

# FEUP - LEEC - Probabilidades e Estatística

## Exercícios Resolvidos - Folha 1

### 1. Acontecimentos:

$A = \{\text{a peça é defeituosa}\}$

$B = \{\text{a peça é porosa}\}$

$$(a) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.021}{0.07} = 0.3 = 30\%$$

$$(b) P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.181}{0.202} = 0.896 = 89.6\%$$

$$(c) \text{Acontecimentos independentes} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{cases} \quad (\text{o que neste caso é falso})$$

### 2.

Definição dos acontecimentos:

$EP_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola tirada do saco esquerdo é } i\text{-ésima}\}$

$DP_i = \{\text{" " " " " " " " direito " "}\}$

$EB_i = \{\text{" " " " " " " " esquerdo e } i\text{-ésima}\}$

$DB_i = \{\text{" " " " " " " " direito e " "}\}$

$AB = \{\text{o saco A está do lado esquerdo (e o B do direito)}\}$

$BA = \{\text{" " B " " " " " " (" " A " " " )}\}$

$$a) P(AB|EP_1) = \frac{P(EP_1|AB)P(AB)}{P(EP_1|AB)P(AB) + P(EP_1|BA)P(BA)} = \frac{\frac{6}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{6}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{9} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

b) Simplificando a notação (usando  $P(EP)$  em vez de  $P(EP_2|EP_1)$ ) e usando a informação mais atualizada ( $EP_1$  aconteceu, logo o saco da esquerda tem mais uma bola preta):

$$i) P(EP) = P(EP|AB)P(AB) + P(EP|BA)P(BA) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{8} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$P(EP_2|EP_1) = P(EP_2|AB \cap EP_1)P(AB|EP_1) + P(EP_2|BA \cap EP_1)P(BA|EP_1)$$

↓  
de acordo a)  
 $P(AB|EP_1) = \frac{2}{3}$

$$ii) P(DP) = P(DP|AB)P(AB) + P(DP|BA)P(BA) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{6}{9} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$$

Logo, escolhia o saco da esquerda, novamente.

c) (com notação simplificada, isto é,  $P(EP) \Leftrightarrow P(EP_3 \setminus EP_1 \cap EP_2)$ )

$$P(EP) = P(EP \setminus AB) \cdot P(AB) + P(EP \setminus BA) \cdot P(BA)$$

Em n.p.s:  $P(AB \setminus EP_1 \cap EP_2)$   
 $P(BA \setminus EP_1 \cap EP_2)$

Da alínea b-i) já sei que  $\begin{cases} P(EP_2 \setminus AB \cap EP_1) & \text{pois de novo } P(AB \setminus EP_1 \cap EP_2) \\ P(EP_2 \setminus BA) \end{cases}$

Logo pelo Teorema de Bayes:

$$P(AB \setminus EP_1 \cap EP_2) = \frac{P(EP_2 \setminus AB \cap EP_1) P(AB \setminus EP_1)}{P(EP_2 \setminus EP_1)}$$

↳ Probabilidade total face aos acontecimentos AB e BA.

$$= \frac{\frac{5}{8} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

Então:

$$P(EP) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{7} \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{21}{42} \quad \leftarrow \text{março}$$

$$P(OP) = \frac{3}{9} \times \frac{5}{6} + \frac{6}{9} \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{21}{54}$$

Logo: continuava a escolher o lado da espreita.

3. Acontecimentos:

$R = \{\text{Planta é regada}\} \Leftrightarrow \bar{P} = \{\text{Porteira esquecer-se}\}$

$S = \{\text{Planta sobrevive}\}$

$$P(S|\bar{R}) = 0.10$$

$$P(S|R) = 0.50$$

$$P(\bar{S}|\bar{R}) = 0.90$$

$$P(\bar{S}|R) = 0.50$$

$$P(P) = P(\bar{R}) = 0.25$$

$$(a) P(P|\bar{S}) = P(\bar{R}|\bar{S}) = \frac{P(\bar{S}|\bar{R})P(\bar{R})}{P(\bar{S}|\bar{R})P(\bar{R}) + P(\bar{S}|R)P(R)} = \frac{0.90 \times 0.25}{0.90 \times 0.25 + 0.50 \times 0.75} = 37.25\%$$

(b) Admitindo que a planta é regada apenas quando o vizinho avisa a porteira, temos:

$$P(R) = P(\text{Vizinho avisar a porteira}) = 0.90$$

... (resolução semelhante à alínea anterior)

Alternativamente, seria necessário considerar que a planta seria regada quando a porteira ou o vizinho se lembram. Neste caso é necessário admitir que a porteira e o vizinho lembrarem-se são acontecimentos independentes.

...

4. Acontecimentos:

ES={Habilitações de nível superior}

FC={Frequenta concertos de música clássica}

OM={Ouve música clássica em casa}

$$P(FC|\overline{ES}) = 0.15$$

$$P(\overline{OM}|\overline{ES}) = 0.8$$

$$P(FC|ES) = 0.9$$

$$P(\overline{OM}|ES) = 0.25$$

$$P(\overline{ES}) = 0.75$$

$$P(FC|\overline{OM}) = 0.15 \text{ (independentemente do nível de habilitações)}$$

$$(a) P(\overline{ES}|\overline{FC}) = \frac{P(\overline{FC}|\overline{ES})P(\overline{ES})}{P(\overline{FC}|\overline{ES})P(\overline{ES}) + P(\overline{FC}|ES)P(ES)} = \frac{(1-0.15) \times (1-0.25)}{(1-0.15) \times (1-0.25) + (1-0.9) \times 0.25} = 96.22\%$$

$$(b) P(ES|(FC \cap \overline{OM})) = \frac{P((FC \cap \overline{OM})|ES)P(ES)}{P((FC \cap \overline{OM})|ES)P(ES) + P((FC \cap \overline{OM})|\overline{ES})P(\overline{ES})}$$

$$P((FC \cap \overline{OM})|\overline{ES}) = \frac{P(FC|\overline{OM} \cap \overline{ES})}{P(\overline{ES})} = \frac{P(FC|\overline{OM})P(\overline{ES})}{P(\overline{ES})} =$$

$$= P(FC|\overline{OM} \cap \overline{ES})P(\overline{OM}|\overline{ES}) = 0.15 \times 0.8 = 0.12$$

$$P((FC \cap \overline{OM})|ES) = P(FC|\overline{OM} \cap ES)P(\overline{OM}|ES) = 0.15 \times 0.25 = 0.0375$$

$$P(ES|(FC \cap \overline{OM})) = \frac{0.0375 \times 0.25}{0.0375 \times 0.25 + 0.12 \times 0.75} = 9.4\%$$

5. (a) Número total com defeito =  $0.1 \times 0.5 + 0.033 \times 0.5 = 0.0665 = 6.65\%$

(b) Acontecimentos: D={Peça com defeito} e E={Peça para mercado externo}

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0.033 \times 0.5}{0.0665} = 0.226$$

$$(c) P(\overline{E}|\overline{D}) = \frac{P(\overline{E} \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.50 \times 0.90}{0.935} = 0.481$$

(d) Distribuição Binomial: X - Número de peças defeituosas.

$$P(X = 1) = \binom{1}{1} P(D)P(\overline{D})^2 = 3 \times 0.0665 \times 0.935^2 = 0.174$$

6. Acontecimentos:

VN={Ter vida nocturna intensa}

R={Reprovar}

T={Frequentar as aulas teóricas}

$$(a) P(VN|R) = \frac{P(R|VN)P(VN)}{P(R|VN)P(VN) + P(R|\overline{VN})P(\overline{VN})} = \frac{0.9 \times 0.35}{0.9 \times 0.35 + 0.1 \times 0.65} = 0.83$$

$$(b) P(\overline{VN}|(\overline{R} \cap \overline{T})) = \frac{P(\overline{R} \cap \overline{T}|\overline{VN})P(\overline{VN})}{P(\overline{R} \cap \overline{T}|\overline{VN})P(\overline{VN}) + P(\overline{R} \cap \overline{T}|VN)P(VN)}$$

$$P(\overline{R} \cap \overline{T}|\overline{VN}) = P(\overline{R}|\overline{T} \cap \overline{VN})P(\overline{T}|\overline{VN}) = 0.1 \times 0.35 = 0.035$$

$$P(\overline{R} \cap \overline{T}|VN) = P(\overline{R}|\overline{T} \cap VN)P(\overline{T}|VN) = 0.1 \times 0.85 = 0.085$$

Então:

$$P(\overline{VN}|(\overline{R} \cap \overline{T})) = \frac{0.035 \times 0.65}{0.035 \times 0.65 + 0.085 \times 0.35} = 0.433$$