

1. Programação Linear:

1.Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}\min Z &= x_1 - 3x_2 - x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a.: } x_1 - x_4 + x_5 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ 5x_1 + x_3 - 2x_4 &= 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

- a) Verifique que as colunas associadas às variáveis x_1, x_2 e x_3 constituem uma base do sistema de restrições e classifique a correspondente solução básica quanto à admissibilidade.
- b) Justifique que a solução encontrada em a) é a solução ótima.

2.Considere o seguinte problema, formulado em p.l. como:

$$\begin{aligned}\min Z &= 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a.: } x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

- a) Escreva-o na sua forma canónica e determine a solução básica admissível associada às variáveis de folga.
- b) Mostre que a solução encontrada em a) não é a ótima e indique justificando quais as variáveis básicas na próxima iteração.
- c) Escreva e resolva as equações que levam à obtenção de uma nova S.B.A.

3. Uma fábrica de tintas produz dois tipos de produto: 1 tinta para interiores e uma tinta para exteriores. Para isso recorre a dois tipos de matéria prima, A e B, das quais possui, respectivamente, 6 e 9 toneladas, em stock, stock esse que não pode ser reforçado . Para produzir uma tonelada de tinta interior são necessárias 1 tonelada de A e 2 toneladas de B. No caso da tinta exterior, para produzir uma tonelada são necessárias 1 tonelada de A e duas toneladas de B. Um estudo de mercado indica que a procura de tinta interior não excede em mais de 1 tonelada a de tinta exterior. O preço de venda da tinta interior é de 30\$00 por Kg e o da tinta exterior de 45\$00 por Kg.

- a) Formule o problema.
- b) Encontre a sua solução óptima, recorrendo ao método do simplex.

4. Considere o seguinte problema de p.l.

$$\begin{aligned} \max Z &= 20x_1 + 12x_2 \\ \text{s.a.: } x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Determine a sua solução óptima recorrendo à forma matricial do simplex.

5. É possível produzir um determinado tipo de óleo misturando 2 outros tipos disponíveis: A e B. O óleo a obter tem de obedecer a vários requisitos: possuir um grau de viscosidade não superior a 60 e um teor de Enxofre que não exceda os 40%.

Os óleos A e B têm as seguintes características e preços:

	Óleo A	Óleo B
Viscosidade (° Baumé)	40	40
Teor em Enxofre	30	52
Preço (u.m/l)	30	20

Pretende-se determinar quais as quantidades de A e de B a misturar para produzir 100 l do novo óleo, por forma a minimizar os custos com a matéria prima.

- a) Formule o problema.
- b) Determine graficamente a sua solução óptima.

6. Um fabricante de papel produz três tipos de papel: pesado (P) com um lucro de 6 u.m./ton, médio (M) com um lucro de 4 u.m./ton e fino (F) com um lucro de 5 u.m./ton.

Considera-se que para produzir uma tonelada de P são necessários 2 ton de pasta e 2 unidades de energia eléctrica, para M os valores são 1 e 2 e para F 1 e 5.

O fabricante dispõe de 30 ton de pasta e 40 unidades de energia eléctrica.

- a) Formule o problema
- b) Determine a sua solução óptima.

7. Uma empresa possui uma fábrica de objectos de plástico. Dois dos tipos de matéria prima de que necessita, designemo-los por A e B, são produzidos internamente, numa linha de produção parcialmente autónoma, com custo de 16\$00/Kg e de 24\$00/Kg, respectivamente.

A produção de A e B destina-se, em primeiro lugar, para satisfazer as necessidades da fábrica (que requer diariamente 4 toneladas de A e 10 toneladas de B) sendo um eventual excesso de produção vendido no mercado.

Sabe-se que são necessários 2 trabalhadores para obter uma tonelada de matéria prima A, enquanto que para obter uma tonelada de matéria prima B é necessário somente 1.

A empresa não pode destacar mais do que 30 dos seus trabalhadores para a linha de produção.

- a) Formule o problema em programação linear e resolva-o graficamente. Caracterize a solução obtida, referindo se esta é, ou não, única e quais as restrições activas.¹

¹ Caso não consiga formular o problema, responda às perguntas subsequentes com base em:

- b) Construa o problema dual que lhe está associado e, recorrendo à complementaridade, determine a sua solução ótima.
- c) Uma equipa de consultores de Engenharia propõe à empresa a implementação uma nova tecnologia que permite reduzir as necessidades de mão de obra da linha de produção. Indique, justificando, qual deverá ser a resposta da empresa a esta proposta. (Caso tenha resolvido o problema alternativo, discuta uma eventual vantagem no aumento do valor de b_2)

8. Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} \max Z &= 80x_1 + 60x_2 \\ \text{s.a.: } 5x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Obtenha o quadro do *simplex* no qual se tem como variáveis básicas as variáveis x_1, y_2, y_3 e prossiga com a aplicação do método até chegar ao valor ótimo do problema.
- b) Discuta as implicações das alterações que a seguir se descrevem na resposta apresentada em a).

b_i) O vector dos termos independentes das restrições passa a ser dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 22 & 18 \end{bmatrix}^T.$$

b_{ii}) A matriz linha dos coeficientes das variáveis de decisão passa a

$$\begin{bmatrix} 5 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min Z &= 20x_1 + 12x_2 \\ \text{s.a.: } x_1 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 32 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Dado o programa linear:

$$\begin{aligned} \min Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a. : } x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Escreva e resolva o problema auxiliar conducente à obtenção de uma solução básica admissível.
- Determine o valor da função objectivo Z para a solução obtida em a) e verifique se é ou não possível melhorá-lo.

10. Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de refrescos, A e B. De forma a otimizar o seu esquema de produção foi construído o seguinte modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} \max Z &= 1.5x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a. } 20x_1 + 40x_2 &\leq 40 \\ 45x_1 + 30x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

onde x_1 e x_2 representam as quantidades (em hectolitros) a produzir de cada um dos refrigerantes e 40 e 60 representam as disponibilidades das matérias primas destinadas à produção (em toneladas). Os preços de venda dos refrigerantes são 1.5 e 1 u.m., respectivamente.

- Resolva graficamente o problema indicado.
- Apresente o seu dual e calcule a respectiva solução óptima.

- c) Interprete, em termos económicos, o significado a atribuir aos resultados de a) e b)

11. Considere o seguinte problema, formulado em programação linear, como:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a. : } x_1 + x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Verifique que as colunas associadas às variáveis x_3, y_2 e y_3 constituem uma base do sistema das restrições, quando reduzido à sua forma canónica e encontre a correspondente solução básica. Justifique que não é óptima para o problema.
- b) Construa o quadro do *simplex* associado à solução básica encontrada em a) e prossiga com o método até encontrar a solução óptima.
- c) Indique o intervalo de variação para b_1 no qual a base se mantém admissível.²
- d) Admita que o valor de c_1 é alterado para 4 (se resolveu o problema alternativo considere $c_1=45$). Determine a solução óptima do problema modificado

² Caso não tenha resolvido a) considere o quadro:

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
Z	1215	25/2	0	0	15/2	10	0
x_2	12	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
x_3	21	5/6	0	1	2/3	2/3	0
y_3	15	-5/3	0	0	-1/3	-1/3	1

Que se sabe ser óptimo para o problema:

$$\begin{aligned} \max Z &= 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 \\ \text{s.a. : } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 54 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 93 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

e) Admita que é introduzida uma nova restrição ao problema, a saber:

$$x_3 \leq 2$$

ou

$$x_2 + x_3 \leq 30$$

para o caso do problema alternativo.

Estude as consequências da introdução da referida restrição no plano óptimo determinado.

12. Considere um programa linear de máximo, onde todas as restrições são de tipo $\leq$. As variáveis de decisão foram designadas por x_1 e x_2 e as variáveis auxiliares por y_1, y_2 e y_3 . Após a aplicação do método do *simplex* chegou-se ao quadro óptimo:

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
Z	5	0	0	1/4	1/4	0
x_1	3/2	1	0	-1/8	3/8	0
x_2	2	0	1	1/2	-1/2	0
y_3	4	0	0	1	-2	1

Formule matematicamente o problema em causa.

13. Considere a seguinte instância de um problema **P**, formulado em programação linear como:

$$\begin{aligned}
 (\text{P}): \quad & \min z = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
 \text{s.a.} \quad & -3x_1 + 2x_3 = 5 \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\
 & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -2 \\
 & x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Recorrendo à primeira fase do método das duas fases determine uma solução básica admissível e o seu valor para o problema P
- b) Classifique a solução encontrada em a) quanto à optimalidade. Caso a solução não seja ainda a ótima, escreva e resolva as equações conducentes à obtenção da próxima solução.

14. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 600x_1 + 1000x_2 \\
 \text{s.a.} \quad &1x_1 + 1.8x_2 \leq 64 \\
 &0.5x_1 + 0.6x_2 \leq 24 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Por aplicação do método do Simplex ao problema assim formulado, chegou-se ao quadro final:

		x_1	x_2	y_1	y_2
	108 800/3	0	0	1400/3	800/3
x_1	16	1	0	-2	6
x_2	80/3	0	1	5/3	-10/3

- a) Descreva a solução obtida, indicando quais as restrições activas.
- b) Confirme graficamente os resultados indicados no quadro.
- c) Realize uma análise de sensibilidade aos segundos termos das restrições e aos coeficientes da função objectivo.
- d) Escreva o dual problema e, recorrendo à complementaridade, encontre a sua solução ótima.
- e) Suponha que é introduzida uma restrição adicional ao problema

$$x_2 \leq 15$$

Quais as alterações que a introdução de uma tal restrição trará ao quadro óptimo?

15. Considere o seguinte problema formulado em Programação Linear, como:

$$(P) \quad \text{Min} Z = -x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$s.a : -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 36$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 24$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- a) Determine a solução básica associada às variáveis y_1, y_2 e x_2 . Justifique que a solução encontrada é uma solução básica admissível para o problema. (y_i denota a variável auxiliar associada à restrição i)
- b) Mostre que a solução encontrada na alínea a) não verifica o critério da optimalidade.
- c) Construa o quadro do simplex correspondente à solução encontrada em a).
- d) Prossiga com a aplicação do método até encontrar a solução óptima de P.

16. Considere o seguinte problema:

Numa pequena oficina produzem-se dois tipos de peças: A e B. Para tal, o artesão dispõe de uma única máquina que pode utilizar até 8h por dia. Para produzir uma peça A o artesão necessita de utilizar a máquina durante uma hora, enquanto que para produzir uma peça de B o artesão ocupa a máquina durante duas horas.

Recentemente o artesão recebeu a visita de uma equipa de consultores da região de turismo que definiu que:

- As peças tipo A serão vendidas por 5 u. m. e as tipo B por 10 u.m., respectivamente

- A produção de peças tipo A deve ser pelo menos dupla da produção de peças tipo B.
 - A máquina não deve ser ocupada em mais do que 50% do seu tempo disponível com cada um dos dois tipos de peça a produzir.
- a) Determine o esquema de produção que permite maximizar o valor das receitas.
- b) Recorrendo a um processo gráfico, determine a sua solução óptima.
- c) Construa directamente o quadro óptimo do Simplex.

17. Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
 \text{s.a.: } 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\
 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\
 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 7 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Verifique que as colunas associadas às variáveis y_1, y_2 e x_1 constituem uma base do sistema das restrições e classifique a correspondente solução básica quanto à admissibilidade.
- b) Construa o quadro do *simplex* respeitante à solução básica encontrada em a) e discuta a sua optimalidade. Caso a solução encontrada não seja ainda a óptima, continue com o método até à optimalidade.

18. Considere o problema em P.L..

$$\begin{aligned}
 (P) \min z &= x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a. } x_1 - x_2 &\leq 2 \\
 x_1 &\leq 4 \\
 x_1 + x_2 &\geq 5 \\
 x_2 &\leq 6 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis de P. Identifique as soluções básicas admissíveis.
- b) Indique qual a solução ótima de P e identifique as restrições activas. Determine o valor associado às variáveis de folga de cada uma das restrições.
- c) Construa o dual de (P) e, recorrendo à complementaridade, determine a sua solução ótima.

19. Numa fábrica podem produzir-se 4 tipos de solventes diferentes. Tendo em vista a maximização dos lucros, pretende definir-se qual a quantidade de cada um dos produtos x_i ($i=1,2,3,4$) que se deve produzir mensalmente. Sabe-se que o lucro unitário associado a cada um dos produtos é de 300, 725, 200 e 450 u.m./Kl, respectivamente.

A quantidade a produzir de cada um destes produtos é limitada por restrições ao consumo de matéria prima, à disponibilidade de mão de obra e ao espaço de armazenagem destinado ao produto acabado. Na tabela seguinte apresentam-se as necessidades em cada uma das linhas de produção, bem como a disponibilidade mensal de cada um dos recursos mencionados:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Produto 4	Disponibilidade
Matéria-Prima (Kg/mês)	1	3	1	2	60
Mão de obra (horas homem/mês)	2	8	2	3	140
Espaço de armazenagem (m ³ /mês)	3	5	6	3	100

Com base em todas estas informações foi possível formular o problema em termos de Programação Linear na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\max Z &= 300x_1 + 725x_2 + 200x_3 + 450x_4 \\
\text{s.a. : } x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 140 \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 &\leq 100 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Aplicando o método do simplex ao problema obtém-se o seguinte quadro ótimo (y_i denota a variável de folga associada à restrição i):

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
Z	14350	0	0	242.5	0	142.5	367.5	47.5
x_4	8	0	0	-3/5	1	7/5	2/5	-1/5
x_2	14	0	1	-3/10	0	-3/10	3/10	-1/10
x_1	2	1	0	31/10	0	-9/10	-1/10	7/10

- Descreva a solução obtida, indicando o que se produz e em que quantidades. Refira também o consumo de recursos e indique se há, ou não, vantagem em aumentar a disponibilidade de algum dos recursos necessários à produção dos solventes.
- Considere que o lucro unitário do solvente 3 passa para 400 u.m. Averigüe se a solução ótima se mantém.
- Imagine, agora, que se estuda a hipótese de passar a produzir um quinto tipo de solvente. Este novo solvente seria vendido por 250 u.m/kl, sendo as suas necessidades em matéria prima, mão de obra e espaço de armazenagem de 2, 3 e 5, respectivamente. Deverá a empresa rever o seu esquema de produção de forma a passar a produzir este novo tipo de solvente?

20. Uma empresa de refrigerantes está a estudar a possibilidade de passar a produzir dois novos produtos, cujos preços de venda são 2 e 1 u.m./l, respectivamente. Na produção destes novos produtos são utilizadas três matérias-primas distintas, a saber: A, B e C.

Por litro de refrigerante 1 produzido são consumidas 3 unidades da matéria prima A e 1 da matéria prima B. Por sua vez, por litro de refrigerante 2 produzido são consumidos 1 unidade de matéria-prima A, 2 unidades de matéria-prima B e 1 unidade da matéria-prima C. A empresa tem assegurado um fornecimento de 70 unidades da matéria-prima A, 60 unidades da matéria-prima B e 25 unidades da matéria-prima C, e pretende planejar a produção, maximizando o valor das vendas sem exceder as disponibilidades.

a) Formule o problema em Programação Linear³.

b) Resolva-o graficamente, indicando a sua solução ótima. Caracterize-a, descrevendo o que se produz e em que quantidades e refira o consumo de matérias primas.

c) Formule o problema dual correspondente. Determine e interprete economicamente a solução ótima dual.

21. Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}\max Z &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.: } x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

³ Caso não responda à alínea a), considere, para resposta as questões b) e c) o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}(P) \max z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a. } 4x_1 - 3x_2 &\geq 20 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

a) Verifique que as colunas associadas às variáveis x_1 e y_2 constituem uma base do sistema das restrições e classifique a correspondente solução básica quanto à admissibilidade (y_i denota a variável de folga associada à restrição i).

b) Construa o quadro do *simplex* respeitante à SBA encontrada em a) e justifique que é ótima.

c) Realize uma análise de sensibilidade ao segundo termo da segunda restrição.

d) Suponha que se introduz uma nova restrição no problema:

$$x_1 \leq 20$$

Quais as implicações de uma tal alteração?

22. Considere o problema em P.L..

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a : } 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

d) Recorrendo ao método das duas fases, determine uma solução básica admissível para P.

e) Classifique a solução obtida quanto à optimalidade. Caso a solução obtida em a) não seja ainda a ótima, prossiga com o método até a atingir.

23. Considere o seguinte problema em P.L.:

$$\begin{aligned}(P) \quad & \max Z = x_1 + x_2 \\ & \text{s.a.: } x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \quad -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

do qual se sabe que o valor óptimo é 5.

- a) Diga se a solução em que $x_1 = \frac{5}{2}$ e $x_2 = \frac{5}{2}$ é ou não uma solução admissível para (P) e, em caso afirmativo, se se trata de uma solução básica admissível. Calcule o seu valor.
- b) Indique, justificando, se (P) admite soluções óptimas alternativas.

Soluções- Exerc. P.L.:

1)

- a) $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ e $x_3 = 1$. É S.B.A..
- b) É ótima visto que os valores dos custos reduzidos das variáveis não básicas mostram que não é possível melhorar o valor actual da função objectivo.

2)

- a) $y_1 = 15$, $y_2 = 5$ e $y_3 = 10$. É S.B.A..
- b) Novas variáveis básicas: y_1 , y_2 , x_3 .
- c) Nova solução básica: $y_1 = 45/2$, $y_2 = 5/2$, $x_3 = 5/2$.

3)

- a) Sejam:

$x_1 =$ 'Quantidade de tinta para interiores a produzir (Kg)'

$x_2 =$ 'Quantidade de tinta para exteriores a produzir (Kg)'

O problema enunciado pode ser formulado como:

$$\text{Max} Z = 30x_1 + 45x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) $x^* = (3, 5/3)^T$; $y^* = (0, 2, 0)^T$; $z^* = 155$.

4) $x^* = (1/3, 5)^T$; $y^* = (3, 0, 0)^T$; $z^* = 400/3$.

5)

- a) Sejam:

$x_1 =$ 'Quantidade de óleo A no novo óleo (l)'

$x_2 =$ 'Quantidade de óleo B no novo óleo (l)'

O problema enunciado pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} Z &= 30x_1 + 20x_2 \\
 \text{s.a.} \quad &40x_1 + 40x_2 \leq 60(x_1 + x_2) \\
 &0.3x_1 + 0.52x_2 \leq 0.4(x_1 + x_2) \\
 &x_1 + x_2 = 100 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

b) $x^* = 0,100$; $y^* = 0,000,10$; $z^* = 3000$. Logo o novo óleo será constituído por 100% de óleo A e 0% de óleo B.

6)

a) Sejam:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \text{'Quantidade de papel fino a produzir (ton)'} \\
 x_2 &= \text{'Quantidade de papel médio a produzir (ton)'} \\
 x_3 &= \text{'Quantidade de papel pesado a produzir (ton)'}
 \end{aligned}$$

O problema enunciado pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} Z &= 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\
 \text{s.a.} \quad &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\
 &5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 40 \\
 &x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

b) $x^* = 0,10,10$; $y^* = 0,0$; $z^* = 100$.

7)

a) Sejam:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \text{'Quantidade de matéria prima A a produzir (ton)'} \\
 x_2 &= \text{'Quantidade de matéria prima B a produzir (ton)'}
 \end{aligned}$$

O problema enunciado pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= 16x_1 + 24x_2 \\
 \text{s.a. } x_1 &\geq 4 \\
 x_2 &\geq 10 \\
 2x_1 + x_2 &\leq 30 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

A solução óptima obtida é $x^* = (4, 10)$; $y^* = (0, 0, 12)$ e tem valor $z^* = 304$.

A solução é única e estão activas as primeira e segunda restrições. O lucro gerado é 304 000\$00.

b) Problema Dual:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } G &= 4w_1 + 10w_2 + 30w_3 \\
 \text{s.a. } w_1 + 2w_3 &\leq 16 \\
 w_2 + w_3 &\leq 24 \\
 w_1, w_2, w_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

A solução óptima dual é $w^* = (6, 24, 0)$ e $v^* = (0, 0)$ e tem valor $G^* = 304$.

c) A resposta deverá ser negativa pois o recurso mão de obra não é esgotado com o plano actual.

8)

a) A solução óptima obtida é $x^* = (6, 5)$; $y^* = (0, 3, 0)$ e tem valor $z^* = 540$.

b)

i) A solução permanece admissível e, como tal não é necessário reoptimizar. So o valor de y_2 e alterado passando a valer 2.

ii) A nova solução óptima é $x^* = (0, 6)$; $y^* = (2, 6, 0)$ com valor $z^* = 360$.

9)

a) S.B.A: $x = (0, 1/2)$; $y = (0, 3/2)$.

b) Valor da solução: $z = 3/2$. A solução é óptima.

10)

a) $(x_1, x_2) = \lambda (1/2) + (-\lambda) (4/3, 0)$ com $\lambda \in [0, 1]$.

b) Problema Dual:

$$\begin{aligned} \text{Min } G &= 40w_1 + 60w_2 \\ \text{s.a.} \quad 20w_1 + 45w_2 &\geq 1.5 \\ 40w_1 + 30w_2 &\geq 1 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A solução óptima dual é $w^* = 0,1/30$ e $v^* = 0, 0$ e tem valor $G^*=2$.

- c) Produzem-se 1 hl de refrigerante A e 50l de refrigerante B, consumindo-se as duas matérias primas na totalidade. O preço sombra atribuído à matéria prima 1 é 0, o que significa que não há vantagem em adquiri-la. Por sua vez, o preço sombra da matéria prima 2 é 1/30 u.m., o que significa que é vantajoso para a empresa adquirir uma quantidade extra de matéria prima 2, desde que o preço de aquisição seja inferior a 1/30 u.m/unidade adquirida.

11)

- a) A solução básica encontrada é $x = 0,0,1$; $y = 0,7,3$. Trata-se de uma solução básica admissível.
b) A solução óptima obtida é $x^* = 0,3,1$; $y^* = 0, 4,0$ e tem valor $z^*=4$.
c) $b_1 \in [0,3]$
d) A nova solução óptima é $x^* = 1,0$; $y^* = 0,5,0$ com valor $z^*=5$.
e) A solução permanece admissível e óptima.

12)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

13)

- a) A solução básica encontrada é $x = 5/3, 1/3, 0$; $y = 0,5/2,0$.
b) A solução óptima é $x^* = 5/3, 16/3, 0$; $y^* = 0,0,5$ e tem valor $z^* = -9$.

14)

- a) São básicas as variáveis x_1 e x_2 e são não básicas as variáveis y_1 e y_2 . A solução óptima de (P) é única e tem valor 108 800/3. Estão activas as restrições 1 e 2.

b)

c) $b_1 \in [8,72; \infty)$; $b_2 \in [4/3,32; \infty)$; $c_1 \in [0,000/9,2500/3; \infty)$; $c_2 \in [20,1280; \infty)$

d)

$$\begin{aligned} \text{Min } G &= 64w_1 + 24w_2 \\ \text{s.a. } w_1 + 0.5w_2 &\geq 600 \\ 1.8w_1 + 0.6w_2 &\geq 1000 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A solução óptima dual é $w^* = (400/3, 800/3)$, $v^* = (0, 0)$ e tem valor $G^* = 108\,800/3$

e) A nova solução óptima é $x^* = (0,15)$; $y^* = (0,0)$ e tem valor $z^* = 33\,000$.

15)

a) A solução básica é $x = (0,8,21/2)$; $y = (0,28)$. É S.B.A. visto que respeita as restrições de não negatividade.

b) Não é óptima porque é possível melhorar o valor da função objectivo, fazendo entrar x_3 na base.

c)

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
	24	0	0	2	0	0
y_1	10	-5/3	0	2/3	1	0
y_2	28	4/3	0	8/3	0	1
x_2	8	-1/3	1	1/3	0	0

d) A solução óptima é $x^* = (0,9/2,11)$; $y^* = (0,0,0)$ e tem valor $z^* = 3$.

16)

a) Sejam:

$x_1 =$ 'Quantidade de peças tipo A a produzir '

$x_2 =$ 'Quantidade de peças tipo B a produzir '

O problema enunciado pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} Z &= 5x_1 + 10x_2 \\
 \text{s.a.} \quad &x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
 &x_1 \geq 2x_2 \\
 &x_1 \leq 4 \\
 &2x_2 \leq 4 \\
 &x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
 \end{aligned}$$

b) A solução óptima é $x^* = (4, 2)$ e tem valor $z^* = 40$.

c)

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4
	40	0	0	5	0	0	0
x_1	4	1	0	1/2	-1/2	0	0
x_2	2	0	1	1/4	1/4	0	0
y_3	0	0	0	-1/2	1/2	1	0
y_4	0	0	0	-1/4	-1/4	0	1

17)

a) A solução básica encontrada é $x = (5, 0, 0)$; $y = (1, 5, 1, 0)$. Trata-se de uma S.B.A.

b) A solução óptima é $x^* = (1, 0)$; $y^* = (0, 0, 0)$ e tem valor $z^* = -2$.

18)

a) O conjunto das soluções admissíveis de P é o poliedro cujos pontos extremos são: A(0,5); B(0,6); C(4,6); D(4,2) e E(7/2, 3/2).

b) A solução óptima é $x^* = (2, 3/2)$ e tem valor $z^* = 8$. Estão activas as primeira e terceira restrições. Os valores associados às variáveis de folga são: $y_1 = y_3 = 0$; $y_2 = 1/2$; $y_4 = 9/2$.

c) Problema Dual:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} G &= 2w_1 + 4w_2 + 5w_3 + 6w_4 \\
 \text{s.a.} \quad &w_1 + w_2 + w_3 \leq 1 \\
 &-w_1 + w_3 + w_4 \leq 3 \\
 &w_1, w_2, w_4 \leq 0 \\
 &w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

A solução óptima dual é $w^* = (1, 0, 2, 0)$ e $v^* = (0, 0)$ e tem valor $G^* = 8$.

19)

- a) Produzem-se os solventes 1, 2 e 4 nas quantidades de 2 Kl, 14 Kl e 8 Kl, respectivamente. Consomem-se todos os recursos disponíveis, havendo vantagem em aumentar a sua disponibilidade, desde que esse aumento não traga custos superiores a 142.5 u.m., 367.5 u.m. e 47.5 u.m, por unidade de matéria prima, mão de obra e espaço de armazenagem disponibilizados.
- b) A solução permanece óptima.
- c) Não há vantagem em alterar o plano de produção, logo a solução permanece óptima.

20)

- a) Sejam:

$x_1 =$ 'Quantidade de refrigerante 1 a produzir '

$x_2 =$ 'Quantidade de refrigerante 2 a produzir '

O problema enunciado pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad &3x_1 + x_2 \leq 70 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ &x_2 \leq 25 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- b) A solução óptima é $x^* = (6, 22)$ e tem valor $z^* = 54$. Assim, produzem-se 16 l de refrigerante 1 e 22 l de refrigerante 2. As matérias primas A e B são consumidas na totalidade, havendo um excesso de 3 unidades de matéria prima C.
- c) Problema Dual:

$$\begin{aligned} \text{Min} G &= 70w_1 + 60w_2 + 25w_3 \\ \text{s.a.} \quad &3w_1 + w_2 \geq 2 \\ &w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 1 \\ &w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução óptima dual é $w^* = (5/5, 1/5, 0)$ e $v^* = (0, 0)$ e tem valor $G^* = 54$.

A matéria prima C não é consumida na totalidade, pelo que o seu preço sombra é zero. As matéria primas A e B são bens escassos, havendo vantagem em adquirir quantidades extra, desde que o custo de aquisição não ultrapasse 3/5 u.m. e 1/5 u.m., por unidade adquirida, respectivamente.

21)

a) A solução básica encontrada é $x = (0,0,0)$; $y = (0,10)$. Trata-se de uma S.B.A

b)

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
	150	0	23	7	5	0
x_1	30	1	5	2	1	0
y_2	10	0	-10	-8	-1	1

c) Se $b_2 \in]0, +\infty[$, a base permanece admissível.

d) A solução actual deixa de ser admissível. A nova solução ótima é $x^* = (0,0,5)$; $y^* = (0,50,0)$ e tem valor $z^*=115$.

22)

a) A solução ótima é $x^* = (0,2,6)$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 6$ e tem valor $z^*=8$.

b) A solução ótima é $x^* = (0,5,9)$; $y_1 = 0$; $y_2 = 3$; $y_3 = 0$ e tem valor $z^*=14$.

23)

a) A solução é admissível, mas não básica admissível.

b) Se existe uma solução não básica que é ótima, existem ótimos alternativos.