

Probabilidades e Estatística

Exercícios

Folha nº 3: Função de variável aleatória Valor esperado e variância Desigualdade de Chebyshev

1º - Considere a variável aleatória X , uniformemente distribuída sobre $[-1, 1]$. Obtenha a função densidade de probabilidade, $g(y)$, de $Y = 4 - X^2$.

2º - Um dado equilibrado é lançado 4 vezes. Defina-se a seguinte variável aleatória :

X – número de vezes que sai “6”

Calcule o valor esperado e a variância de X .

3º - Seja X uma variável aleatória contínua, com função densidade de probabilidade (fdp) $f(x) = 6x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$. Calcule o valor esperado e a variância de X .

4º - Num teste de cruces são apresentadas 4 respostas possíveis para cada pergunta, das quais apenas uma es tá correcta. O examinado pode seleccionar (com cruces) quaisquer dessas respostas (desde $\emptyset$ até 4), sujeitando-se à seguinte pontuação:

+ 3 pontos --- por cada cruz certa
– 1 pontos --- por cada cruz errada

Respostas					
	A	B	C	D	Pontos
Perguntas		O		×	–1
			O		$\emptyset$
	×	⊗	×	×	$\emptyset$
			⊗		3
	×	×		O	– 2
	O				$\emptyset$
	×		⊗		2
	...	...	...	...	...

- a) Seja X_n a pontuação obtida numa pergunta com n cruces marcadas ao acaso ($0 \leq n \leq 4$).
- i) Mostre que $E(X_n) = 0$, $\forall n$. Isto é, respondendo “à sorte” a pontuação é sempre 0.
 - ii) Calcule $V(X_n)$ ($n = 0, \dots, 4$)
- b) Seja S_n a pontuação obtida num teste de 34 perguntas (máximo de $34 \times 3 = 102$) quando se marcam n cruces marcadas ao acaso em cada pergunta ($0 \leq n \leq 4$).

i) Determine o valor esperado e o desvio padrão de S_1 , S_2 e S_3 .

ii) Usando a desigualdade de Chebyshev $\left(P[|X - \mu| \geq c\sigma] \leq \frac{1}{c^2}, c > 0 \right)$, estime limites superiores para a probabilidade de S_1 , S_2 e S_3 excederem 20 e 100 pontos.

Sugestão: Atendendo à simetria de S_n em torno de 0,

$$P[S \geq \delta] = \frac{1}{2} P[|S| \geq \delta].$$

c)

- i) Se souber que a resposta certa é uma de entre três, quantas cruces acha preferível marcar? Que pontuação espera ter nessa pergunta?
- ii) E se souber que a resposta certa é uma de entre duas?
- iii) Se conhecer a resposta certa em 10 perguntas, puder excluir 2 respostas em 7 perguntas, puder excluir 1 resposta noutras 7 e em relação às restantes 10 não souber nada, que pontuação pode esperar ter no teste, usando a melhor estratégia?

5°. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Se $Y = |X|$ determine a função densidade de probabilidade de Y $g(y)$.

6°. Considere uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = k(1 + \sin x) \quad x \in [-\pi; \pi]$$

- a) Calcule o valor de k .
- b) Calcule o valor médio e a variância da variável aleatória X .
- c) Se $Y = X^2 + 1$, determine a função densidade de probabilidade de Y .

7°. Seja X uma variável aleatória contínua uniformemente distribuída no intervalo $0 < X < 2$. Determine a função densidade de probabilidade $g(y)$, da variável aleatória Y definida pela expressão $Y = \tan(X/a)$, (onde $a \in]2, +\infty[$).

8°. Considere uma variável aleatória X que tem a seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(X = k) = \frac{c}{2^k} \quad k = 3, 4, 5, \dots \quad (c \in \mathbb{R})$$

- a) Calcule o valor da função de distribuição acumulada nos pontos 4, 8 e 12.
- b) Calcule $P(X \leq 6)$.
- c) Calcule $P(X \leq 6 | X > 4)$.
- d) Calcule $p_Y(y)$ para a variável aleatória Y definida da seguinte forma:

$$Y = \begin{cases} 1 & X \leq 4 \\ 7 & 4 < X \leq 6 \\ 50 & X > 6 \end{cases}$$