

Probabilidades e Estatística

Exercícios

Folha nº 4: Variáveis aleatórias bidimensionais Coeficiente de correlação

1º - Considere a experiência que consiste em lançar um dado duas vezes consecutivas. Sobre esta experiência são definidas duas variáveis aleatórias:

X – nº de vezes que sai “6”

Y – diferença de pontos entre os dois lançamentos

Determine a distribuição de probabilidades conjunta de X e Y $(p(x_i, y_i) \quad \forall_{i,j})$ e a partir desta as distribuições marginais de X e Y .

2º - Seja $f(x, y) = \begin{cases} kx(x-y) & 0 < x < 2 \wedge -x < y < x \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$ a função distribuição de

probabilidade de uma variável aleatória bidimensional.

a) Determine k ($k \in \mathbb{R}$).

b) Calcule as fdp marginais de X e de Y (fdp: função densidade de probabilidade)

3º - Considere a seguinte fdp: $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 2 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$.

Calcule:

a) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$

b) $P(Y > X)$

c) $P\left(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$

d) O factor de correlação ρ_{XY}

4º - Considere uma variável aleatória bidimensional (X,Y) uniformemente distribuída na região do plano definida por :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Considere também duas novas variáveis aleatórias W e Z definidas do seguinte modo:

$$\begin{cases} W = Y + 2 \cdot X \\ Z = 2 \cdot Y - X \end{cases}$$

- Calcule $P(Y < \sqrt{X})$.
- Obtenha a função de distribuição da variável aleatória Y.
- Determine a função densidade de probabilidade conjunta de Z e W, $f_{ZW}(z, w)$.

5º - Uma variável aleatória bidimensional (X,Y) tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{k}{2}, \text{ para } \begin{cases} 0 < x < 3 \\ 1 < y < 2 \end{cases}$$

- Calcule o valor de k ($k \in \mathfrak{R}$).
- Calcule $E(X | Y)$.
- Sendo $Z = e^{2x-y}$, calcule a função densidade de probabilidade de Z.