

FEUP - LEEC - Probabilidades e Estatística

Exercícios Resolvidos - Folha 7

1. Amostra aleatória: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Os elementos da amostra aleatória são v.a. independentes seguindo cada uma a mesma distribuição da população. Assim:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Como os elementos da amostra são v.a. independentes, a Função de Densidade de Probabilidade conjunta é simplesmente o produto das Funções de Densidade de probabilidade de cada v.a.:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \right]$$

2. • $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{38+30+\dots+24+30}{20} = 30.3Kg$

• $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = \frac{(38-30.3)^2 + \dots + (30-30.3)^2}{19} = 21.07Kg$
 $S \simeq 4.49Kg$

Nota: Considerando a amostra representativa da população podemos afirmar que:

$$\mu \simeq \bar{X} = 30.3Kg$$

$$\sigma \simeq S = 4.59Kg$$

3.

(a) $X \rightsquigarrow N(70h, 154^2min)$

$\bar{X}$ - média amostral

$$E(\bar{X}) = \mu = 70h$$

(b) $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (com reposição)

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1} \quad (\text{sem reposição, de uma população de dimensão } N)$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{154}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{2000-100}{2000-1}} \simeq 15min = 0.25h$$

(c) $\bar{X} \rightsquigarrow N(70, 0.25^2)$

$$\text{Para } n \text{ grande } (n > 30) \quad \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} \longrightarrow N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 70.3) &= 1 - P(\bar{X} \leq 70.3) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-70}{0.25} \leq \frac{70.3-70}{0.25}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151 \end{aligned}$$

Podemos esperar que a média seja superior a 70.3h em:

$$40 \times 0.1151 = 4.604 \simeq 5 \text{ amostras}$$

(d) $\bar{X} \sim N(70, 0.25^2)$

$$P(69.9 < \bar{X} < 70.2) = P\left(\frac{69.9-70}{0.25} < \frac{\bar{X}-70}{0.25} < \frac{70.2-70}{0.25}\right) = P(-0.4 < Z < 0.8) \\ = \Phi(0.8) - \Phi(-0.4) = 0.7881 - 0.3446 = 0.4435$$

(e)

Se $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ então $\frac{m-1}{\sigma^2} s^2 \rightarrow \chi^2_{m-1}$

$$P(s^2 > 7.88) = P\left(\frac{m-1}{\sigma^2} s^2 > 7.88 \frac{m-1}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2_{19} > 7.88 \times \frac{19}{6.5818}\right) =$$

$$= P(\chi^2_{19} > 22.718) = 1 - P(\chi^2_{19} \leq 22.718) = 1 - 0.75 = 0.25$$