

Exercício 7:

Num banco de ensaios de automóveis cada diagnóstico consiste em duas fases distintas de teste: uma primeira parte mecânica e outra parte eléctrica. Um ensaio completo é realizado apenas por um especialista. O tempo no primeiro teste segue uma distribuição exponencial negativa com média 10 minutos e o segundo tem uma duração que se pode considerar fixa e igual a 10 minutos.

Foi feita uma proposta que consiste em contratar um segundo especialista, o que permitiria alocar cada um ao seu teste específico. O tempo de espera dos utentes, que chegam aleatoriamente a uma taxa média de 2 por hora, foi valorizado em 5 €/hora (os clientes ficam à espera do resultado).

Se admitir que o equilíbrio já foi atingido, quais as propostas que acha aceitáveis para o custo horário de um segundo especialista?

Resolução:

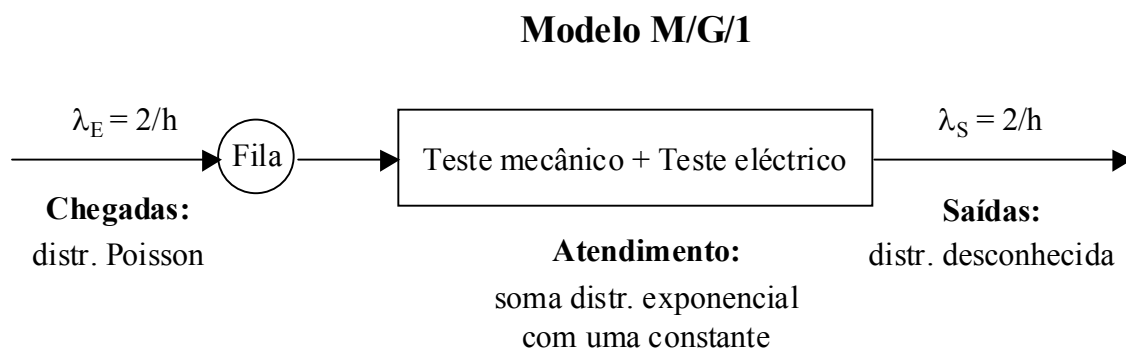
No modelo actual de funcionamento do sistema:

- Existe um único servidor que executa os dois ensaios (mecânico e eléctrico) de forma sequencial; há portanto uma única fila de espera dos automóveis.
- A chegada dos utentes ao sistema é aleatória – significa que segue uma distribuição de Poisson.
- A duração total dos testes (duração do serviço) é a soma de uma variável de distribuição exponencial (duração do teste mecânico) com uma constante (duração do teste eléctrico); esta variável soma não tem distribuição exponencial!
- Como o tempo de atendimento não tem distribuição exponencial, não é conhecida a distribuição dos clientes à saída do sistema¹, mas tal não é relevante para a resolução do problema. Uma vez que o sistema atinge o equilíbrio (como se prova adiante), a taxa de chegada dos clientes é idêntica à taxa de saída.

¹ Se o sistema fosse M/M/s, a distribuição dos clientes à saída, tal como à entrada, seguiria uma variável de Poisson.

Deste modo, o modelo que descreve o comportamento do sistema é o **M/G/1** (um servidor, chegadas poissonianas, atendimento com qualquer distribuição – distribuição generalizada).

Diagrama do sistema:



Definição de variáveis aleatórias:

T_1 – duração do teste mecânico

$T_1 \approx \text{Exp}(\alpha)$ α – parâmetro da distribuição

$$E(T_1) = \frac{1}{\alpha} = 10 \text{ min} \quad \text{logo} \quad \alpha = \frac{1}{10 \text{ min}} = 0.1 / \text{min}$$

$$\text{Var}(T_1) = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{0.1^2} = 100 \text{ min}^2$$

T_2 – duração do teste eléctrico

$T_2 = 10 \text{ min (constante)}$

T – duração dos dois testes

$T = T_1 + T_2 = T_1 + 10$

$$E(T) = E(T_1 + 10) = E(T_1) + 10 = 10 + 10 = 20 \text{ min}$$

$$\text{Var}(T) = \text{Var}(T_1 + 10) = \text{Var}(T_1) = 100 \text{ min}^2$$

Taxa de atendimento:

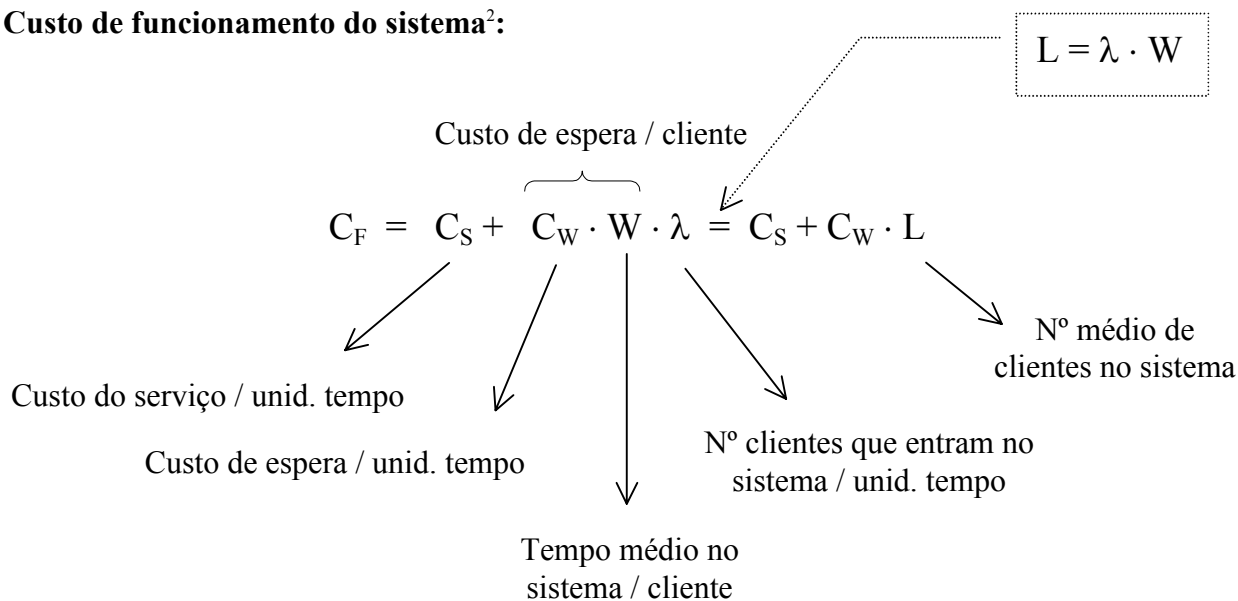
$$\mu = \frac{1}{E(T)} = \frac{1}{20 \text{ min}} = 0.05 / \text{min} = 3 / \text{h}$$

A taxa de chegada ao sistema é $\lambda = 2/\text{h}$, pelo que $\mu > \lambda$ e o sistema atinge o equilíbrio ao fim de um certo tempo.

A taxa de ocupação do servidor é:

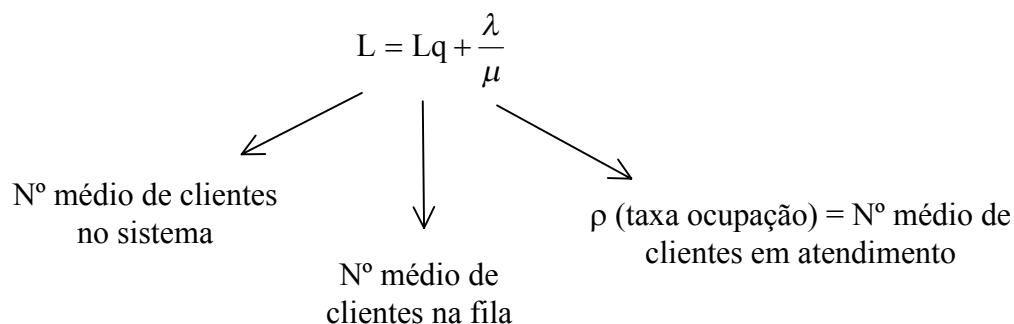
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0.6$$

Custo de funcionamento do sistema²:



Neste caso, para o cliente (proprietário do automóvel) todo o tempo de permanência no sistema é tempo de espera, independentemente do automóvel estar na fila de espera ou em teste, pelo que na fórmula surgem W e L , e não W_q e L_q .

Num sistema com um servidor e uma fila de espera:



² É sempre um custo por unidade de tempo de funcionamento do sistema.

sendo a expressão para L_q , no modelo M/G/1:

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

onde σ^2 é a variância do tempo de atendimento.

Efectuando os cálculos (e utilizando como unidade de tempo a hora):

$$\sigma^2 = \text{Var}(T) = 100 \text{min}^2 = (10 \text{min})^2 = \left(\frac{10}{60} \text{h}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} \text{h}\right)^2 = \frac{1}{36} \text{h}^2$$

$$L_q = \frac{2^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(\frac{2}{3}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{6} = 0.8(3)$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

O custo de funcionamento do sistema vem então:

$$C_F = C_S + C_W \cdot L = C_S + 5 \text{ € / h} \cdot 1.5 = C_S + 7,5 \text{ € / h}.$$

Para efeitos de comparação com a nova proposta, calcula-se também o tempo médio de permanência dos clientes na fila e no sistema:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{5}{2} \text{h} = \frac{5}{12} \text{h} = 25 \text{min}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 25 \text{min} + 20 \text{min} = 45 \text{min}$$

Tempo médio
no sistema

Tempo médio
na fila

Tempo médio de
atendimento

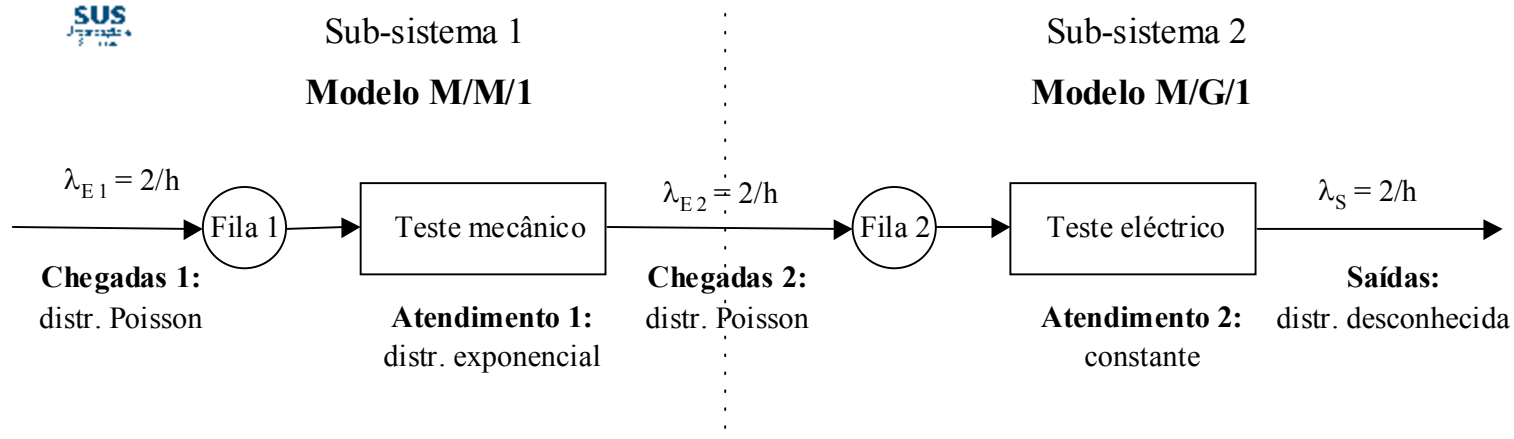
ou, alternativamente

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1.5}{2}h = 0.75h = 45 \text{ min}$$

No novo modelo de funcionamento do sistema:

- Existem dois servidores, alocados cada um ao seu teste específico.
- Os testes são executados sempre pela mesma ordem: o teste mecânico em primeiro lugar e em seguida o teste eléctrico.
- Os automóveis aguardam a execução de cada ensaio numa fila de espera; há portanto duas filas de espera no sistema.
- Pode dividir-se o sistema em dois sub-sistemas, contendo cada um um servidor e a fila de espera para o respectivo teste.
- No primeiro sub-sistema a chegada dos clientes (coincidente com a chegada ao sistema) segue uma distribuição de Poisson e o tempo de atendimento (duração do teste mecânico) segue uma distribuição exponencial; desta forma aplica-se ao comportamento deste sub-sistema o modelo **M/M/1**.
- Os sistemas M/M/s (dos quais M/M/1 é um caso particular) têm como propriedade que a saída dos clientes ocorre também segundo uma distribuição de Poisson.
- Desta forma, no segundo sub-sistema a chegada dos clientes (coincidente com a saída do primeiro sub-sistema) segue uma distribuição de Poisson e o tempo de atendimento (duração do teste eléctrico) é constante, pelo que se aplica o modelo **M/G/1**. A distribuição dos clientes à saída deste sub-sistema não é conhecida, mas tal não é relevante para o problema.

Diagrama do sistema:



Definição de variáveis aleatórias:

$\mathcal{W}$ – tempo de permanência de um cliente no sistema

$\mathcal{W}_1$ – tempo de permanência do cliente no sub-sistema 1

$\mathcal{W}_2$ – tempo de permanência do cliente no sub-sistema 2

O tempo de permanência de um cliente no sistema é igual à soma dos tempos de permanência em cada um dos sub-sistemas:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$$

pelo que o tempo médio de permanência no sistema é idêntico à soma dos tempos médios de permanência em cada sub-sistema:

$$E(\mathcal{W}) = E(\mathcal{W}_1) + E(\mathcal{W}_2) \Leftrightarrow W = W_1 + W_2$$

Por outro lado, definindo as variáveis aleatórias:

$\mathcal{L}$ – número de clientes no sistema, num dado instante

$\mathcal{L}_1$ – número de clientes no sub-sistema 1, nesse instante

$\mathcal{L}_2$ – número de clientes no sub-sistema 2, nesse instante

vem

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

e o número médio de clientes no sistema é idêntico à soma dos números médios de clientes em cada sub-sistema:

$$E(\mathcal{L}) = E(\mathcal{L}_1) + E(\mathcal{L}_2) \Leftrightarrow L = L_1 + L_2$$

Nota: também se pode obter a expressão para L a partir da de W (e vice-versa) aplicando a relação fundamental $L = \lambda \cdot W$.

Para calcular o custo de funcionamento do sistema é necessário calcular o valor de L ou de W em cada sub-sistema:

a) Sub-sistema 1:

$$\lambda_1 = 2/h$$

T_1 – var. aleatória duração do teste mecânico

$$T_1 \approx \text{Exp}(\alpha)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{E(T_1)} = \frac{1}{10 \text{ min}} = 0.1/\text{min} = 6/h$$

Taxa de ocupação:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Aplicando as fórmulas do modelo **M/M/1**:

$$L_{q1} = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1(\mu_1 - \lambda_1)} = \frac{2^2}{6(6 - 2)} = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{2}{6 - 2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

ou, alternativamente

$$L_1 = L_{q1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

b) Sub-sistema 2:

$$\lambda_2 = 2/h$$

T_2 – duração do teste eléctrico

$$T_2 = 10 \text{ min (constante)}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{10 \text{ min}} = 0.1/\text{min} = 6/h$$

Taxa de ocupação:

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Aplicando as fórmulas do modelo **M/G/1**:

$$\text{Var}(T_2) = \sigma_2^2 = 0$$

$$L_{q2} = \frac{\lambda_2^2 \sigma_2^2 + \rho_2^2}{2(1 - \rho_2)} = \frac{0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$L_2 = L_{q2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12} = 0.416$$

c) Sistema global:

$$L = L_1 + L_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12} = 0.916$$

O custo de funcionamento do sistema é agora:

$$C_F = C_S + C_{S'} + C_W \cdot L = C_S + C_{S'} + 5 \text{ €/h} \cdot 11/12 = C_S + C_{S'} + 4,58 \text{ €/h}.$$

$\swarrow$ custo 1º especialista /
 unid. tempo

 $\searrow$ custo 2º especialista /
 unid. tempo

As propostas aceitáveis para o custo horário de um segundo especialista são as que diminuem o custo do funcionamento do sistema face à situação actual, isto é, aquelas em que o acréscimo do custo do serviço é inferior ao decréscimo do custo de espera dos clientes:

$$C_{F_2} < C_{F_1}$$

$$C_S + C_{S'} + 4,58 < C_S + 7,5$$

$$C_{S'} < 2,92 \text{ €/h.}$$

O custo horário de um segundo especialista deverá portanto ser inferior a 2,92 €/h.

Para uma melhor caracterização deste sistema, calculam-se ainda os tempos médios de permanência nas filas, em cada sub-sistema e no sistema global:

a) Sub-sistema 1:

$$W_{q1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1(\mu_1 - \lambda_1)} = \frac{2}{6 \cdot (6 - 2)} h = \frac{1}{12} h = 5 \text{ min}$$

ou, alternativamente

$$W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{6}}{2} h = \frac{1}{12} h = 5 \text{ min}$$

$$W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{1}{(6 - 2)} h = \frac{1}{4} h = 15 \text{ min}$$

ou, alternativamente

$$W_1 = W_{q1} + \frac{1}{\mu_1} = 5 \text{ min} + 10 \text{ min} = 15 \text{ min}$$

b) Sub-sistema 2:

$$W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} = \frac{\frac{1}{12}}{2} h = \frac{1}{24} h = 2.5 \text{ min}$$

$$W_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{12}{2}h = \frac{5}{24}h = 12.5 \text{ min}$$

ou, alternativamente

$$W_2 = W_{q_2} + \frac{1}{\mu_2} = 2.5 \text{ min} + 10 \text{ min} = 12.5 \text{ min}.$$

c) Sistema global:

$$W = W_1 + W_2 = 15 + 12.5 = 27.5 \text{ min}$$

Na tabela que se segue faz-se a comparação dos tempos médios para os dois sistemas:

Situação actual		Nova proposta	
Tempo médio (min)		Tempo médio (min)	
Fila (W_q)	25	Fila 1 (W_{q_1})	5
		Fila 2 (W_{q_2})	2.5
		$W_{q_1} + W_{q_2}$	7.5
Serviço ($\frac{1}{\mu}$)	20	Serviço 1 ($\frac{1}{\mu_1}$)	10
		Serviço 2 ($\frac{1}{\mu_2}$)	10
		$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$	20
Sistema (W)	45	Sistema ($W = W_1 + W_2$)	27.5

A tabela mostra que a redução de cerca de 40% no tempo médio de permanência no sistema com a nova proposta é conseguida à custa da redução do tempo médio que os clientes passam nas filas de espera (redução de 70%). O tempo médio de atendimento, ou de serviço, mantém-se idêntico: 20 min no total.

Pode ainda verificar-se o efeito da aleatoriedade do tempo de serviço sobre o tamanho da fila de espera: nos sub-sistemas 1 e 2 as chegadas têm a mesma distribuição (Poisson com taxa de 2/h) e o tempo médio de serviço é idêntico (10 min). No entanto, o tempo médio dos clientes na fila 2 é metade do tempo médio na fila 1. Este facto deve-se a que o tempo de atendimento no segundo teste é constante enquanto no primeiro teste é aleatório, com distribuição exponencial.

A comparação dos dois sistemas com base no número médio de clientes conduziria a idênticas conclusões, já que existe proporcionalidade entre os tempos médios (nas filas, no atendimento, no sistema) e o respectivo número médio de clientes (sendo a constante de proporcionalidade λ).