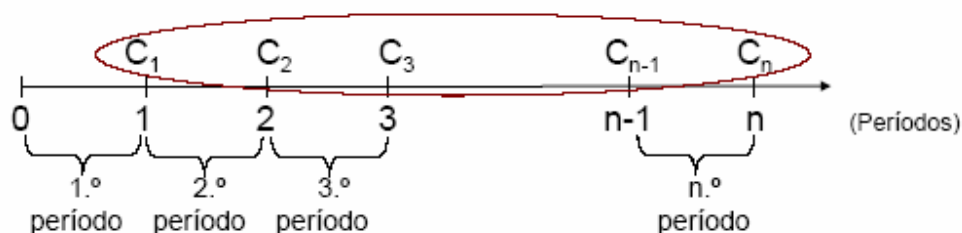
Rendas:

Conceito de renda:

Renda – Conjunto de capitais ($C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$) vencíveis em momentos **equidistantes** de tempo.

Termo da Renda – Cada um dos n capitais. A renda é o conjunto de todos esses termos.

Período da Renda – Intervalo de tempo (**constante**) que separa dois vencimentos consecutivos.



Exemplo 1:

O sr. **A** deve as importâncias de 220€, 250€ e 280€, a vencer respectivamente em 30/01/2006, 30/07/2006 e 30/01/2007. Será que este conjunto de capitais constitui uma renda?

Trata-se de uma renda porque os vencimentos dos termos são equidistantes (semestrais), nada afectando o facto de os termos serem variáveis.

Exemplo 2:

O sr. **B** deve 3 importâncias de 200€ cada, vencíveis respectivamente em 30/09/2006, 30/12/2006 e 30/12/2007. Será que este conjunto de capitais constitui uma renda?

Neste caso, **não se trata de uma renda**. Apesar de os capitais serem iguais, o seu vencimento não é equidistante.

Classificação das rendas

Quanto ao valor dos termos:

Rendas de termos constantes ($C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n = C$)

Rendas de termos variáveis:

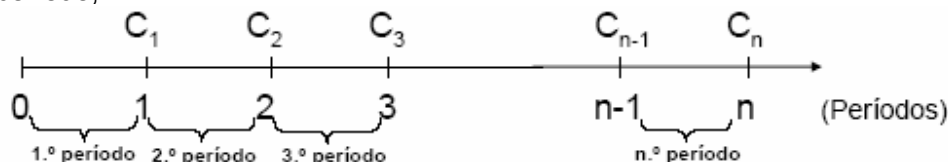
Termos quaisquer

Termos em progressão aritmética

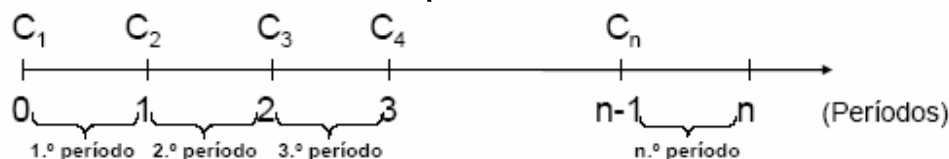
Termos em progressão geométrica

Quanto à localização do vencimento em cada período:

Rendas de **termos postecipados** / normais – cada termo **vence-se no fim** do respectivo período;

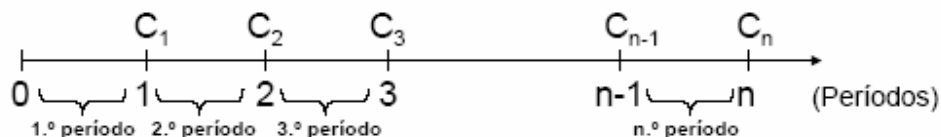


Renda de **termos antecipados** – cada termo **vence-se no início** do respectivo período.

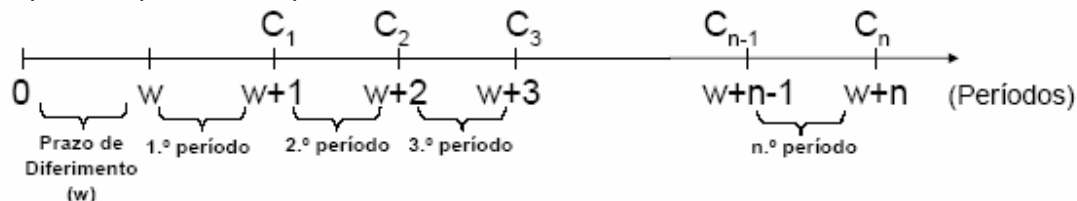


Quanto ao momento a que são referidos os valores actuais:

Rendas **imediatas** – o valor actual é referida a um momento que **coincide** com o início do 1.º período (**momento 0**);



Rendas **diferidas** – o valor actual (momento 0) refere-se a um momento anterior ao início do 1.º período (momento w).



Quanto ao objectivo de constituição da renda:

Rendas de amortização – visam liquidar uma dívida contraída no momento zero; o montante da dívida no momento zero constitui o seu **valor actual**.

Rendas de acumulação – destinam-se a acumular um determinado montante de capital num momento futuro; o total dos termos da renda, acrescido dos respectivos juros, designa-se por **valor acumulado**.

Rendas de remuneração – visam remunerar um capital investido.

Rendas temporárias

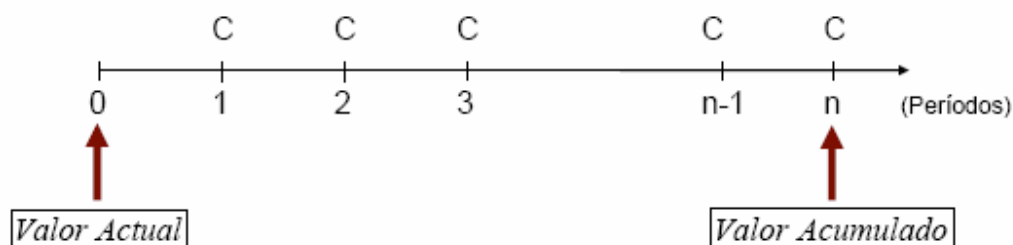
Rendas temporárias de termos constantes:

De uma maneira geral, o cálculo do valor de uma renda é feito para um de dois momentos de tempo:

Momento Inicial (momento 0) $\Rightarrow$ Valor Actual da renda

Momento Final, i.e., o fim do último período da renda (momento n ou $w+n$) $\Rightarrow$ Valor Acumulado da renda

Considerando o exemplo de uma renda de termos constantes, postecipada e imediata:

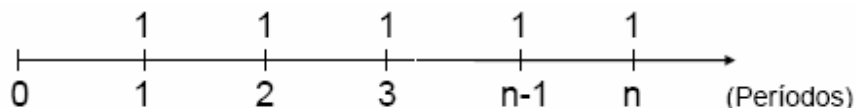


Rendas temporárias imediatas de termos constantes

– Valor Actual

Considere-se uma renda inteira, de termos unitários, postecipada e imediata:

Utilizou-se a unidade **1** para substituir o **C** capital para melhor de entender.



Qual será o **valor actual** (momento **0**) desta renda?

$$R(0) = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

Progressão geométrica de razão $(1+i)^{-1}$

$$R(0) = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

Multiplicando ambos os termos da expressão por $(1+i)$ obtém-se:

$$R(0) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$R(0) = a \left[\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right]$$

Valor actual de uma renda postecipada unitária imediata

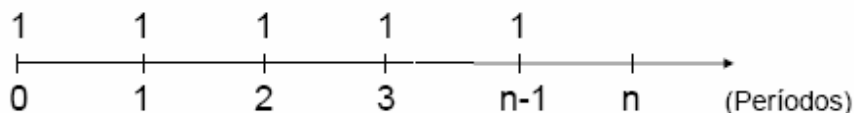
Para o caso mais geral de os termos não serem unitários, mas sim iguais a um determinado valor **C**, teríamos:

$$R(0) = C \cdot a \left[\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right]$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos constantes, postecipada e imediata

Considere-se, agora, uma renda inteira, de termos unitários, antecipada e imediata:



Qual será o **valor actual** (momento **0**) desta renda?

$$\ddot{R}(0) = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)}$$

$$\ddot{R}(0) = \underbrace{\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} \right]}_{R(0)} \cdot (1+i)$$

Assim:

$$\ddot{R}(0) = R(0) \cdot (1+i)$$



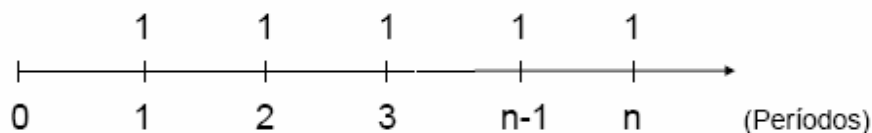
**O valor de uma renda antecipada é igual
ao valor de uma renda postecipada
capitalizada por um período.**

Para o caso mais geral de os termos não serem unitários, mas sim iguais a um determinado valor **C**, teríamos:

$$\ddot{R}(0) = C \cdot s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Rendas temporárias imediatas de termos constantes **– Valor Acumulado**

Considere-se uma renda inteira, de termos unitários, **postecipada e imediata**:



Qual será o **valor acumulado** (momento **n**) desta renda?

$$R(n) = \underbrace{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1}_{\text{Progressão geométrica de razão } (1+i)^{-1}}$$

$$R(n) = \frac{(1+i)^n - 1 \cdot (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

$$R(n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$



$$R(n) = s_{\overline{n}|i}$$

**Valor acumulado de uma
renda postecipada unitária
imediata**

Para o caso mais geral de os termos não serem unitários, mas sim iguais a um determinado valor **C**, teríamos:

$$R(n) = C \cdot s_{\overline{n}|i}$$



Fórmula de cálculo do valor acumulado de uma renda de termos constantes, postecipada e imediata

Caso a renda seja **antecipada e imediata**, o seu **valor acumulado** (momento **n**) obtém-se da seguinte forma:

$$\ddot{R}(n) = R(n) \cdot (1+i)$$

$$\ddot{R}(n) = C \cdot s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Qual a relação existente entre $a_{\overline{n}|i}$ e $s_{\overline{n}|i}$?

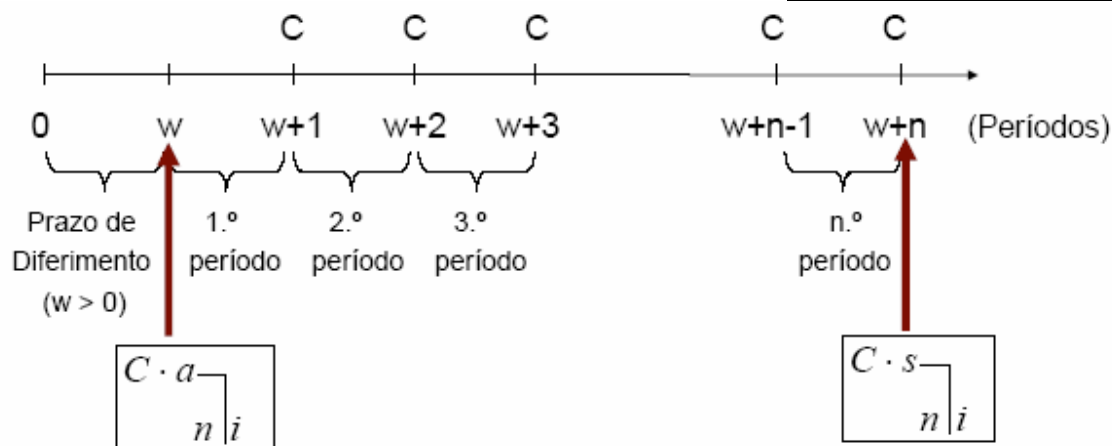
$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n$$



$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-n}$$

Rendas temporárias diferidas de termos constantes

Considere-se uma renda inteira, de termos constantes, **postecipada e diferida de w**:



Assim, para obter o **valor actual** (momento **0**) de uma renda inteira, **postecipada e diferida**, é necessário descontar o valor obtido no início do 1.º período para o momento actual:

$$R(0)_{dif=w} = (1+i)^{-w} \cdot C \cdot a_{\overline{n}|i}$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos constantes, postecipada e diferida de w

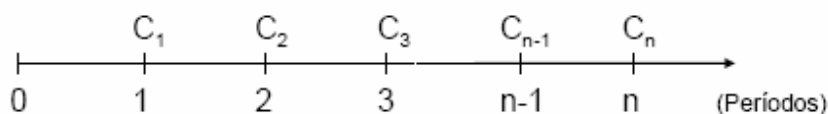
Se a renda for simultaneamente inteira, **antecipada e diferida**, então o seu **valor actual** será dado pela seguinte expressão:

$$\ddot{R}(0)_{\text{dif}=w} = (1+i)^{-w} \cdot C \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) \quad \rightarrow \quad \text{Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos constantes, antecipada e diferida de } w$$

Rendas temporárias de termos variáveis

– Termos quaisquer

Considere-se uma renda inteira, de **termos** variáveis **quaisquer**, **postecipada** e **imediata**:



Como calcular o **valor actual** (momento 0) ou o **valor acumulado** (momento n) desta renda?

$$R(0) = C_1(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + C_3(1+i)^{-3} + \dots + C_n(1+i)^{-n}$$

$$R(n) = C_1(1+i)^{n-1} + C_2(1+i)^{n-2} + C_3(1+i)^{n-3} + \dots + C_{n-1}(1+i) + C_n$$

Rendas temporárias de termos variáveis em progressão aritmética

Progressão aritmética – série de n valores (chamados **termos da progressão**: $C_1, C_2, \dots, C_n$) em que cada um deles, a partir do segundo (inclusive), é igual ao anterior adicionado algebricamente (i.e., somado ou subtraído) de um valor constante, diferente de zero (chamado **razão da progressão** (r_a)).

Quando os termos da renda variarem em progressão aritmética de razão r_a , teremos:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + r_a & C_3 &= C_2 + r_a = C_1 + 2r_a & C_4 &= C_3 + r_a = C_1 + 3r_a \\ &\dots & & & & \\ \dots & C_n &= C_{n-1} + r_a &= C_1 + (n-1)r_a \end{aligned}$$

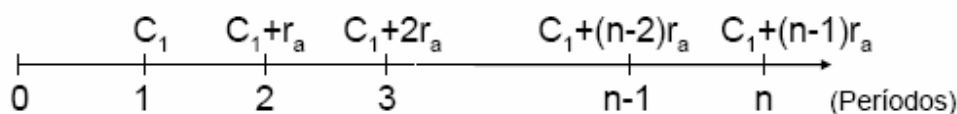
Assim, podemos expressar qualquer termo (C_k) em função do primeiro (C_1):

$$C_k = C_1 + (k-1)r_a$$

ou em função de qualquer outro (C_j):

$$C_k = C_j + (k-j)r_a \quad \rightarrow \quad \text{Termo geral de uma progressão aritmética}$$

Considere-se uma renda inteira, de termos variáveis em **progressão aritmética** de razão r_a , **postecipada** e **imediata**:



Qual será o **valor actual** (momento 0) desta renda?

$$R(0) = C_1(1+i)^{-1} + (C_1 + r_a) \cdot (1+i)^{-2} + (C_1 + 2r_a) \cdot (1+i)^{-3} + \dots + (C_1 + (n-1)r_a) \cdot (1+i)^{-n}$$

$$\mathbf{A} \left\{ \begin{aligned} R(0) &= C_1(1+i)^{-1} + C_1(1+i)^{-2} + r_a(1+i)^{-2} + C_1(1+i)^{-3} + 2r_a(1+i)^{-3} \\ &+ \dots + C_1(1+i)^{-n} + (n-1)r_a(1+i)^{-n} \end{aligned} \right.$$

Multiplicando ambos os membros por $(1+i)$ obtém-se:

$$R(0) \cdot (1+i) = C_1 + C_1(1+i)^{-1} + r_a(1+i)^{-1} + C_1(1+i)^{-2} + 2r_a(1+i)^{-2} + \dots + C_1(1+i)^{-n+1} + (n-1)r_a(1+i)^{-n+1}$$

De seguida, subtrai-se a cada um dos membros a expressão **A** e simplifica-se.

$$R(0) \cdot i = C_1 + r_a(1+i)^{-1} + r_a(1+i)^{-2} + \dots + r_a(1+i)^{-n+1} - C_1(1+i)^{-n} - n r_a(1+i)^{-n} + r_a(1+i)^{-n}$$

$$R(0) \cdot i = C_1 \left[1 - (1+i)^{-n} \right] + r_a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - n r_a(1+i)^{-n}$$

$$R(0) = \left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a \cdot (1+i)^{-n}}{i}$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos variáveis em progressão aritmética, postecipada e imediata.

Quanto ao **valor acumulado** (momento n):

$$R(n) = R(0) \cdot (1+i)^n$$

$$R(n) = \left[\left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a \cdot (1+i)^{-n}}{i} \right] \cdot (1+i)^n$$

$$R(n) = \left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a}{i}$$



Fórmula de cálculo do valor acumulado de uma renda de termos variáveis em progressão aritmética, postecipada e imediata.

Assim, caso as rendas sejam **diferidas**:

$$R(0)_{dif=w} = (1+i)^{-w} \cdot \left[\left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a \cdot (1+i)^{-n}}{i} \right]$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos variáveis em progressão aritmética, postecipada e diferida de w.

$$R(w+n)_{dif=w} = \left(C_1 + \frac{r_a}{i} \right) \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - \frac{n \cdot r_a}{i}$$



Fórmula de cálculo do valor acumulado de uma renda de termos variáveis em progressão aritmética, postecipada e diferida de w.

Caso as rendas sejam **antecipadas** (em vez de postecipadas), basta multiplicar as expressões anteriores por $(1+i)$.

Rendas temporárias de termos variáveis em progressão geométrica

Progressão geométrica – série de n valores (chamados **termos da progressão**: $C_1, C_2, \dots, C_n$) em que cada um deles, a partir do segundo (inclusive), é igual ao anterior multiplicado por um factor constante, diferente de zero (chamado **razão da progressão** (rg)).

Quando os termos da renda variarem em progressão geométrica de razão **rg**, teremos:

$$C_2 = C_1 \cdot r_g$$

$$C_3 = C_2 \cdot r_g = C_1 \cdot r_g^2$$

$$C_4 = C_3 \cdot r_g = C_1 \cdot r_g^3 \quad \dots \quad C_n = C_{n-1} \cdot r_g = C_1 \cdot r_g^{n-1}$$

Assim, podemos expressar qualquer termo (**Ck**) em função do primeiro (**C1**):

$$C_k = C_1 \cdot r_g^{k-1}$$

ou em função de qualquer outro (**Cj**):

$$C_k = C_j \cdot r_g^{k-j} \quad \rightarrow \quad \text{Termo geral de uma progressão geométrica}$$

Considere-se uma renda inteira, de termos variáveis em **progressão geométrica** de razão **rg**, **postecipada e imediata**:



Qual será o **valor actual** (momento **0**) desta renda?

$$R(0) = C_1(1+i)^{-1} + C_1 \cdot r_g \cdot (1+i)^{-2} + C_1 \cdot r_g^2 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C_1 \cdot r_g^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}$$

Colocando C1 em evidência:

$$R(0) = C_1 \left[(1+i)^{-1} + r_g \cdot (1+i)^{-2} + r_g^2 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + r_g^{n-1} \cdot (1+i)^{-n} \right]$$

Progressão geométrica de razão $r_g \cdot (1+i)^{-1}$

$$R(0) = C_1 \cdot \frac{(1+i)^{-1} - r_g^{n-1}(1+i)^{-n} \cdot r_g(1+i)^{-1}}{1 - r_g(1+i)^{-1}}$$

$$R(0) = C_1 \cdot \frac{(1+i)^{-1} \left[1 - r_g^n (1+i)^{-n} \right]}{\frac{1+i - r_g}{1+i}}$$

$$R(0) = C_1 \cdot \frac{1 - r_g^n (1+i)^{-n}}{1+i - r_g}$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos variáveis em progressão geométrica, postecipada e imediata.

Quanto ao **valor acumulado** (momento **n**):

$$R(n) = C_1 \cdot \frac{(1+i)^n - r_g^n}{1+i - r_g}$$



Fórmula de cálculo do valor acumulado de uma renda de termos variáveis em progressão geométrica, postecipada e imediata.

Assim, caso as rendas sejam **diferidas**:

$$R(0)_{dif=w} = (1+i)^{-w} \cdot C_1 \cdot \frac{1 - r_g^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-r_g}$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda de termos variáveis em progressão geométrica, postecipada e diferida de w.

$$R(w+n)_{dif=w} = C_1 \cdot \frac{(1+i)^n - r_g^n}{1+i-r_g}$$



Fórmula de cálculo do valor acumulado de uma renda de termos variáveis em progressão geométrica, postecipada e diferida de w.

Caso as rendas sejam **antecipadas** (em vez de **postecipadas**), basta multiplicar as expressões anteriores por $(1+i)$.

Rendas perpétuas de termos constantes

As rendas perpétuas possuem um número ilimitado de termos, pelo que $n \rightarrow +\infty$.

$$R(0)_{perp.} = C \cdot \frac{1}{i}$$



Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda perpétua de termos constantes, postecipada e imediata

Caso a renda seja **diferida**, teremos:

$$R(0)_{perp. dif=w} = (1+i)^{-w} \cdot C \cdot \frac{1}{i}$$



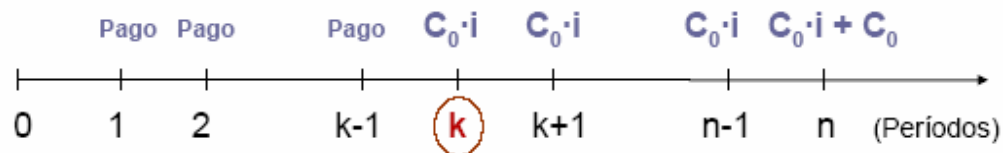
Fórmula de cálculo do valor actual de uma renda perpétua de termos constantes, postecipada e diferida de w

Se se tratar de uma renda **antecipada**, basta multiplicar a expressão anterior por $(1+i)$.

Amortização de Empréstimos

Amortização única com pagamento periódico de juro simples

Considerando uma taxa de avaliação i' e supondo que o devedor pretende amortizar toda a dívida juntamente com o pagamento do $k.^o$ juro, vem:

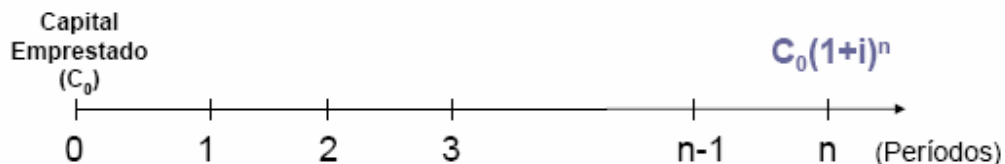


$$\text{Montante da Antecipação} = \underbrace{C_0 \cdot i}_{\text{Juro do período } k} + \underbrace{(C_0 \cdot i) \cdot a_{\overline{n-k}|i'}}_{\text{Valor Actual dos restantes } n-k \text{ juros}} + \underbrace{C_0 \cdot (1+i')^{-(n-k)}}_{\text{Valor Actual de } C_0}$$

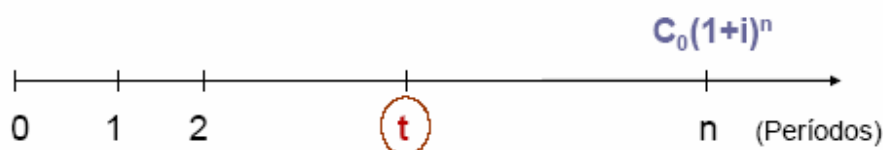
Amortização única com acumulação de juro composto

Neste sistema, como o mutuário não paga periodicamente os juros, no vencimento do empréstimo terá de entregar o montante do capital inicial mais os juros compostos.

Admitindo um empréstimo no montante de C_0 , feito por um prazo de n períodos e a uma taxa de juro efectiva i , teremos a seguinte representação no eixo do tempo:



Considerando uma taxa de avaliação i' e supondo que o devedor pretende amortizar toda a dívida no momento t , vem:



$$\text{Montante da Antecipação} = \underbrace{C_0 \cdot (1+i)^n}_{\text{Capital acumulado em } n} \cdot \underbrace{(1+i')^{-(n-t)}}_{\text{Actualizado para o momento } t}$$

Sistemas de amortização com reembolsos periódicos.

Na amortização de empréstimos, é muito frequente recorrer a um instrumento que permita visualizar a evolução do montante da dívida e de cada um destes 3 parâmetros (J_k , M_k e C_k): o quadro de amortização.

O Quadro de Amortização

Períodos	Capital em Dívida no Início do período (CDI_k)	Quota de Juro do período (J_k)	Quota de Capital do período (M_k)	Pagamento no fim do período (C_k)
1	CDI_1	$J_1 = CDI_1 \cdot i$	M_1	$C_1 = J_1 + M_1$
2	$CDI_2 = CDI_1 - M_1$	$J_2 = CDI_2 \cdot i$	M_2	$C_2 = J_2 + M_2$
3	$CDI_3 = CDI_2 - M_2$	$J_3 = CDI_3 \cdot i$	M_3	$C_3 = J_3 + M_3$
...	...	...	...	...
n	$CDI_n = CDI_{n-1} - M_{n-1}$	$J_n = CDI_n \cdot i$	M_n	$C_n = J_n + M_n$

$$CDI_n = M_n$$

$$\sum M_k = CDI_1$$

Sistema de amortização progressiva ou sistema francês

Neste sistema, o termo da renda de amortização / pagamento periódico (C) é constante pelo que, em termos esquemáticos, teremos:



O capital emprestado (CDI_1) corresponde ao valor actual de uma renda de amortização com n termos constantes iguais a C .

EVOLUÇÃO DAS QUOTAS DE CAPITAL

$$M_1 = C - J_1 = C - C_0 \cdot i$$

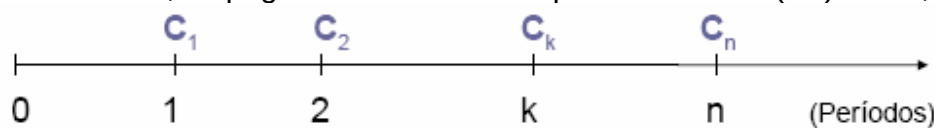
$$\begin{aligned} M_2 &= C - J_2 = C - (C_0 - M_1) \cdot i = \\ &= C - C_0 \cdot i + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= C - J_3 = C - (C_0 - M_1 - M_2) \cdot i = \\ &= C - C_0 \cdot i + M_1 \cdot i + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) \end{aligned}$$

$$\dots \quad M_k = M_{k-1}(1 + i) \quad \rightarrow \quad \text{As quotas de capital crescem exponencialmente, em progressão geométrica de razão } (1+i)$$

Sistema de amortização constante

Neste sistema é o **reembolso de capital (M)** que é **constante** pelo que, sendo **J_k** decrescente, os pagamentos a efectuar periodicamente (**C_k**) serão, também eles, decrescentes.



EVOLUÇÃO DOS PAGAMENTOS PERIÓDICOS

$$C_1 = M + J_1 = M + C_0 \cdot i$$

$$\begin{aligned} C_2 &= M + J_2 = M + (C_0 - M) \cdot i = \\ &= M + C_0 \cdot i - M \cdot i = C_1 - M \cdot i \end{aligned}$$

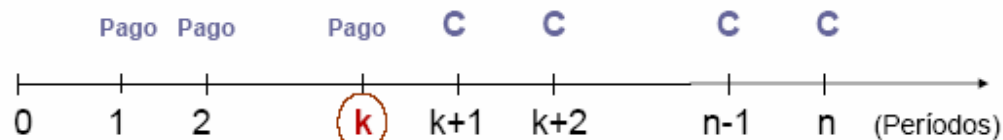
$$\begin{aligned} C_3 &= M + J_3 = M + (C_0 - M - M) \cdot i = \\ &= M + C_0 \cdot i - M \cdot i - M \cdot i = C_2 - M \cdot i \end{aligned}$$

$$\dots \quad C_k = C_{k-1} - M \cdot i \quad \rightarrow \quad \text{Os pagamentos diminuem linearmente, em progressão aritmética de razão } -M \cdot i$$

O problema da antecipação do reembolso

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO PROGRESSIVA / SISTEMA FRANCÊS

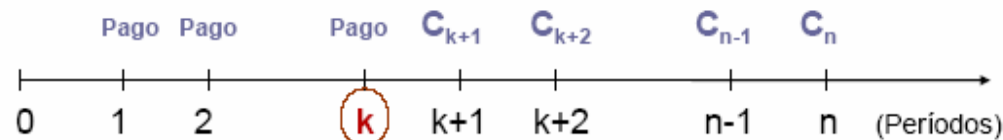
Considerando uma taxa de avaliação i' e admitindo que o devedor, logo após o pagamento do **k.º** termo, pretende antecipar o pagamento dos restantes **n-k** termos, temos:



$$\text{Montante da Antecipação} = C \cdot a_{\overline{n-k}|i'}$$

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE

Considerando uma taxa de avaliação i' e admitindo que o devedor, logo após o pagamento do **k.º** termo, pretende antecipar o pagamento dos restantes **n-k** termos, temos:



$$\text{Montante da Antecipação} = \left(C_{k+1} + \frac{i'_a}{i'} \right) \cdot \left(\frac{1 - (1 + i')^{-(n-k)}}{i'} \right) - \frac{(n-k) \cdot i'_a \cdot (1 + i')^{-(n-k)}}{i'}$$