

Formulação de problemas de Programação Linear

1. O director de recursos humanos de uma empresa de construção civil pretende planificar os recursos (operários) necessários para concluir uma obra que tem actualmente em curso. Esta requer 80000 homens-hora, pretendendo a empresa concluí-la num prazo máximo de três semestres.

Os contratos de pessoal têm a duração de um, dois ou três semestres consecutivos. Cada contrato tem um custo fixo para a empresa de 400 €, independentemente da sua duração (este custo inclui um seguro de acidentes de trabalho, entre outras parcelas) ao qual acresce o custo de cada homem-hora que varia ao longo do tempo, sendo de 6 €, 6.5 € e 7 € respectivamente para o primeiro, segundo e terceiro semestre de execução da obra.

Foi estabelecido que o número de operários por semestre na obra não deve ser inferior a 25 e que o número de contratos de três semestres não deve ultrapassar 15.

Considerando que cada operário tem um rendimento de 1050 homens-hora por semestre, construa um modelo de Programação Linear que permita ao director de recursos humanos da empresa decidir quantos operários deverão ser contratados, por tipo de contrato (sendo necessário especificar o semestre em que os contratos são iniciados, no caso dos contratos de um e dois semestres).

Nota: 1 homem-hora é a quantidade de trabalho realizada por 1 homem em 1 hora.

Exame de 5/7/2001 (adaptado)

Resolução:

Decisão a tomar no problema:

“... construa um modelo de Programação Linear que permita ao director de recursos humanos da empresa decidir **quantos operários deverão ser contratados, por tipo de contrato** (sendo necessário especificar o semestre em que os contratos são iniciados, no caso dos contratos de um e dois semestres)”, tendo em vista, naturalmente, a minimização dos custos.

Definição das variáveis de decisão:

1º	2º	3º
		
X_{11}	X_{12}	X_{13}
X_{21}		
		
	X_{22}	
		
	X_3	

X_{11} – número de contratos de 1 semestre, com início no 1º semestre

X_{12} – número de contratos de 1 semestre, com início no 2º semestre

X_{13} – número de contratos de 1 semestre, com início no 3º semestre

X_{21} – número de contratos de 2 semestres incluindo o 1º e 2º semestres

X_{22} – número de contratos de 2 semestres incluindo o 2º e 3º semestres

X_3 – número de contratos de 3 semestres

Nota: Poder-se-iam ter utilizado variáveis numeradas de X_1 a X_6 , mas a notação anterior tem a vantagem de ser auto-explicativa.

Restrições:

- Número total de homens-hora:

“...uma obra que tem actualmente em curso. Esta requer 80000 homens-hora...”

O número de homens-hora de cada contrato é obtido multiplicando o rendimento por semestre (1050 homens-hora) pelo número de semestres do contrato. No conjunto dos contratos tem-se:

$$1050 (X_{11} + X_{12} + X_{13} + 2 (X_{21} + X_{22}) + 3 X_3) \geq 80000 \quad \text{horas}$$

- Número mínimo de operários por semestre:

“...o número de operários por semestre na obra não deve ser inferior a 25...”

Contabilizando os contratos que cobrem cada semestre:

1º semestre:	$X_{11} + X_{21} + X_3 \geq 25$	}	operários
2º semestre:	$X_{12} + X_{21} + X_{22} + X_3 \geq 25$		
3º semestre:	$X_{13} + X_{22} + X_3 \geq 25$		

- Número máximo de contratos de 3 semestres:

“... o número de contratos de três semestres não deve ultrapassar 15”.

$$X_3 \leq 15 \quad \text{contratos}$$

– Não-negatividade:

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_3 \geq 0$$

ou

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_3 \in \mathbb{IN}_0$$

(de facto, trata-se de um problema de programação linear inteira pois só são admissíveis valores inteiros para as variáveis deste problema).

Função Objectivo:

Minimização do custo total dos contratos, sendo o custo de cada contrato igual à soma de duas parcelas: o custo fixo (400 € / contrato) e o custo variável, resultante da soma, para o número de semestres do contrato, do rendimento semestral multiplicado pelo custo do homem-hora no semestre.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 400 (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_3) & \left. \vphantom{400 (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_3)} \right\} & \text{Custo fixo} \\ & + 1050 [6X_{11} + 6.5X_{12} + 7X_{13} + (6+6.5) \cdot X_{21} + (6.5+7) \cdot X_{22} + + (6+6.5+7) \cdot X_3] & \left. \vphantom{+ 1050 [6X_{11} + 6.5X_{12} + 7X_{13} + (6+6.5) \cdot X_{21} + (6.5+7) \cdot X_{22} + + (6+6.5+7) \cdot X_3]} \right\} & \text{Custo} \\ & & & \text{variável} \end{aligned}$$

SU2.

Uma empresa petrolífera possui uma refinaria no Norte e duas unidades de produção de óleos lubrificantes, uma no Norte, junto à refinaria, e outra no Sul, que produzem três tipos de óleos lubrificantes, o Normal, o Super e o Hiper, cuja composição é a indicada no quadro seguinte:

Óleo Lubrificante	Composição (% de volume)			Rendimento (litros/hora)	
	Óleo Base	Aditivo A	Aditivo B	Unidade Norte	Unidade Sul
Normal	90%	10%		1800	2000
Super	80%	15%	5%	1600	1500
Hiper	60%	10%	30%	1400	1000

As duas unidades têm uma capacidade de produção de 2000 horas anuais cada uma, que se dividem pela produção dos três tipos de óleo lubrificante, com os rendimentos de produção representados no quadro anterior. Cada hora de produção da unidade Norte tem um encargo de 1000€, e na unidade Sul de 900€.

O óleo base é produzido na refinaria (junto à unidade Norte) com um custo de 2€/litro. O seu transporte para a unidade Sul acarreta um custo adicional de 0.2€/litro. A refinaria tem uma capacidade de produção de 6 milhões de litros de óleo base por ano. Quanto aos aditivos, são adquiridos a fornecedores e custam 15€/litro e 20€/litro respectivamente para os aditivos A e B.

Cada litro é vendido pela empresa a 6€/litro, 7€/litro e 10€/litro respectivamente para os óleos Normal, Super e Hiper, e que se admite que o mercado tem capacidade anual para absorver 3 milhões de litros de óleo Normal, 2,5 milhões de litros de óleo Super e 1,5 milhões de litros de óleo Hiper.

- Formule o problema em programação linear que maximize a **receita** das vendas.
- Qual a nova função objectivo caso se pretenda maximizar o **lucro** ?

Exame de 24/7/2001

Resolução:

Decisão a tomar no problema:

Não está explícita no enunciado a decisão a tomar neste problema. Na alínea a) refere-se apenas: “formule o problema em programação linear que maximize a receita das vendas”. Está, no entanto, implícito que se trata de um problema de programação ou planeamento da produção, em que é necessário decidir a **quantidade de cada um dos três óleos lubrificantes a produzir em cada uma das refinarias**, dados os recursos (limitados) existentes e a capacidade de absorção do mercado.

Definição das variáveis de decisão:

X_{NN} – quantidade de óleo Normal a produzir na unidade Norte	}	litros/ano
X_{SN} – quantidade de óleo Super a produzir na unidade Norte		
X_{HN} – quantidade de óleo Hiper a produzir na unidade Norte		
X_{NS} – quantidade de óleo Normal a produzir na unidade Sul		
X_{SS} – quantidade de óleo Super a produzir na unidade Sul		
X_{HS} – quantidade de óleo Hiper a produzir na unidade Sul		

Nota: Os índices das variáveis foram escolhidos de modo a facilitar a sua identificação, mas estas poderiam ter sido numeradas X_1 a X_6 .

Restrições:

– Capacidade de produção das refinarias:

“As duas unidades têm uma capacidade de produção de 2000 horas anuais cada uma, que se dividem pela produção dos três tipos de óleo lubrificante...”

Dividindo as variáveis de decisão (número de litros/ano a produzir) pelo rendimento de produção (em litros/hora) obtém-se o número de horas empregues anualmente na produção de cada óleo lubrificante. Globalmente tem-se:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Unidade Norte:} & \frac{X_{NN}}{1800} + \frac{X_{SN}}{1600} + \frac{X_{HN}}{1400} \leq 2000 \text{ horas} \\
 \text{Unidade Sul:} & \frac{X_{NS}}{2000} + \frac{X_{SS}}{1500} + \frac{X_{HS}}{1000} \leq 2000 \text{ horas}
 \end{array}$$

– Capacidade de produção de óleo base:

“O óleo base é produzido na refinaria (junto à unidade Norte)... A refinaria tem uma capacidade de produção de 6 milhões de litros de óleo base por ano.”

A quantidade de óleo base empregue na produção de cada um dos óleos lubrificantes é obtida multiplicando a quantidade de óleo lubrificante a produzir pela respectiva percentagem (em volume) de óleo base. Globalmente tem-se:

$$0.9(X_{NN} + X_{NS}) + 0.8(X_{SN} + X_{SS}) + 0.6(X_{HN} + X_{HS}) \leq 6 \cdot 10^6 \quad \text{litros/ano}$$

– Capacidade de absorção do mercado:

“...e que se admite que o mercado tem capacidade anual para absorver 3 milhões de litros de óleo Normal, 2,5 milhões de litros de óleo Super e 1,5 milhões de litros de óleo Hiper.”

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Óleo Normal:} & X_{NN} + X_{NS} \leq 3 \cdot 10^6 \\ \text{Óleo Super:} & X_{SN} + X_{SS} \leq 2.5 \cdot 10^6 \\ \text{Óleo Hiper:} & X_{HN} + X_{HS} \leq 1.5 \cdot 10^6 \end{array} \right\} \quad \text{litros/ano}$$

- Não-negatividade:

$$X_{NN}, X_{NS}, X_{SN}, X_{SS}, X_{HN}, X_{HS} \geq 0$$

Função Objectivo:

a) Maximização da **receita** obtida com a venda dos óleos lubrificantes:

$$\text{Max } R = 6(X_{NN} + X_{NS}) + 7(X_{SN} + X_{SS}) + 10(X_{HN} + X_{HS}) \quad \text{€ / ano}$$

b) Maximização do lucro:

$$\text{Maz L} = \text{Receita das vendas} - \text{Custo do óleo base} - \text{Custo de transporte do óleo base} \\ - \text{Custo aditivos} - \text{Custo horas produção} =$$

$$\begin{aligned} &= 6(X_{NN} + X_{NS}) + 7(X_{SN} + X_{SS}) + 10(X_{HN} + X_{HS}) && \left. \vphantom{6(X_{NN} + X_{NS}) + 7(X_{SN} + X_{SS}) + 10(X_{HN} + X_{HS})} \right\} \text{Receita das} \\ & && \text{vendas} \\ &- 2 \left[0.9(X_{NN} + X_{NS}) + 0.8(X_{SN} + X_{SS}) + 0.6(X_{HN} + X_{HS}) \right] && \left. \vphantom{2 \left[0.9(X_{NN} + X_{NS}) + 0.8(X_{SN} + X_{SS}) + 0.6(X_{HN} + X_{HS}) \right]} \right\} \text{Custo do} \\ & && \text{óleo base} \\ &- 0.2 \left[0.9(\cancel{X_{NN}} + X_{NS}) + 0.8(\cancel{X_{SN}} + X_{SS}) + 0.6(\cancel{X_{HN}} + X_{HS}) \right] && \left. \vphantom{0.2 \left[0.9(\cancel{X_{NN}} + X_{NS}) + 0.8(\cancel{X_{SN}} + X_{SS}) + 0.6(\cancel{X_{HN}} + X_{HS}) \right]} \right\} \text{Custo de transporte} \\ & && \text{do óleo base} \\ &- 15 \left[0.10(X_{NN} + X_{NS}) + 0.15(X_{SN} + X_{SS}) + 0.10(X_{HN} + X_{HS}) \right] && \left. \vphantom{15 \left[0.10(X_{NN} + X_{NS}) + 0.15(X_{SN} + X_{SS}) + 0.10(X_{HN} + X_{HS}) \right]} \right\} \text{Custo do} \\ & && \text{aditivo A} \\ &- 20 \left[0.05(X_{SN} + X_{SS}) + 0.30(X_{HN} + X_{HS}) \right] && \left. \vphantom{20 \left[0.05(X_{SN} + X_{SS}) + 0.30(X_{HN} + X_{HS}) \right]} \right\} \text{Custo do} \\ & && \text{aditivo B} \\ &- 1000 \left(\frac{X_{NN}}{1800} + \frac{X_{SN}}{1600} + \frac{X_{HN}}{1400} \right) - 900 \left(\frac{X_{NS}}{2000} + \frac{X_{SS}}{1500} + \frac{X_{HS}}{1000} \right) && \left. \vphantom{1000 \left(\frac{X_{NN}}{1800} + \frac{X_{SN}}{1600} + \frac{X_{HN}}{1400} \right) - 900 \left(\frac{X_{NS}}{2000} + \frac{X_{SS}}{1500} + \frac{X_{HS}}{1000} \right)} \right\} \text{Custo das horas de} \\ & && \text{produção (dos} \\ & && \text{óleos lubrificantes)} \end{aligned}$$

€/ ano

A "Consulimo - Consultores Imobiliários Lda" foi contratada para efectuar um estudo sobre a construção de um novo imóvel destinado a escritórios, com um total de 3 pisos, possuindo o r/chão uma área de 2000 m^2 e cada um dos dois pisos elevados uma área de 2350 m^2 , destinadas exclusivamente a escritórios.

Em causa está a determinação do número de fracções autónomas a criar no edifício dentro das tipologias já pré-definidas, e do número que cada uma destas possuirá no interior do mesmo. Estas fracções serão servidas por uma zona comum que não permite mais do que 25 portas nos pisos elevados e 10 portas ao nível do r/chão, considerando que cada fracção terá acesso apenas por uma porta.

As tipologias já pré-definidas possuem áreas de 40, 80, 150, 300 e 400 m^2 , sendo que o promotor pretende construir um mínimo de três e um máximo de vinte fracções de cada tipo.

No seu estudo a Consulimo determinou já os preços de venda para as diversas tipologias, variando este preço de acordo com o piso em que o escritório vier a estar implantado. Assim, para os escritórios colocados no r/chão os preços de venda são de 550, 530, 495, 480 e 460 contos/ m^2 respectivamente para as tipologias de 40, 80, 150, 300 e 400 m^2 , aumentando estes valores em 10% e 18% quando estes mesmos escritórios se situam no 1º e 2º andares.

Quanto à distribuição dos espaços, entende a Consulimo que é desejável que as diversas tipologias não apresentem globalmente áreas muito diferentes pelo que sugeriu ao Dono de Obra que as áreas afectas a cada tipologia nunca ultrapassem a relação 4:1 entre quaisquer duas tipologias.

Conhecedora das dificuldades que a esperam a Consulimo contratou-o a si, como especialista que é nestas questões da Investigação Operacional, para formular em programação matemática o problema acima exposto.

Exame de 6/7/1999

Resolução:

Decisão a tomar no problema:

“Em causa está a determinação do número de fracções autónomas a criar no edifício dentro das tipologias já pré-definidas” que, naturalmente, maximize a receita obtida com a venda das fracções.

Como há 3 pisos com diferentes características (área e/ou número máximo de portas e/ou preço de venda das fracções) é necessário ter em conta o piso pelo que a decisão a tomar é de facto o **número de fracções autónomas de cada tipologia a criar em cada piso do edifício.**

Definição das variáveis de decisão:

X_{ij} – número de fracções da tipologia i a construir no piso j

Definição de **índices**¹:

Tipologia das fracções: índice i $i = 1, 2, 3, 4, 5$

sendo:

- Tipologia 1 ($i=1$) – área de 40 m²
- Tipologia 2 ($i=2$) – área de 80 m²
- Tipologia 3 ($i=3$) – área de 150 m²
- Tipologia 4 ($i=4$) – área de 300 m²
- Tipologia 5 ($i=5$) – área de 400 m²

Piso: índice j $j = 1, 2, 3$

sendo:

- Piso 1 ($j=1$) – rés-do-chão
- Piso 2 ($j=2$) – 1º andar
- Piso 3 ($j=3$) – 2º andar

¹ Ver Nota no final da resolução.

Definição de constantes²:

A_i – área de cada fracção da tipologia i

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 40 \\ A_2 = 80 \\ A_3 = 150 \\ A_4 = 300 \\ A_5 = 400 \end{array} \right\} \text{ m}^2$$

P_i – preço de venda de cada fracção da
tipologia i no piso 1

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = 550 \\ P_2 = 530 \\ P_3 = 495 \\ P_4 = 480 \\ P_5 = 460 \end{array} \right\} \text{ contos/m}^2$$

Restrições:

– **Área total de cada piso:**

“...possuindo o r/chão uma área de 2000 m² e cada um dos dois pisos elevados uma área de 2350 m²...”

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^5 A_i \cdot X_{i1} \leq 2000 & \text{m}^2 \quad (\text{piso 1}) \\ \sum_{i=1}^5 A_i \cdot X_{ij} \leq 2350 & \text{m}^2 \quad j = 2,3 \quad (\text{pisos 2 e 3}) \end{array}$$

– **Número máximo de fracções em cada piso:**

“Estas fracções serão servidas por uma zona comum que não permite mais do que 25 portas nos pisos elevados e 10 portas ao nível do r/chão, considerando que cada fracção terá acesso apenas por uma porta.”

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^5 X_{i1} \leq 10 & \text{fracções} \quad (\text{piso 1}) \\ \sum_{i=1}^5 X_{ij} \leq 25 & \text{fracções} \quad j = 2,3 \quad (\text{pisos 2 e 3}) \end{array}$$

² Ver Nota no final da resolução.

– Número mínimo e máximo de fracções de cada tipologia:

“...o promotor pretende construir um mínimo de três e um máximo de vinte fracções de cada tipo.”

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} \geq 3 \quad \text{fracções} \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} \leq 20 \quad \text{fracções}$$

- Relação entre as áreas totais de quaisquer duas tipologias:

“...(a Consulimo) sugeriu ao Dono de Obra que as áreas afectas a cada tipologia nunca ultrapassem a relação 4:1 entre quaisquer duas tipologias.”

$$\frac{\sum_{j=1}^3 X_{ij}}{\sum_{j=1}^3 X_{i'j}} \leq 4 \quad i, i' = 1, \dots, 5 \quad i \neq i'$$

- Não-negatividade:

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \quad \text{e} \quad j = 1, 2, 3$$

ou

$$X_{ij} \geq \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{as variáveis neste problema são inteiras}).$$

Função Objectivo:

Maximização da receita obtida com a venda das fracções – corresponde à soma da receitas obtidas para cada tipologia i . A receita por tipologia é idêntica à soma do número de fracções em cada piso multiplicadas pela respectiva área A_i e preço de venda do m^2 , que é P_i no piso 1, $1.1P_i$ no piso 2 (aumento de 10%) e $1.18P_i$ no piso 3 (aumento de 18%). Pondo em evidência os factores comuns A_i e P_i resulta:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i=1}^5 P_i A_i (X_{i1} + 1.1X_{i2} + 1.18X_{i3})$$

Nota: O uso dos índices i, j e das constantes A_i e P_i permite escrever as restrições do modelo de forma compacta, fazendo-o com 8 expressões em vez de 51! Por exemplo, para as restrições que relacionam as áreas totais de quaisquer duas tipologias utilizou-se apenas uma expressão genérica, enquanto se se pretendesse explicitar todas as restrições deste tipo seria necessário escrever $5 \times 4 = 20$ restrições.