

FEUP - LEEC - Probabilidades e Estatística

Exercícios Resolvidos - Folha 5

1. (a) X : número de peças boas

Y_i : número de tentativas até sair a i -ésima peça defeituosa

A probabilidade de retirar uma peça boa é: $p = 1 - 10\% = 0.9$

A probabilidade de retirar uma peça defeituosa é: $q = 1 - p = 0.1$

- i. Neste plano de inspeção a v.a. X segue uma distribuição binomial.

A expressão da distribuição de probabilidade de X é dada pela seguinte expressão:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Pelo que devemos calcular $P(X < 9)$, com $n = 10$:

$$P(X < 9) = 1 - P(X \geq 9) = 1 - [P(X = 9) + P(X = 10)] = 1 - 0.7361 = 0.2639$$

$$E(X) = np = 9.0$$

$$V(X) = np(1 - p) = 0.9$$

- ii. Neste plano de inspeção a v.a. Y_1 segue uma distribuição geométrica.

A expressão da distribuição de probabilidade de Y_1 é dada pela seguinte expressão:

$$P(Y_1 = k) = q^{k-1} p$$

Pelo que devemos calcular $P(Y_1 \leq 3)$:

$$P(Y_1 \leq 3) = P(Y_1 = 1) + P(Y_1 = 2) + P(Y_1 = 3) = 0.271$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{p} = 10.0$$

$$V(Y_1) = \frac{q}{p^2} = 90.0$$

- iii. Neste plano de inspeção a v.a. Y_2 segue uma distribuição de Pascal.

A expressão da distribuição de probabilidade de Y_2 é dada pela seguinte expressão:

$$P(Y_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

Pelo que devemos calcular $P(Y_2 \leq 7)$, com $r = 2$.

$$P(Y_2 \leq 7) = P(Y_2 = 2) + P(Y_2 = 3) + \dots + P(Y_2 = 7) = 0.2397$$

$$E(Y_2) = \frac{r}{p} = 20$$

$$V(Y_2) = \frac{rq}{p^2} = 180$$

- iv. Neste plano de inspeção a v.a. X segue uma distribuição hipergeométrica.

A expressão da distribuição de probabilidade de X é dada pela seguinte expressão:

$$P(X = k) = \frac{\binom{B}{k} \binom{N-B}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Pelo que devemos calcular $P(X < 9)$, com $n = 10$, $B = 18$ e $N = 20$.

$$P(X < 9) = 1 - P(X \geq 9) = 1 - [P(X = 9) + P(X = 10)] = 1 - 0.7632 = 0.2368$$

$$E(X) = np = 9.0$$

$$V(X) = np(1 - p) \frac{N-n}{N-1} = 9.0 * 0.1 * \frac{20-10}{20-1} = 0.47368$$

(b) Esta experiência segue uma distribuição multinomial, onde:

X_1 = nº de vezes que sai A_1 , com probabilidade p_1

X_2 = nº de vezes que sai A_2 , com probabilidade p_2

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

X_k = nº de vezes que sai A_k , com probabilidade p_k

A expressão da distribuição de probabilidade de X é dada pela seguinte expressão (com $\sum_{i=1}^k n_i = n$):

$$P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; \dots; X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

Neste caso temos então:

X_1 : nº de peças boas ($n_1 = 18$ e $p_1 = 0.9$)

X_2 : nº de peças reaproveitáveis ($n_2 = 1$ e $p_2 = 0.08$)

X_3 : nº de peças para sucata ($n_3 = 1$ e $p_3 = 0.02$)

$$P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; X_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} = 0.0913$$

2. X : nº de indivíduos que sofreram uma reacção nociva

X segue uma distribuição de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}, \quad \text{com } k = 0, 1, \dots, n, \dots$$

Nota: Na realidade, a v.a. X tem uma distribuição binomial, com $n = 2000$ e $p = 0.001$. No entanto, a distribuição binomial pode ser aproximada pela distribuição de Poisson quando:

$$\begin{cases} n \longrightarrow \infty \\ p \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \wedge \quad np = \text{const} = \alpha.$$

Neste caso, $\alpha = np = 2000 \times 0.001 = 2$

$$(a) P(X = 3) = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = \frac{4e^{-2}}{3} = 0.180$$

$$(b) P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

Com:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = \frac{1}{e^2}$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = \frac{2}{e^2}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = \frac{2}{e^2}$$

3. (a) Distribuição Hipergeométrica

X - nº de bolas brancas na amostra

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{40}{13}}{\binom{50}{16}} \simeq 0.293$$

(b) Distribuição Binomial

$$X : B(16, 0.2)$$

$$p = \text{probabilidade de tirar uma bola branca} = \frac{10}{50} = 0.2$$

$$P(X \leq 2) = \binom{16}{0} 0.2^0 0.8^{16} + \binom{16}{1} 0.2^1 0.8^{15} + \binom{16}{2} 0.2^2 0.8^{14} \simeq 0.352$$

(c) Distribuição Binomial

$$X_B : B(200, 0.2)$$

$$p = \text{probabilidade de tirar uma bola branca} = \frac{200}{1000} = 0.2$$

$$P(X_B \geq 30) = 1 - \left(\binom{200}{0} 0.2^0 0.8^{200} + \dots + \binom{200}{29} 0.2^{29} 0.8^{171} \right) = \dots$$

A expressão anterior ilustra as dificuldades de aplicação directa da expressão da Distribuição Binomial a problemas com um número de experiências elevado (200 neste caso). Mas como nestas situações a Distribuição Binomial converge para a Normal, podemos evitar a utilização da expressão anterior substituindo a Distribuição Binomial pela Normal (nota: ver Aula 6).

$$\mu = np = 200 \times 0.2 = 40$$

$$\sigma^2 = npq = 200 \times 0.2 \times 0.8 = 32$$

$$X_N : N(40, 32)$$

$$\begin{aligned} P(X_B \geq 30) &\overset{\text{correção de continuidade}}{\simeq} P(X_N \geq 29.5) = P(Z \geq \frac{29.5-40}{\sqrt{32}}) \\ &= P(Z \geq -1.86) = 1 - P(Z < -1.86) = 1 - 0.0314 = 0.9686 \end{aligned}$$

(d) Distribuição Hipergeométrica

$$X_H : H(200, 800, 200)$$

$$p = \text{probabilidade de tirar uma bola branca} = \frac{200}{1000} = 0.2$$

$$P(X_H \geq 30) = 1 - \left(\frac{\binom{200}{0} \binom{800}{200}}{\binom{1000}{200}} + \dots + \frac{\binom{200}{29} \binom{800}{171}}{\binom{1000}{200}} \right) = \dots$$

Tal como no caso da Binomial, a aplicação directa da expressão da Distribuição Hipergeométrica a problemas com um número de experiências elevado (200 neste caso). Mas como nestas situações a Distribuição Hipergeométrica converge para a Normal, podemos evitar a utilização da expressão anterior substituindo a Distribuição Hipergeométrica pela Normal (nota: ver Aula 6).

$$\mu = np = 200 \times 0.2 = 40$$

$$\sigma^2 = npq \frac{N-n}{N-1} = 200 \times 0.2 \times 0.8 \times \frac{1000-200}{1000-1} = 25.6$$

$$X_N : N(40, 25.6)$$

$$\begin{aligned} P(X_H \geq 30) &\overset{\text{correção de continuidade}}{\simeq} P(X_N \geq 29.5) = P(Z \geq \frac{29.5-40}{\sqrt{25.6}}) \\ &= P(Z \geq -0.41) = 1 - P(Z < -0.41) = 1 - 0.3409 = 0.659 \end{aligned}$$

4. (a) Distribuição de Poisson

X - nº de chamadas recebido de New York em meia hora

λ - nº médio de ocorrências no intervalo de tempo t

$\lambda_1 = 12$ chamadas/hora

$\lambda'_1 = 6$ chamadas/meia hora

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 7) = \frac{e^{-6} 6^7}{7!} \simeq 0.1377$$

(b) Distribuição de Poisson

X - nº de chamadas recebido em 15 minutos

λ_T - nº médio de ocorrências no intervalo de tempo t

$\lambda_T = 50$ chamadas/hora

$\lambda'_T = 12.5$ chamadas/15 minutos

$$P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \sum_{k=0}^{12} \frac{e^{-12.5} 12.5^k}{k!}$$

A partir das tabelas de probabilidade acumulada temos:

$$\lambda'_T = 12 \longrightarrow P(X \geq 13) = 0.424$$

$$\lambda'_T = 13 \longrightarrow P(X \geq 13) = 0.5369$$

$$P(X \geq 13) \simeq \frac{0.424+0.5369}{2} = 0.48$$

(c) Distribuição Multinomial

X_1 - nº de chamadas de New York $\longrightarrow p_1 = \frac{12}{50} = 0.24$

X_2 - nº de chamadas de Tóquio $\longrightarrow p_2 = \frac{18}{50} = 0.36$

X_3 - nº de chamadas de Londres $\longrightarrow p_3 = \frac{20}{50} = 0.40$

$$P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; X_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}, \text{ com } n = n_1 + n_2 + n_3$$

$$P(X_1 = 2; X_2 = 3; X_3 = 4) = \frac{9!}{2! 3! 4!} p_1^2 p_2^3 p_3^4 = 0.0867$$

5. (a) Distribuição de Poisson

X - nº de produtos procurados diariamente na loja A

$\lambda = 3$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 0.8008$$

(b) Ruptura de stock = procura ser superior ao stock existente (6)

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 0.0335$$

(c) X' - nº de clientes que ficam por satisfazer num dia

$$E(X') = 0 \times P(X \leq 6) + 1 \times P(X = 7) + 2 \times P(X = 8) + 3 \times P(X = 9) + \dots \simeq 0.05$$

(d) S' - novo stock a assegurar

$$P(X > S') \leq 0.004 \implies S' = 8$$

6. ...

7. ...

8. ...