

FEUP - LEEC - Probabilidades e Estatística

Exercícios Resolvidos - Folha 6

1. O peso de um estudante é na realidade um valor real, mas vamos admitir que o peso de cada estudante só foi registado considerando intervalos de $0.5Kg$. Isto implica que um valor para o peso de $75 Kg$ corresponde na realidade a um intervalo de pesos entre 74.75 e $75.25 Kg$ (correção de continuidade - nesta situação poderia optar-se por não fazer a correção de continuidade já que o número de estudantes é superior a 100).

Esta situação vai-nos obrigar a ter especial atenção às igualdades no cálculo de probabilidades; já que apesar de estarmos perante uma distribuição contínua (normal) a probabilidade de um aluno ter um peso de X não é nula, já que ao peso X corresponde na realidade um intervalo de pesos $([X - 0.25, X + 0.25])$.

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma), \quad \text{com} \quad \mu = 75.5Kg \quad \wedge \quad \sigma = 7.5Kg$$

(a) $P(60 \leq X \leq 77.5) \longrightarrow P(59.75 \leq X \leq 77.75)$

Transformando a distribuição $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ na distribuição normal reduzida $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$:

$$\begin{aligned} P(59.75 \leq X \leq 77.75) &= P\left(\frac{59.75-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{77.75-\mu}{\sigma}\right) = P(-2.10 \leq Z \leq 0.30) \\ &= P(Z \leq 0.30) - P(Z < -2.10) = 0.6179 - 0.0179 = 0.6000 \end{aligned}$$

Então, o número de estudantes cujos pesos estão entre 60 e $77.5 Kg$ é de:

$$500 \times P(60 \leq X \leq 77.5) = 500 \times 0.6000 = 300$$

(b) $P(X > 92.5) \longrightarrow P(X > 92.75)$

Transformando a distribuição $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ na distribuição normal reduzida $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$:

$$P(X > 92.75) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{92.75-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 2.30) = 1 - P(Z \leq 2.30) = 1 - 0.9893 = 0.0107$$

Então, o número de estudantes que pesam mais do que $92.5 Kg$ é de:

$$500 \times P(X > 92.5) = 500 \times 0.0107 = 5$$

2. Em primeiro lugar vamos calcular a função de distribuição acumulada de t :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^t ke^{-kx} dx = 1 - e^{-kt}$$

Note-se que: $P(T \geq t) = 1 - (1 - e^{-kt}) = e^{-kt}$

- (a) Para que nenhum avarie até t_0 horas, os três componentes têm de ter tempos de vida maiores do que t_0 . Como as probabilidades de cada componente são independentes entre si, a probabilidade de nenhum avariar até t_0 horas é o seguinte produto:

$$P(T_1 \geq t_0) \times P(T_2 \geq t_0) \times P(T_3 \geq t_0) = [P(T \geq t_0)]^3 = [e^{-kt_0}]^3 = e^{-3kt_0}$$

- (b) Em primeiro lugar vamos calcular a probabilidade de um componente avariar em cada um dos intervalos de tempo em questão:

$$P(T_1 \leq t_0) = F(t_0) = 1 - e^{-kt_0}$$

$$P(t_0 \leq T_2 \leq 2t_0) = F(2t_0) - F(t_0) = e^{-kt_0} - e^{-2kt_0}$$

$$P(T_3 \geq 2t_0) = 1 - F(2t_0) = e^{-2kt_0}$$

Se nós simplesmente multiplicarmos estas três probabilidades, obtemos a probabilidade de uma avariar até t_0 , outra avariar entre t_0 e $2t_0$ e a terceira avariar depois de $2t_0$, mas numa ordem específica. Temos também de considerar que os componentes podem avariar por $3! = 6$ ordens diferentes. Então a probabilidade que nós queremos calcular é:

$$\begin{aligned} & 6 \times P(T_1 \leq t_0) \times P(t_0 \leq T_2 \leq 2t_0) \times P(T_3 \geq 2t_0) \\ &= 6(1 - e^{-kt_0})(e^{-kt_0} - e^{-2kt_0})(e^{-2kt_0}) \\ &= 6e^{-3kt_0} - 12e^{-4kt_0} + 6e^{-5kt_0} \end{aligned}$$

3. ...

4. ...

5. ...