

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA Nº 19

Determinado problema de Programação Linear depois de formulado permitiu obter as seguintes expressões:

$$\text{Max } L = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\text{s.a. } R_1: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10$$

$$R_2: \quad 5x_1 + 1.25x_2 - 5x_4 \leq 20$$

$$R_3: \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 42$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ e } x_4 \geq 0$$

a) Determinação da solução óptima para o problema por aplicação do algoritmo SIMPLEX

Para a resolução deste problema através do algoritmo SIMPLEX, torna-se necessário escrever o problema na sua forma canónica, o que pressupõe transformar as inequações em igualdades adicionando variáveis de folga (f_i) aos primeiros membros das restrições. O problema fica

$$R_1: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + f_1 = 10$$

$$R_2: \quad 5x_1 + 1.25x_2 - 5x_4 + f_2 = 20$$

$$R_3: \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + f_3 = 42$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ e } x_4 \geq 0$$

$$f_1, f_2 \text{ e } f_3 \geq 0$$

No que se refere à função objectivo (FO), a transformação a operar deve colocar todas as variáveis no primeiro membro, deixando o segundo membro para as constantes. A função fica

$$-L + 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

Escreve-se agora o primeiro quadro do SIMPLEX onde as variáveis de folga assumem os valores dos segundos membros das restrições, deixando para as variáveis originais do problema o valor zero. Esta solução, designada solução básica inicial, define um vértice do espaço de soluções, a partir do qual o algoritmo SIMPLEX “parte” à procura da solução óptima (*Nota: a solução básica inicial assim determinada encontra um vértice do espaço de soluções na origem do referencial, vértice que se define naturalmente dado que as variáveis não podem assumir valores negativos. Caso a origem do referencial não pertença ao espaço de soluções torna-se necessário o recurso a variáveis artificiais*)

Para a solução expressa no quadro seguinte, as variáveis e a função objectivo assumem os seguintes valores:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

$$f_1 = 10, \quad f_2 = 20, \quad f_3 = 42 \quad L = 0$$

QUADRO 1									
		Variável Nula	Variável Nula	Variável Nula	Variável Nula	Variável Básica	Variável Básica	Variável Básica	Termo Independente
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	
R1	---	1	-1	2	1	1	0	0	10
R2	---	5	1,25	0	-5	0	1	0	20
R3	---	1	2	3	4	0	0	1	42
FO	-1	4	-2	2	-1	0	0	0	0

Verifica-se, no entanto, que a solução acima definida não é óptima. De facto, se **for aumentado o valor de x_1 ou de x_3 o valor da função aumenta**, passando a definir-se outra solução, melhor do que a anterior (*convém lembrar que a intenção é a obtenção de um máximo para o valor da função objectivo L , e que actualmente a função vale zero porque as variáveis x_i valem zero. Caso alguma das variáveis aumente o seu valor, a função também aumentará numa proporção que é definida pelo coeficiente que essa variável possui na função*).

Pretendendo-se um máximo para a função pode ser incrementada qualquer uma das duas variáveis atrás citadas. No entanto é geralmente aceite que, em caso de existência de mais do que uma variável nula capaz de produzir uma melhoria do valor da função, se incrementa (*i.e. se passa a variável básica*) aquela que permite à função o maior crescimento por cada unidade incrementada à variável. Seguindo este princípio será incrementada a variável x_1 .

Com a entrada desta nova variável para a base inicia-se um movimento sobre a fronteira do espaço das soluções, movimento que deverá terminar no vértice desse espaço adjacente ao vértice inicial. Isto consegue-se garantindo, do lado do SIMPLEX,

que uma das actuais variáveis básicas se anula, com a passagem de x_1 a variável básica.

Para a determinação da variável básica a anular tem de ser calculado o crescimento máximo permitido para a nova variável básica por cada uma das restrições (*o que se consegue dividindo o termo independente de cada restrição pelo coeficiente que esta variável possui nessa restrição, desde que esse coeficiente não seja negativo*). O menor crescimento assim determinado define a restrição onde ocorrerá a troca de variável.

QUADRO 1										
		Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável		Máximo valor permitido
		Nula	Nula	Nula	Nula	Básica	Básica	Básica	Termo	para o crescimento da
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente	nova variável básica
R1	---	1	-1	2	1	1	0	0	10	10
R2	---	5	1,25	0	-5	0	1	0	20	4
R3	---	1	2	3	4	0	0	1	42	42
FO	-1	4	-2	2	-1	0	0	0	0	



Resulta assim o novo quadro do SIMPLEX,

QUADRO 2										
		Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável		Máximo valor permitido
		Básica	Nula	Nula	Nula	Básica	Nula	Básica	Termo	para o crescimento da
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente	nova variável básica
R1	---	0	-1,25	2	2	1	-0,2	0	6	3
R2	---	1	0,25	0	-1	0	0,2	0	4	(infinito)
R3	---	0	1,75	3	5	0	-0,2	1	38	7,6
FO	-1	0	-3	2	3	0	-0,8	0	-16	



com os novos valores para as variáveis e função objectivo:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

$$f_1 = 6, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 38L = 16$$

Dado que a solução ainda não é óptima, efectua-se nova iteração passando x_3 a variável básica. Resulta assim o quadro final

QUADRO 3									
		Variável Básica	Variável Nula	Variável Nula	Variável Básica	Variável Nula	Variável Nula	Variável Básica	Termo
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente
R1	---	0	-0,625	1	1	0,5	-0,1	0	3
R2	---	1	-0,375	1	0	0,5	0,1	0	7
R3	---	0	4,875	-2	0	-2,5	0,3	1	23
FO	-1	0	-1,125	-1	0	-1,5	-0,5	0	-25

- b) Diga por que é que a solução é ótima, qual o valor das 4 variáveis de decisão e o valor da função objectivo.

Neste terceiro quadro verifica-se que a solução obtida é **ótima**, pois as actuais variáveis nulas apresentam coeficientes negativos na função objectivo (*o que, a serem incrementadas, provocaria uma diminuição no valor da função*). Assim, além de ótima, a solução é **única**.

Os valores positivos das variáveis básicas indicam ainda que a solução **não é degenerada**.

Os valores das variáveis de decisão e da função objectivo são:

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 3, \quad L = 25$$

- c) Existe alguma indefinição relativamente ao valor do coeficiente de X_3 na função objectivo. Qual o valor máximo que pode ter este coeficiente para que a solução encontrada continue a ser ótima?

Uma alteração Δ no coeficiente de uma variável na função objectivo resulta integralmente no último quadro do SIMPLEX.

Se atendermos ao facto de X_3 ser uma variável nula, então a solução ótima mantém-se desde que o seu coeficiente na linha da função objectivo seja não positivo. Assim

$$-1 + \Delta \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Coef. máximo} = 2 + 1 = 3$$

- d) Verificou-se à posteriori que o valor do coeficiente de X_1 na função objectivo era 2.5 em vez de 4 como inicialmente se tinha admitido. A solução continua a ser ótima? Em caso de resposta negativa, diga entre que valores pode variar o valor desse coeficiente para que a solução ótima se mantenha e quais os correspondentes valores da função objectivo.

Com esta alteração, o último quadro (*quadro 3*) do SIMPLEX ficaria:

QUADRO 3									
		Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	
		Básica	Nula	Nula	Básica	Nula	Nula	Básica	Termo
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente
R1	---	0	-0,625	1	1	0,5	-0,1	0	3
R2	---	1	-0,375	1	0	0,5	0,1	0	7
R3	---	0	4,875	-2	0	-2,5	0,3	1	23
FO	-1	-1,5	-1,125	-1	0	-1,5	-0,5	0	-25

Dado que X_1 é variável básica o seu coeficiente deverá ser nulo na linha da função objectivo. Corrigindo esta linha o quadro fica:

QUADRO 4									
		Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	
		Básica	Nula	Nula	Básica	Nula	Nula	Básica	Termo
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente
R1	---	0	-0,625	1	1	0,5	-0,1	0	3
R2	---	1	-0,375	1	0	0,5	0,1	0	7
R3	---	0	4,875	-2	0	-2,5	0,3	1	23
FO	-1	0	-1,688	0,5	0	-0,75	-0,35	0	-14,5



Existindo um coeficiente positivo para X_3 a solução anteriormente obtida deixa de ser óptima.

Para a determinação do intervalo de variação do coeficiente de X_1 que mantém a anterior solução como óptima deixamos em aberto, no quadro inicial, o coeficiente desta variável na função objectivo (C_1). Deste modo resultaria o último quadro do SIMPLEX (*quadro 3*):

QUADRO 3									
		Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	
		Básica	Nula	Nula	Básica	Nula	Nula	Básica	Termo
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente
R1	---	0	-0,625	1	1	0,5	-0,1	0	3
R2	---	1	-0,375	1	0	0,5	0,1	0	7
R3	---	0	4,875	-2	0	-2,5	0,3	1	23
FO	-1	$C_1 - 4$	-1,125	-1	0	-1,5	-0,5	0	-25

Sendo X_1 variável básica o seu coeficiente deverá ser nulo na linha da função objectivo. Corrigindo esta linha o quadro fica:

QUADRO 5									
		Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	Variável	
		Básica	Nula	Nula	Básica	Nula	Nula	Básica	Termo
	L	X1	X2	X3	X4	f1	f2	f3	Independente
R1	---	0	-0,625	1	1	0,5	-0,1	0	3
R2	---	1	-0,375	1	0	0,5	0,1	0	7
R3	---	0	4,875	-2	0	-2,5	0,3	1	23
FO	-1	0	$0,375C_1 - 2,625$	$3 - C_1$	0	$-0,5C_1 + 0,5$	$-0,1C_1 - 0,1$	0	-25

Para que a solução se mantenha ótima teremos que garantir que na linha da função objectivo não existem coeficientes positivos. Deste modo, os valores de C_1 admissíveis para que a solução se mantenha ótima estarão no intervalo $[3;7]$.

- e) Admitindo que se considera o valor da função objectivo muito baixo e que se sabe que cada unidade adicional do recurso 1 tem um custo de 1 pilim, do recurso 2 custa 0.5 pilins e do recurso 3 se gasta 0.1 pilins, diga:

- e.1) Qual o recurso que seria mais profícuo incrementar?

Atendendo aos preços sombra dos recursos seria preferível incrementar o recurso 1 (recurso associado à restrição 1).

Notas:

- O preço sombra de um recurso representa o acréscimo que a função objectivo sofre quando se aumenta em uma unidade a disponibilidade desse recurso.
- O preço sombra de um recurso é dado pelo simétrico do coeficiente que a variável de folga associada a esse recurso apresenta na linha da função objectivo do quadro que representa a solução ótima do problema (1.5, 0.5 e 0 para os recursos 1, 2 e 3 respectivamente).
- Aos preços sombra devem ser deduzidos os custos dessas unidades adicionais do recurso, para se apurar do interesse em aumentar a sua quantidade disponível (o que revela que o recurso 1 é o único que interessa incrementar)

- e.2) Mantendo-se esta solução ótima e incrementando o recurso definido na alínea anterior, até quanto podia aumentar o valor da função objectivo?

Com este incremento da quantidade de recurso 1 disponível vai alterar-se o termo independente da restrição R_1 . Esta alteração na formulação tem como consequência uma alteração do espaço de soluções possíveis que pode levar o vértice que actualmente define a solução ótima (vértice correspondente à

intersecção das actuais restrições activas do problema e que define no SIMPLEX o actual conjunto de variáveis básicas) a ficar fora deste espaço, deixando a solução de ser possível.

O conjunto de restrições activas que define a actual solução óptima do problema é constituído pelas seguintes restrições:

$$R_1: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 10$$

$$R_2: \quad 5x_1 + 1.25x_2 - 5x_4 = 20$$

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

Deixando em aberto a quantidade de recurso 1 disponível (*definida pelo termo independente da 1ª restrição*) o sistema de equações anterior toma o aspecto (*onde **b** designa essa quantidade*):

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = b$$

$$5x_1 + 1.25x_2 - 5x_4 = 20$$

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

Da resolução deste sistema resultam os seguintes valores para as variáveis:

$$x_1 = (2 + 0,5 \, b), x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = (-2 + 0,5 \, b)$$

Para que a solução se mantenha possível, e em consequência se mantenha óptima, todas as restrições do problema deverão constituir condições verdadeiras. Substitui-se nelas o valor das variáveis aqui obtidos e determinam-se os limites de **b** por forma a que todas as restrições se verifiquem.

Desta substituição conclui-se que **b** deve estar compreendido no intervalo [4;19,2].

Em conclusão, seria vantajoso incrementar a quantidade disponível de recurso 1 de 10 até 19,2 unidades, com um aumento correspondente do valor da função objectivo de 13,8 unidades (*valor obtido a partir da multiplicação do acréscimo de recurso 1 – 9,2 unidades – pelo seu preço sombra*).