

Probabilidades e Estatística

Exercícios

Folha nº 0: Cálculo Combinatório

Espaços amostrais e acontecimentos

Cálculo de probabilidades a partir de outras já conhecidas, aplicando teoremas

Cálculo de probabilidades por contagem de resultados favoráveis (equi-prováveis)

1º - No totobola existem 13 jogos com resultados possíveis "1", "X", "2".

a) Quantas apostas simples diferentes se podem fazer?

b) A quantas apostas simples equivale uma aposta múltipla com 2 duplas e 4 triplas?

c) Se essa aposta múltipla tiver 13 resultados certos, quantos "dozes" e "onzes" são também premiados?

2º - No totoloto existem 49 números.

a) Quantas apostas simples diferentes (6 números) se podem fazer? De quantas maneiras diferentes se pode acertar em cada um dos prémios?

b) A quantas apostas simples equivale uma aposta (múltipla) com 8 números? Se essa aposta tiver 7 acertos (6 + suplementar), quantas vezes tem de cada um dos prémios?

E se tiver 3 acertos?

3º - Com peças de 6 cores diferentes (como no mastermind), quantos códigos (sequências) de 4 peças se podem construir,

a) sem repetir cores?

b) podendo repetir cores?

4º - De quantas maneiras diferentes se podem seleccionar 12 de 17 pessoas, se 2 certas pessoas não poderem ser seleccionadas simultaneamente?

5º - Quantos inteiros entre 10000 e 100000 há formados apenas com os algarismos:

a) 6,7,8?

b) 0,6,7,8?

6º - Quantos códigos (sequências) diferentes se podem formar com as letras da palavra MASSADA?

7º - De quantas maneiras se podem arrumar 9 livros numa prateleira, 4 dos quais são pretos e 5 são vermelhos,

a) sem restrições;

b) de modo a que os livros pretos fiquem juntos;

c) de modo a que os livros pretos fiquem juntos e os vermelhos também;

d) de modo a que 2 certos livros nunca fiquem juntos.

8º - De quantas maneiras diferentes é possível sentar 10 pessoas em torno de uma mesa redonda? [Só interessa saber quem é vizinho de quem.]

9º - Determine o número de permutações dos inteiros 1 a 9, em que:

- a) pelo menos um se encontra na sua posição natural;
- b) nenhum se encontra na sua posição natural; [Use o resultado de a)]
- c) exactamente 3 se encontram na posição natural.

[Posições naturais 123456789]

10º - Se 10 (n) eleitores votarem em 3 (k) candidatos, quantos resultados eleitorais diferentes podem ocorrer? Generalize.

11º - De quantas maneiras diferentes se podem distribuir 10 (n) pessoas por 3 (k) tarefas, de modo a que haja pelo menos 1 pessoa para cada tarefa? Generalize ($n \geq k$).

12º - De quantas maneiras diferentes se pode partir um conjunto de n elementos em k ($k \leq n$) sub-conjuntos não vazios?

Exemplifique para $n = 4$ e $k = 2$.

[Sugestão: use o resultado de 11)]

13º - Quantas soluções inteiras e positivas tem a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 ?$$

Generalize para k parcelas positivas a totalizarem n ($n \geq k$).

[Sugestão: use 10]

14º - De quantas maneiras se podem distribuir 4 bolas pretas, 5 brancas e 8 azuis por 3 caixas diferentes? E se cada caixa tiver que ficar com pelo menos 1 bola branca e 2 azuis?

15º - De quantas maneiras diferentes se podem agrupar 6 homens e 10 mulheres,

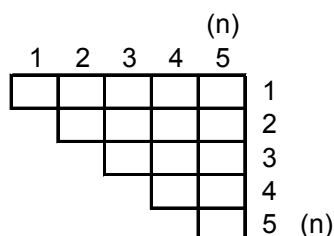
- a) em 6 pares homem – mulher (e 4 mulheres ficam de fora);
- b) em 8 pares de pessoas;
- c) em 6 grupos de 1 homem e uma ou mais mulheres (sem ficar nenhuma de fora)

16º - De quantas maneiras diferentes se podem distribuir n objectos por m caixas distintas ($m > n$),

- a) se os objectos forem distintos;
- b) se os objectos forem idênticos;
- c) idem, mas se em cada caixa só couber 1 objecto.

17º - a) De quantas maneiras diferentes se podem dispor k torres num tabuleiro de xadrez de dimensões $n \times n$ ($k \leq n$), sem que as mesmas se ataquem mutuamente? Exemplifique para $k = 8$ e $n = 8$.

b) De quantas maneiras se podem dispor torres (0 ou mais) no seguinte tabuleiro triangular, sem que as mesmas se ataquem mutuamente? Generalize para o caso de um triângulo de lado n.



18º - Descreva o espaço amostral (espaço de resultados) de cada uma das seguintes experiências aleatórias:

- Lançamento de 2 moedas.
- Lançamento de 1 moeda até sair "face".
- Lançamento de 2 dados de jogar.
- Verificação de peças que saem numa linha de produção, as quais são marcadas defeituosas (D) ou não defeituosas (N), até que 2 peças defeituosas consecutivas sejam encontradas ou 4 peças sejam inspeccionadas.
- Verificação uma a uma de um lote de N lâmpadas, das quais $r < N$ se sabem ter o filamento partido,
 - até encontrar a 1ª lâmpada defeituosa;
 - até encontrar todas as r lâmpadas defeituosas.
- Medição do tempo (t) de funcionamento consecutivo de uma lâmpada até avariar.
- Medição da frequência relativa do aparecimento de "face" em n lançamentos de uma moeda.
- Medição da velocidade (v) de uma molécula de gás contido num recipiente fechado.

Nos vários casos classifique o espaço amostral - discreto (finito ou infinito numerável) ou contínuo (infinito não numerável); no caso finito conte os resultados elementares e diga se são ou não igualmente prováveis (no sentido de terem a mesma frequência relativa esperada).

19º - Descreva os seguintes acontecimentos nos espaços amostrais em causa:

- em 18-a):
 - saída de pelo menos uma face;
 - saída de face na 1ª moeda;
- em 18-c) a soma dos pontos ser 6;
- no espaço amostral $S = \{(x, y) \in IN_0^2 : 0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 6\}$ descreva em extensão os acontecimentos $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 6\}$, $B = \{(x, y) : y \leq x^2\}$, $C = \{(x, y) : x \leq y^2\}$, $D = B \cap C$, $E = (B \cup A) \cap \bar{C}$.

20º - Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista A, 22.9% a revista B e 5.1% ambas as revistas.

Exprima em linguagem de conjuntos e determine a probabilidade de uma pessoa (ao acaso) dessa população:

- adquirir pelo menos uma das revistas;
- adquirir somente a revista A;
- não adquirir nem A nem B.

21º - Suponha que A, B e C sejam acontecimentos tais que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = \frac{1}{10}$ e $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Exprima em linguagem de conjuntos e calcule a probabilidade dos acontecimentos:

- ocorrer pelo menos um dos acontecimentos A, B e C;
- ocorrer exactamente um desses acontecimentos;

c) ocorrerem exactamente dois desses acontecimentos.

22º - Um economista sugere existirem as seguintes possibilidades acerca do seu negócio: 2 para 1, de melhorar; 4 para 1, de não permanecer na mesma; 6 para 1, de não piorar. Discuta a consistência destas possibilidades.

23º - Numa sala estão 18 pessoas distribuídas da seguinte maneira:

	homens (B)	mulheres ($\bar{B}$)
maiores de 21 anos (A)	5	6
menores de 21 anos ($\bar{A}$)	4	3

Sendo uma dessas pessoas escolhida ao acaso, definem-se os acontecimentos $A(\bar{A})$ - ser maior (menor) de 21 anos; $B(\bar{B})$ - ser homem (mulher).

Calcule:

- $P(A)$;
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$;
- $P(\bar{A} \cap B)$.

24º - Tiram-se ao acaso 6 bolas de uma urna contendo 49 bolas numeradas de 1 a 49.

- Descreva acontecimentos igualmente prováveis quando a extracção é:
 - sem reposição;
 - com reposição;
- Se a extracção for feita com reposição, qual é a probabilidade de nenhuma bola ser extraída mais do que uma vez.

25º - 150 alunos inscrevem-se ao acaso em 5 turmas. O que é mais provável: ficar uma turma com todos os alunos ou ficarem todas as turmas com o mesmo número de alunos?

26º - Calcule a probabilidade de ganhar cada um dos prémios e a probabilidade de ter prémio, ao jogar ao acaso (haverá outra maneira?) no totoloto (1 aposta simples). E se jogar em 8 números (numa aposta múltipla) qual é a probabilidade de ter prémio?

27º - Calcule a probabilidade, ao escrever os algarismos 1 a 9 por uma ordem ao acaso, nenhum ficar na sua posição natural.

28º - Distribuem-se ao acaso n objectos por m compartimentos distintos, e consideram-se os resultados equi-prováveis,

- distinguindo os objectos;
- não distinguindo os objectos;
- não distinguindo os objectos, e cabendo apenas 1 objecto por compartimentos.

Calcule em cada caso a probabilidade de os objectos ficarem em n compartimentos pré-seleccionados, um em cada compartimento. Exemplifique para 3 objectos em 5 compartimentos.