

FEUP - LEEC - Probabilidades e Estatística

Exercícios Resolvidos - Folha 2

1.

a) X tem uma distribuição binomial (uma experiência com 2 resultados possíveis e repetida n vezes).

$$p = \text{probabilidade de tirar uma defeituosa} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}, \quad k=0,1,2,3,4$$

b) Sem reposição $\Leftrightarrow$ escolhe 4 peças de uma vez

$P(X=k)$ = probabilidade de no conjunto de 4 peças que se escolhem, haver k defeituosas.

Nº de casos favoráveis = nº de conjuntos de 4 peças em que há k defeituosas =

$$= \binom{5}{k} \binom{20}{4-k}$$

$\swarrow$ $\searrow$
escolhem k de entre 5, escolhem $4-k$ de entre 20.

$$\text{Nº de casos totais} = \binom{25}{4}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{20}{4-k}}{\binom{25}{4}}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \text{ n. par}) &= P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + \dots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4} \rightarrow a_0}{1 - \frac{1}{4} \rightarrow r} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ progressão geométrica
em razão $\frac{1}{4}$ e
primeiro termo $\frac{1}{4}$

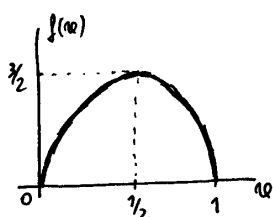
$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq 5) &= 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad P(X \text{ neu divisível por } 3) &= P(X=3) + P(X=6) + P(X=9) + P(X=12) + \dots = \\
 &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^k = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

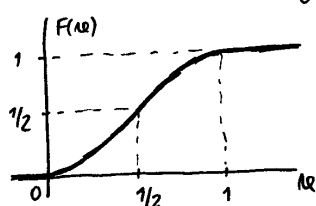
3.

$$a) \quad f(u) = 6u(1-u) > 0, \quad \forall u \in [0,1]$$

$$\int_0^1 6u(1-u) du = \int_0^1 6u - 6u^2 du = \left[6 \frac{u^2}{2} - 6 \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = 3 - 2 = 1$$



$$b) \quad F(u) = \int_{-\infty}^u 6u(1-u) du = \int_0^u 6u(1-u) du = 3u^2 - 2u^3, \quad u \in [0,1]$$



$$F(u) = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ 3u^2 - 2u^3 & , 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & , u > 1 \end{cases}$$

$$c) \quad P(X < b) = 2P(X > b) \Leftrightarrow \int_0^b f(u) du = 2 \int_b^1 f(u) du \Leftrightarrow 3b^2 - 2b^3 = 2(1 - 3b^2 + 2b^3)$$

$$\Leftrightarrow 6b^3 - 9b^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow b \approx 0.6130 \quad (\text{considerando o intervalo } [0,1])$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad P\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) &= \frac{P\left(X \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)}{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)} = \\
 &= \frac{F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)}{F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{27}}{3 \times \frac{4}{9} - 2 \times \frac{8}{27} - 3 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{27}} = 0.5
 \end{aligned}$$

$$4. \quad (a) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 (-x^2 + 1) dx + \int_0^1 \left(\left(\frac{5}{12} - k\right)x + k\right) dx = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$(b) P(-\frac{2}{3} < X < -\frac{1}{3} | X < 0) = \frac{P(-\frac{2}{3} < X < -\frac{1}{3} \cap X < 0)}{P(X < 0)} = \frac{P(-\frac{2}{3} < X < -\frac{1}{3})}{P(X < 0)} = \frac{\int_{-2/3}^{-1/3} (-x^2+1)dx}{\int_{-1}^0 (-x^2+1)dx} =$$

$$= \frac{2}{3}$$

5. Primeiro é necessário calcular o valor de c :

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{c}{2^k} = 1 \text{ progressão geométrica de razão } 1/2, \text{ logo } c = 4$$

$$(a) P(X \leq 4) = 4(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}) = \frac{3}{4}$$

$$P(X \leq 8) = 4(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}) = \frac{63}{64}$$

$$P(X \leq 12) = 4(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}}) = \frac{1023}{1024}$$

$$(b) P(X \leq 6 | X > 4) = \frac{P(X \leq 6 \cap X > 4)}{P(X > 4)} = \frac{P(X=5) + P(X=6)}{1 - P(X \leq 4)} = \frac{1/2^5 + 1/2^6}{1 - 3/4} = \frac{3}{16}$$

y	$p_y(y)$
1	3/4
7	$P(X=5) + P(X=6) = 4(1/2^5 + 1/2^6) = 0.1875$
50	$1 - P(X \leq 6) = 0.0625$

$$6. (a) \int_0^{3k} f(x)dx = 1 \iff \int_0^1 2x^2dx + \int_1^{3k} \frac{k}{1-3k}(x-3k)dx = 1 \iff k = \frac{2}{3}$$

$$(b) P(0 < X < 1 | X > 0.5) = \frac{P(0 < X < 1 \cap X > 0.5)}{P(X > 0.5)} = \frac{P(0.5 < X < 1)}{P(X > 0.5)} = \frac{\int_{0.5}^1 2x^2dx}{1 - \int_0^{0.5} 2x^2dx} = 0.63636$$

7. O baralho contém 13 cartas do naipe de copas.

$$(a) P(X = k) = \frac{\binom{13}{k} \binom{39}{5-k}}{\binom{52}{5}} \quad \text{com } k = 0, 1, \dots, 5$$

z	$f(z)$	$F(Z)$
0	0.221	0.221
1	0.411	0.632
2	0.274	0.906
3	0.082	0.988
4	0.011	0.999
5	0.001	1

$$(b) F(1)=0.632$$

$$F(2)=F(2)=0.906$$

$$F(4)=0.999$$

$$F(6)=1$$

$$(c) P(Z \geq 3) = 1 - F(2) = 1 - 0.906 = 0.094$$

(d) Esta alínea é idêntica à primeira, mas agora com 51 cartas no baralho das quais 12 são do naipe de copas.