



**INSTITUTO POLITÉCNICO
DO CÁVADO E DO AVE**
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

MARIANA CARVALHO

MESTRADO EM ENGENHARIA INFORMÁTICA E SISTEMAS EMPRESARIAIS

2010/2011

Índice

1	Introdução à Investigação Operacional.....	5
1.1	Investigação Operacional: definição; história e desenvolvimento; domínios de aplicação	5
1.2	Tipos de Modelos de Investigação Operacional.....	5
1.2.1	Estrutura dos Modelos Matemáticos.....	6
1.3	Programação Linear e Não Linear.....	7
1.4	Fases de um Estudo de Investigação Operacional.....	8
2	Programação Linear	9
2.1	Introdução.....	9
2.1.1	Definição do problema de Programação Linear.....	9
2.1.2	Formalização matemática do problema de Programação Linear.....	9
2.1.3	Forma standard de um problema de Programação Linear.....	10
2.2	Solução gráfica do problema.....	13
2.3	Método do Simplex	15
2.3.1	Construção de um Quadro Válido de Base	15
2.3.2	Características do Quadro Simplex	16
2.3.3	O Algoritmo	16
2.3.4	Inequações do tipo Maior ou Igual ($\geq$)	19
2.4	Dualidade.....	28
2.4.1	Definição da Formulação Dual	28
2.4.2	Teoremas da Dualidade	29
2.4.3	O Primal e as Soluções do Dual	29
2.4.4	O Algoritmo Simplex-Dual	31
2.4.5	O Algoritmo Primal-Dual	33
2.4	Análise de Sensibilidade/ Pós-Optimização.....	35
2.4.1	Introdução.....	35
2.4.2	Variações nos Coeficientes da Função Objectivo	36
2.4.3	Variações nas Disponibilidades das Restrições	37
2.4.4	Introdução de uma variável	38
2.4.5	Introdução de uma restrição	39
2.5	Casos Particulares da Programação Linear.....	40
2.4.1	Introdução.....	40
2.4.2	Transportes	40
2.6.3	Afectação.....	57
	Exercícios	60

Exercícios - Formulação de Problemas em Programação Linear	60
Exercícios – Método Simplex.....	66
Exercícios - Dualidade/ Análise de Sensibilidade/ Pós-Optimização	68
Exercícios - Transportes	73
Exercícios - Afectação.....	77

1 INTRODUÇÃO À INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

1.1 Investigação Operacional: definição; história e desenvolvimento; domínios de aplicação

A Investigação Operacional procura estabelecer *processos científicos de decisão* que permitam uma melhor utilização de recursos escassos, ou uma melhor concepção e operação de sistemas homem - máquina, etc.

A Investigação Operacional (I.O.) é uma cadeira interdisciplinar. O seu início coincide com o período da II Guerra Mundial, devido à necessidade de determinar a melhor utilização dos recursos militares, que eram escassos.

O desenvolvimento de meios informáticos fez com que as técnicas de I.O. tivessem aplicações práticas reais.

As áreas de aplicação são, entre outras, no Sector de Produção (Gestão de *stocks*, Planeamento de Produção, etc.), no Sector dos Serviços (Sistemas de Distribuição e Transporte), no Sector de Controlo de Qualidade.

1.2 Tipos de Modelos de Investigação Operacional

Qualquer aplicação da I.O. começa por desenvolver uma representação ideal (simplificada) da realidade.

O sistema em estudo pode ser já existente, ou ser um sistema em projecto. Para um sistema já existente, pretende-se analisar o seu funcionamento, no sentido de melhorar o seu desempenho. Para um sistema em projecto, pretende-se identificar a melhor configuração (estrutura) para o futuro sistema.

Os diferentes tipos de modelos utilizados pela I.O. podem agrupar-se em:

- **Simbólicos ou Matemáticos**

São abstrações do mundo real. Na construção de modelos matemáticos admite-se que todas as variáveis e relações relevantes entre elas são quantificáveis.

- **Simulação**

Os modelos de simulação “imitam” o funcionamento do sistema. Não requerem funções matemáticas explícitas para relacionamento das variáveis, e tornam possível o estudo de sistemas complexos que não podem ser modelados ou resolvidos matematicamente.

- **Heurísticos**

Baseiam-se em regras intuitivas ou empíricas que permitem a determinação de uma solução melhorada a partir de uma dada solução inicial para o modelo.

São métodos de pesquisa que conduzem de um ponto solução para outro ponto solução, com o objectivo de melhorar o valor de critério do modelo (medida de desempenho).

1.2.1 Estrutura dos Modelos Matemáticos

- **Variáveis de Decisão e Parâmetros**

Variáveis de Decisão: são as incógnitas do problema e representam os níveis das actividades

Parâmetros: são as variáveis controladas do sistema. Representam, por exemplo, níveis de recursos disponíveis

- **Condições, Constrangimentos ou Restrições**

Exprimem limitações (normalmente físicas) do sistema. Uma solução que obedeça ao conjunto de condições designa-se por **solução válida admissível**. O conjunto de todas as soluções válidas admissíveis é designado por **região admissível**.

- **Função Objectivo**

Define a medida de eficiência/ desempenho do sistema em função das variáveis de decisão. Permite determinar qual a “melhor” de um conjunto de soluções válidas.

O objectivo é o de encontrar a solução (em termos de variáveis de decisão) que melhor satisfaça a medida de desempenho do sistema, obedecendo às restrições do problema; ou seja, encontrar a solução admissível que leva a função objectivo a um máximo (ou mínimo) – problema de optimização.

Um *problema de Programação Matemática* é um problema de optimização em que o objectivo e as restrições são dadas como funções matemáticas e relações funcionais (como no exemplo 1.1).

Os problemas de Programação Matemática têm a forma

$$\begin{array}{l} \text{Optimizar : } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{sujeito a : } \left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{array} \right. \end{array}$$

Exemplo 1.1 : O problema

$$\text{Minimizar : } z = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{sujeito a : } x_1 - x_2 = 3$$

$$x_2 \geq 2$$

é um problema de optimização relativo ao objectivo z . As variáveis x_1 e x_2 , estão restringidas de dois modos: x_1 tem que exceder x_2 de 3 unidades, e também x_2 tem que ser maior ou igual a 2. Desejam-se encontrar valores para as variáveis que minimizem a soma dos seus quadrados, sujeito às limitações impostas pelas restrições.

1.3 Programação Linear e Não Linear

Um problema de Programação Matemática é um **problema de Programação Linear** se a função objectivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e cada restrição $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1, 2, \dots, m$) são lineares relativamente às variáveis, isto é, se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

e

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

onde c_j e a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, \dots, n$) são constantes conhecidas.

Qualquer outro problema de Programação Matemática é *não linear*. Assim, o Exemplo 1.1 corresponde a um problema de Programação Não Linear, dada a função objectivo z .

Um **problema de Programação Linear Inteira** é um problema de Programação Linear com a restrição adicional de todas as variáveis serem inteiras. De notar que não é necessário que os coeficientes na função objectivo e os coeficientes, e os termos independentes, nas restrições também sejam inteiros, ainda que tal ocorra frequentemente.

Um *problema de Programação Quadrática* é um problema de Programação Matemática em que cada restrição é linear, mas a função objectivo é da forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n d_i x_i$$

onde c_{ij} e d_i são constantes conhecidas.

O Exemplo 1.1 corresponde a um problema de Programação Quadrática. As duas restrições são lineares, mas a função objectivo não.

1.4 Fases de um Estudo de Investigação Operacional

- **Definição do problema**
 - Descrição exacta do objectivo do estudo
 - Identificação das alternativas de decisão do sistema
 - Reconhecimento das limitações e requisitos do sistema
- **Construção do Modelo**
 - Consiste na especificação de expressões quantitativas para o objectivo e restrições do problema em função das suas variáveis de decisão
- **Solução do Modelo**
 - Consiste na aplicação de algoritmos existentes ou no desenvolvimento de novos algoritmos para obtenção de uma solução óptima para o modelo
- **Validação do Modelo**
 - Consiste na comparação de soluções obtidas para o modelo com dados históricos do sistema, quando se trata de um sistema já existente. Para sistemas não existentes, poder-se-á utilizar um modelo de simulação.
- **Implementação dos Resultados Finais**
 - O objectivo de um estudo de I.O. é produzir uma solução que possa e deva ser executada. Os resultados devem ser traduzidos em instruções de operações detalhadas, em forma compreensível para as pessoas que operam e administram o sistema.

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 Introdução

Para iniciar um método para a resolução de problemas de Programação Linear, é necessário transformar todas as restrições do tipo desigualdade em igualdades e deve conhecer-se uma solução admissível, isto é, não negativa.

2.1.1 Definição do problema de Programação Linear

- **Problema de Programação Linear de tipo máximo**

$$\text{Max } z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

$$\text{s.a.} \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

- **Problema de Programação Linear de tipo mínimo**

$$\text{Min } z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

$$\text{s.a.} \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \geq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \geq b_2$$

.....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \geq b_m$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

2.1.2 Formalização matemática do problema de Programação Linear

Frequentemente, os problemas de Programação Linear são apresentados verbalmente. A sua resolução começa pela modelação do problema. Recomenda-se a seguinte abordagem para se passar do enunciado a um problema de Programação Linear:

PASSO 1: Determine a grandeza que se pretende otimizar e expresse-a como uma função matemática. Ao fazê-lo, terá que definir as variáveis.

PASSO 2: Identifique todos os requisitos, condicionalismos e limitações, e expresse-os como funções matemáticas. Assim, definirá as restrições.

PASSO 3: Expresse todas as condições implícitas. Tais condições não são estipuladas explicitamente no problema, mas são evidentes face à situação física que se está a

modelar. Geralmente, envolvem a não negatividade das variáveis, ou a exigência de que as variáveis só assumam valores inteiros.

Exemplo 2.1: Um fabricante está a planear a última semana de produção de quatro modelos de consolas de madeira para televisores (I, II, III, IV). A fabricação de cada consola começa com a montagem, a que se segue o acabamento. Cada unidade de cada um dos referidos modelos requer, respectivamente, 4, 5, 3 e 5 horas para montagem e 2, 1.5, 3 e 3 horas, respectivamente, para acabamento. Os lucros unitários associados a cada um dos modelos são, respectivamente, iguais a 7, 7, 6 e 9 u.m.. O fabricante dispõe de 30000 horas disponíveis para a montagem destes produtos (750 trabalhadores da linha de montagem a trabalharem 40 horas por semana) e 20000 horas disponíveis para o acabamento (500 trabalhadores na linha de acabamento a trabalharem 40 horas por semana). Formule o problema de P.L., de modo a maximizar o lucro do fabricante. Assuma que todas as unidades fabricadas serão vendidas.

O objectivo é a maximização do lucro (em u.m.), que representaremos por z . Sejam x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , respectivamente, o número de consolas do modelo I, II, III e IV a fabricar na semana. O objectivo poderá exprimir-se do seguinte modo:

$$\text{Max: } z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 .$$

Teremos que definir duas restrições associadas aos tempos totais disponíveis – uma para a montagem e outra para o acabamento.

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30000$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20000$$

Como não pode haver produção de quantidades negativas, poderemos escrever quatro condições implícitas: $x_i \geq 0$ ($i=1,2,3,4$). Adicionalmente, como só unidades completas geram lucro, é natural que se exija que todas as variáveis sejam inteiras. Obtemos, então, o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max: } z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 .$$

$$\text{s.a.: } 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30000$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20000$$

com: todas as variáveis não negativas e inteiras.

2.1.3 Forma standard de um problema de Programação Linear

Um problema de Programação Linear está na *forma standard* ou *forma canónica* se todas as restrições estão representadas por igualdades e se se conhecer uma solução admissível, isto é, não negativa.

Condições de Não Negatividade

Toda a variável livre (isto é, não restrita a ser não negativa) é substituída pela diferença de duas novas variáveis não negativas.

Exemplo 2.2: A restrição $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq -5$ é multiplicada por -1 , a fim de se obter $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 5$, no qual o segundo membro da desigualdade é não negativo.

Variáveis de Folga e Variáveis de Excesso

Uma restrição linear da forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ pode ser convertida numa igualdade pela adição de uma nova variável não negativa ao primeiro membro da desigualdade. Tal variável é numericamente igual à diferença entre o segundo membro e o primeiro membro da desigualdade e é designada por *variável de folga*. Esta variável representa o desperdício associado ao recurso modelado pela restrição em causa.

Exemplo 2.3: A primeira restrição do problema do exemplo 2.1 é

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30000.$$

O primeiro membro da desigualdade representa o número total de horas despendidas na montagem das consolas para televisores, enquanto que o segundo termo da desigualdade representa o número total de horas disponíveis para a montagem. Esta desigualdade é transformada na equação

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + F_1 = 30000$$

pela adição da variável de folga F_1 ao primeiro membro da desigualdade. Aqui, F_1 representa o número de horas de montagem disponíveis e que não são utilizadas pelo fabricante.

Uma restrição linear da forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$ pode ser convertida numa igualdade, subtraindo uma nova variável não negativa ao primeiro membro da desigualdade. Tal variável é numericamente igual à diferença entre o primeiro membro e o segundo membro da desigualdade, e é designada por *variável de excesso*. Relativamente ao recurso modelado pela restrição em causa, esta variável representa o consumo em excesso, além da disponibilidade.

Exemplo 2.4: Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Min: } z &= 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 \\ \text{s.a.: } &4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 \\ &4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65 \\ &x_1 \leq 7 \\ &x_2 \leq 7 \\ &x_3 \leq 7 \end{aligned}$$

com: todas as variáveis não negativas e inteiras.

A primeira restrição do problema é

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54.$$

Esta desigualdade é transformada na equação

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - E_1 = 54$$

pela subtração da variável de excesso E_1 ao primeiro membro da desigualdade.

Escolha de uma Solução Inicial Admissível

Depois de se terem transformado todas as restrições lineares (com os segundos membros das desigualdades positivos) em igualdades, pela introdução de variáveis de folga e de excesso onde necessário, adiciona-se uma nova variável, designada por *variável artificial*, aos primeiros membros das restrições que não contenham variável de folga. Assim, todas as equações que representam restrições terão ou uma variável de folga ou uma artificial. Uma solução inicial não negativa para este novo conjunto de restrições obtém-se igualando, em cada restrição, a respectiva variável de folga, ou artificial, ao correspondente termo independente, e igualando-se a zero todas as outras variáveis, incluindo as variáveis de excesso.

Exemplo 2.5: O conjunto de restrições

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 6 \\ 7x_1 + 5x_2 &= 15 \end{aligned}$$

é transformado num sistema de equações adicionando-se a variável de folga F_1 ao primeiro membro da primeira restrição e subtraindo-se a variável de excesso E_1 ao primeiro membro da segunda restrição. O novo sistema é:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + F_1 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - E_1 &= 6 \\ 7x_1 + 5x_2 &= 15 \end{aligned}$$

Se se adicionarem agora as variáveis artificiais A_1 e A_2 , respectivamente, ao primeiro membro das duas últimas restrições do sistema, que não têm variável de folga, o resultado é

$$x_1 + 2x_2 + F_1 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 - E_1 + A_1 = 6$$

$$7x_1 + 5x_2 + A_2 = 15$$

Uma solução não negativa para este último sistema de equações será, $F_1=3$, $A_1=6$, $A_2=15$ e $x_1=x_2=E_1=0$. (Note-se, contudo, que $x_1=0$, $x_2=0$ não é uma solução que verifica o conjunto de restrições original).

Por vezes, é possível escolher uma solução inicial sem a introdução exaustiva de variáveis de folga e artificiais.

2.2 Solução gráfica do problema

Considere-se o seguinte problema-tipo, que irá ser designado por *Problema de Produção*.

Exemplo 2.6: Uma empresa produz dois tipos de produtos, **Artigo 1** e **Artigo 2**.

A produção destes artigos requer três tipos diferentes de recursos (**Material**, **Tempo-Máquina** e **Mão de Obra**).

O nível de recursos disponíveis, o consumo de recursos por cada unidade de cada um dos artigos produzidos, bem como o **Lucro Líquido** obtido da venda de cada unidade dos artigos estão sintetizados na tabela.

Admite-se que o objectivo da Gestão corresponde à maximização do seu lucro total, e que pretende saber qual o *Plano de Produção* que cumpre esse objectivo.

	Artigo 1	Artigo 2	Disponibilidade
Material	5	4	200
Tempo-Máquina	4	6	230
Tempo-Homem	2	1	70
Lucro Unitário	10	9	

Formulação

Para formulação do problema, deve-se começar por definir as suas **Variáveis de Decisão** (incógnitas do problema).

x_1 : Quantidade a produzir do artigo 1

x_2 : Quantidade a produzir do artigo 2

Função Objectivo $Z = \text{Max } 10x_1 + 9x_2$

Condições:

$$5x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 230$$

$$2x_1 + x_2 \leq 70$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solução Gráfica do problema

Dado que o problema inclui duas *Variáveis de Decisão*, pode-se fazer a sua representação no plano.

As condições podem ser representadas como zonas limitadas pelas rectas

$$5x_1 + 4x_2 = 200$$

$$4x_1 + 6x_2 = 230$$

$$2x_1 + x_2 = 70$$

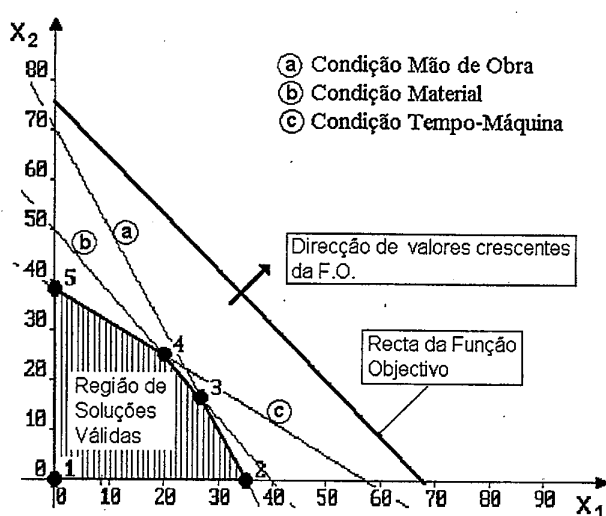
e pelos eixos (x_1, x_2) .

Não existe nenhum ponto para o qual se verifiquem simultaneamente as três condições.

Na figura abaixo, a tracejado, podemos observar a Região de Soluções Válidas. Qualquer ponto-solução pertencente a esta região obedece ao conjunto de condições (e às **Condições de Não-Negatividade**).

A **Direcção da Função Custo** pode ser obtida traçando a recta da função objectivo relativa a determinado valor dessa função e deslocando-a paralelamente a si mesma.

Um processo de atingir a **Solução Óptima** consiste em caminhar de vértice em vértice, ao longo das linhas que representam as condições.



O processo algorítmico que seguidamente será introduzido é análogo ao procedimento de um alpinista que, em nevoeiro absoluto, munido de um altímetro, procura atingir o cume de uma montanha. Admitindo que não há "covas" (a

superfície é convexa), o alpinista dá um passo em cada direcção e verifica se o altímetro indica subida ou descida. Assim, ele decide que direcção oferece o maior declive (potencial) e desloca-se nessa direcção.

Na figura acima, os vértices do polígono que representa a **Região de Soluções Válidas** (pontos em que duas condições se verificam para a igualdade simultaneamente) chamam-se **Soluções Válidas de Base**.

2.3 Método do Simplex

2.3.1 Construção de um Quadro Válido de Base

Exemplo 2.7: Considere o problema de Programação Linear definido no exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.: } \quad &5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ &4x_1 + 6x_2 \leq 230 \\ &2x_1 + x_2 \leq 70 \\ &\text{com: todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Através dele pode ser construído o seguinte quadro:

Quadro I

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
F_1	5	4	1	0	0	200
F_2	4	6	0	1	0	230
F_3	2	1	0	0	1	70
Z	-10	-9	0	0	0	0

A parte central do quadro não é mais do que uma representação matricial do sistema de equações, que deriva das restrições do problema.

A última linha (Z) inclui os coeficientes da função objectivo, mas com sinal trocado (problema de maximização).

A coluna D inclui as disponibilidades relativas a cada um dos recursos.

Na parte superior do quadro são colocados os identificadores das **Variáveis de Decisão** e das **Variáveis de Folga**.

Ao lado esquerdo do quadro são colocados os identificadores das variáveis de folga para constituírem uma **Base** de partida para a solução do problema. Veremos que para condições do tipo " $\leq$ ", a colocação na base da correspondente **Variável de Folga** cumpre as condições necessárias à produção de uma **Solução Válida de Base**.

Existe no quadro informação suficiente para a obtenção de uma primeira **Solução Válida**.

No procedimento algorítmico que vai ser descrito, serão consideradas formulações para problemas de *maximização da Função Objectivo*. Contudo, e como se verá mais adiante, o procedimento para formulações para problemas de minimização será bastante semelhante.

2.3.2 Características do Quadro Simplex

- 1) Em cada *linha do quadro* (equação) existe uma *variável (de folga)* que só ela possui *coeficiente* não nulo.
- 2) As *variáveis* referidas em 1) têm *coeficiente* nulo na linha da *Função Objectivo*.
- 3) Existe uma matriz identidade embebida na matriz do sistema de equações do quadro.
- 4) A existência da estrutura referida em 1), 2) e 3) e, ainda, o facto de os valores inscritos na *coluna D* serem não negativos é suficiente para determinar a **Solução Válida de Base** corrente:

$$F_1=200; F_2=230; F_3=70$$

$$x_1=x_2=0$$

O custo/ lucro dessa solução é, obviamente, nulo e corresponde a não desenvolver qualquer actividade.

2.3.3 O Algoritmo

O algoritmo do Simplex cumpre dois critérios:

- **Critério de Validade**
Qualquer solução deve verificar as soluções do problema e, ainda, as condições de não negatividade.
- **Critério de Optimabilidade**
O algoritmo obtém a solução óptima quando todos os coeficientes da linha da *Função Objectivo* forem positivos.

Procedimento:

- 1) Examinar as entradas na linha Z. Se não houver nenhum *coeficiente negativo*, o algoritmo terminou, e o problema está resolvido. Se houver mais do que um *coeficiente negativo*, escolhemos o *coeficiente* mais negativo (o que oferece o maior **Ganho Potencial**). A escolha do elemento mais negativo não é essencial, mas oferece potencial para tornar o algoritmo mais rápido.
- 2) A *variável* na *coluna* correspondente ao *coeficiente* seleccionado vai entrar na base, permutando com outra *variável*, actualmente na base, que passará a *não-básica*.

- 3) A selecção da *variável* que deve abandonar a base é feita observando a razão entre os elementos da *coluna* das disponibilidades e os correspondentes elementos da *coluna* correspondente à *variável* seleccionada para entrar na base. Selecciona-se a *linha* do quadro correspondente à menor razão. Como é evidente, só tem significado considerar as razões com denominador positivo.

Aplicando ao Exemplo 2.7:

Quadro II

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D	Razão
F_1	5	4	1	0	0	200	$200/5$
F_2	4	6	0	1	0	230	$230/4$
F_3	2	1	0	0	1	70	$70/2$ ← Linha Pivot
Z	-10	-9	0	0	0	0	

↑
Coluna Pivot

Coluna Pivot é a *coluna* correspondente ao coeficiente mais negativo da *Função Objectivo*, e que identifica a *variável* que deve entrar na base.

Linha Pivot é a *linha* é a linha do quadro que produz a menor razão, e que identifica a *variável* que deve abandonar a base.

Elemento Pivot é o elemento do quadro no cruzamento da *Linha Pivot* e da *Coluna Pivot*.

- 4) Reduz-se o **Elemento Pivot** a 1, dividindo toda a *Linha Pivot* pelo **Elemento Pivot**. Note-se que as linhas do quadro representam equações ordinárias que podem ser manipuladas como tal.
- 5) Transforma-se o quadro por forma a que na **Coluna Pivot** o único elemento não nulo seja o colocado na posição do **Elemento Pivot**. Isto é possível multiplicando a *Linha Pivot* reduzida (depois de dividida pelo *Elemento Pivot*) por factores adequados e somando-a às outras linhas do quadro.

Aplicando ao Exemplo 2.7:

Quadro III

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
F_1	0	$4-5/2$	$1-0$	$0-0$	$0-5/2$	$200-5*35$
F_2	0	$6-4/2$	$0-0$	$1-0$	$0-4/2$	$230-4*35$
x_1	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35 ← Linha Pivot
Z	0	$-9+10/2$	$0+0$	$0+0$	$0+10/2$	$0+35*10$

↑
Coluna Pivot

Note-se que x_1 substitui F_3 ao lado esquerdo do quadro, passando a pertencer à lista de **Variáveis Básicas**.

Executando os cálculos indicados no **Quadro III**, obtém-se:

Quadro IV

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
F_1	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25
F_2	0	4	0	1	-2	90
x_1	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35
Z	0	-4	0	0	5	350

A solução após esta primeira iteração é:

$$F_1=25 \quad x_2=0$$

$$F_2=90 \quad F_3=0$$

$$x_1=35$$

$$\text{Função Objectivo} = 350$$

Três das variáveis são não nulas (uma por cada equação do quadro).

Selecione-se o novo **Elemento Pivot**:

Quadro V

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D	Razão
F_1	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25	$50/3$
F_2	0	4	0	1	-2	90	$90/4$
x_1	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35	70
Z	0	-4	0	0	5	350	

← Linha Pivot



Coluna Pivot

Na iteração x_2 deve entrar na base e F_1 deve abandonar a base.

Quadro VI

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D	Razão
x_2	0	1	$2/3$	0	$-5/3$	$50/3$	-10
F_2	0	0	$-8/3$	1	$14/3$	$70/3$	5
x_1	1	0	$-1/3$	0	$4/3$	$80/3$	20
Z	0	0	$8/3$	0	$-5/3$	$1250/3$	

← Linha Pivot



Coluna Pivot

Nesta iteração F_3 deve entrar na base e F_2 deve abandonar a base.

Quadro VII

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
x_2	0	1	-6/21	5/14	0	25
F_3	0	0	-4/7	3/14	1	5
x_1	1	0	3/7	-2/7	0	20
Z	0	0	12/7	5/14	0	425

Para este quadro já não há coeficientes negativos na linha da *Função Objectivo*.
O algoritmo terminou.

O **Valor Óptimo** da Função Objectivo é 425.

A **Solução Óptima** é

$$\begin{aligned} x_1 &= 20 & F_2 &= 0 \\ x_2 &= 25 & F_3 &= 0 \\ F_3 &= 5 \end{aligned}$$

2.3.4 Inequações do tipo Maior ou Igual ($\geq$)

Exemplo 2.8: Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Min: } z &= 200x_1 + 230x_2 + 70x_3 \\ \text{s.a.: } &5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ &4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 9 \\ &\text{com: todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Transformemos as inequações em equações introduzindo as necessárias *Variáveis de Excesso* (E_1 e E_2). Note-se que estas variáveis são não negativas, e que devem ser subtraídas ao lado esquerdo das inequações para as transformar em equações.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - E_1 &= 10 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 - E_2 &= 9 \end{aligned}$$

Tentemos construir o quadro simplex para estas equações:

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	D
$E_1?$	5	4	2	-1	0	10
$E_2?$	4	6	1	0	-1	9
Z	200	230	70	0	0	0

Tal como o problema está formulado, não é possível obter uma solução de base com as variáveis E_1 e E_2 não negativas.

Note-se que E_1 e E_2 expressos em função das variáveis indicadas como não básicas no quadro são:

$$E_1 = -10 + 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$E_2 = -9 + 4x_1 + 6x_2 + x_3$$

e, portanto, o quadro construído não constitui uma base válida, por não obedecer à condição de não negatividade.

Vamos referir dois métodos para solucionar este problema, respectivamente, designados por **Método do Grande M** e **Técnica das Duas Fases**.

2.3.4.1 Método do “Grande M”

O **Método do “Grande M” (Big M)** pretende alterar a formulação do problema original por forma a permitir obter um Quadro Válido de Base com uma estrutura que possibilite a identificação fácil de uma Solução Válida de Base inicial. Este problema modificado deve produzir (existindo) uma Solução Óptima igual à do problema original.

Vamos introduzir Variáveis Artificiais no problema associadas às inequações do tipo maior ou igual.

Assim, para as duas equações:

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - E_1 + A_1 = 10$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - E_2 + A_2 = 9$$

Para forçar as Variáveis Artificiais A_1 e A_2 a serem nulas na solução final, é-lhes atribuído um custo muito elevado na Função Objectivo (Problema de Mínimo).

Se na solução final $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$, as equações são equivalentes às da formulação original.

A Função Objectivo do problema modificado toma a forma:

$$\text{Min: } z = 200x_1 + 230x_2 + 70x_3 + MA_1 + MA_2$$

Nesta expressão, **M** representa um **valor muito elevado**. Assim, para se obter um mínimo A_1 e A_2 serão (sendo possível) obrigados a serem nulos.

Tracemos o quadro relativo ao problema reformulado:

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
A_1	5	4	2	-1	0	1	0	10
A_2	4	6	1	0	-1	0	1	9
Z	200	230	70	0	0	M	M	0

O quadro não corresponde à forma exigida pelo *simplex*, porque os coeficientes na função objectivo correspondentes a variáveis na base não são nulos (coeficientes de A_1 e A_2).

Pode-se, utilizando as linhas do quadro, eliminar esses coeficientes. As linhas do quadro representam equações ordinárias, e M pode ser tratado como qualquer valor numérico.

Multiplicando a 1ª. linha do quadro por (-1) e somando-a à linha da função objectivo, elimina-se o coeficiente nessa linha relativo à coluna A_1 .

Multiplicando a 2ª. linha do quadro por (-1) e somando-a à linha da função objectivo, elimina-se o coeficiente nessa linha relativo à coluna A_2 .

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
A_1	5	4	2	-1	0	1	0	10
A_2	4	6	1	0	-1	0	1	9
Z	200	230	70	0	0	M	M	0
	-5M	-4M	-2M	M	0	-M	0	-10M
	-4M	-6M	-M	0	M	0	-M	-9M
	-9M+200	-10M+230	-3M+70	M	M	0	0	-19M

É fácil verificar que o valor da Função Objectivo está correcto

$$F.O. = 200x_1 + 230x_2 + 70x_3 + MA_1 + MA_2 = 10M + 9M = 19M$$

O facto de o valor da Função Objectivo inscrito no quadro ter o sinal negativo advém de estarmos a resolver o problema de $\{máx[-f(x)]\}$.

Prosseguindo na execução do algoritmo,

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
A_1	5	4	2	-1	0	1	0	10
A_2	4	6	1	0	-1	0	1	9
Z	-9M+200	-10M+230	-3M+70	M	M	0	0	-19M



	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
A_1	7/3	0	4/3	-1	2/3	1	-2/3	4
x_2	2/3	1	1/6	0	-1/6	0	1/6	3/2
Z	-7M/3	0	-4M/3	M	-2M/3	0	5M/3	-4M
	+140/3	0	+190/6		+230/6		-230/6	-345



	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
x_1	1	0	$4/7$	$-3/7$	$2/7$	$3/7$	$-2/3$	$12/7$
x_2	0	1	$-3/14$	$2/7$	$-5/14$	$-2/7$	$1/6$	$5/14$
Z	0	0	5	20	25	$M-20$	$M+25$	-425

Obtém-se, portanto, a **Solução Óptima**

$$x_1 = 12/7 \quad A_1 = 0$$

$$x_2 = 5/14 \quad A_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = 0$$

Note-se, ainda, que após A_2 abandonar a base a coluna correspondente poderia ter sido eliminada do quadro, pois nenhuma solução válida poderá ter $A_2 > 0$.

Para a Função Objectivo, obtém-se o valor de $-(-425)$.

O sinal da função objectivo, no quadro, aparece trocado porque em vez de se resolver

$$\text{Min: } z = 200x_1 + 230x_2 + 70x_3$$

resolveu-se

$$\text{Máx: } z = -200x_1 - 230x_2 - 70x_3$$

Desvantagens da Técnica do Grande "M"

A desvantagem da Técnica do "M" é, para além da acrescida dificuldade de cálculo, o erro computacional que pode resultar por se atribuir um valor muito elevado à constante **M**.

2.3.4.2 Técnica das Duas Fases

O Método ou Técnica das Duas Fases consiste em:

Fase I

Formular um novo problema, por substituição da função objectivo inicial pela soma das variáveis artificiais. Esta nova função objectivo é, então, minimizada, obedecendo às condições do problema original.

Se o problema tiver um **Espaço Válido de Soluções**, o valor mínimo da função objectivo será zero (o que indica que o valor de todas as variáveis artificiais é nulo).

Se, contudo, o valor mínimo não for nulo, não há Solução Válida, e o problema é designado por **Problema Impossível**.

Fase II

Utilizar a *solução óptima* da **Fase I** como solução de partida para o problema original (*Função Objectivo do Problema Original*).

Neste caso, a *função objectivo* inicial deve, primeiro ser expressa em função das *variáveis não básicas*.

Aplique-se a *Técnica das Duas Fases* ao problema:

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 9$$

com: *todas as variáveis não negativas*

As condições são transformadas em equações pela introdução das *variáveis de excesso* E_1 e E_2 e das *variáveis artificiais* A_1 e A_2 .

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - E_1 + A_1 = 10$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - E_2 + A_2 = 9$$

Fase I

Para a *Fase I*, o objectivo consiste em *minimizar* a soma das *variáveis artificiais*.

$$\text{Min}(A_1 + A_2)$$

O quadro correspondente tem a forma:

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
A_1	5	4	2	-1	0	1	0	10
A_2	4	6	1	0	-1	0	1	9
	0	0	0	0	0	1	1	0
	-5	-4	-2	1	0	-1	0	-10
	-4	-6	-1	0	1	0	-1	-9
Z	-9	-10	-3	1	1	0	0	-19

↑

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
A_1	7/3	0	4/3	-1	2/3	1	-2/3	4
x_2	2/3	1	1/6	0	-1/6	0	1/6	3/2
Z	-7/3	0	-4/3	1	-2/3	0	6/3	-4

↑

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	A_1	A_2	D
x_1	1	0	$4/7$	$-3/7$	$2/7$	$3/7$	$-2/7$	$12/7$
x_2	0	1	$-3/4$	$2/7$	$-5/14$	$-2/7$	$5/14$	$5/14$
Z	0	0	0	0	0	1	1	0

O valor da *Função Objectivo* é nulo. É, portanto, possível ter $A_1=0$ e $A_2=0$, isto é, obedecer ao conjunto de condições originais do problema.

A *Base Válida* construída com *Variáveis de Decisão* e/ou *Variáveis de Folga/Excesso* do enunciado original pode ser extraída do último quadro.

Fase II

Eliminam-se as colunas correspondentes às *Variáveis Artificiais* no último quadro da *Fase I*. Note-se que a 1ª. *Fase* permitiu encontrar uma *Base* construída apenas por *Variáveis de Decisão* e/ou *Variáveis de Folga/Excesso*. Esta *Base* não era evidente à partida.

Adopta-se a *Função Objectivo* original, inscrevendo-a no quadro:

	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	D
x_1	1	0	$4/7$	$-3/7$	$2/7$	$12/7$
x_2	0	1	$-3/4$	$2/7$	$-5/14$	$5/14$
Z	200	230	70	0	0	0
	-200	0	$-800/7$	$600/7$	$-400/7$	$-2400/7$
	0	-230	$345/7$	$460/7$	$575/7$	$-575/7$
Z	0	0	5	20	25	-425

A introdução da verdadeira *Função Objectivo* conduzia a um quadro em que não se cumpria a condição de a *Função Objectivo* ser expressa em função das *Variáveis não básicas*. A necessária manipulação passa por multiplicar a 1ª. *Linha* do quadro por (-200) e somá-la à *linha da Função Objectivo* e por multiplicar a 2ª. *Linha* do quadro por (-230) e somá-la à *linha da Função Objectivo*.

Para o exemplo apresentado, a modificação executada para obter o 1º. *Quadro Válido de Base* conduziu, imediatamente, à *Solução Óptima*. Poderia ter sido necessário executar várias iterações na 2ª. *Fase* antes de atingir a *Solução Óptima*.

O resultado da 1ª. *Fase* pode incluir *Variáveis Artificiais* na *Base* ao nível zero (*Solução Degenerada*). Isso significa que é possível encontrar uma *Solução Válida* para o problema, mas que a coluna correspondente a essa variável não pode ser eliminada na passagem à 2ª. *Fase*. Neste caso, a 2ª. *Fase* é executada, não sendo possível

qualquer modificação do quadro que obrigue a *variável artificial* a assumir um valor maior que zero.

2.3.4.3 Casos Especiais

Degenerescência

Considere o problema de Programação Linear do Exemplo 2.6, com a alteração da disponibilidade da terceira condição de 70 por 80:

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.: } \quad &5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ &4x_1 + 6x_2 \leq 230 \\ &2x_1 + x_2 \leq 80 \\ &\text{com: todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Após uma iteração o problema conduz ao seguinte quadro:

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
x_1	1	4/5	1/5	0	0	40
F_2	0	14/5	-4/5	1	0	70
F_3	0	-3/5	-2/5	0	1	0
Z	0	-1	2	0	0	400

Neste caso, a solução obtida ao fim da 1ª. iteração:

$$\begin{aligned} x_1 &= 40 & F_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 & F_2 &= 70 \\ & & F_3 &= 0 \end{aligned}$$

Para esta solução, verifica-se que em vez de 2 *Variáveis* nulas, obtiveram-se 3 *Variáveis* nulas. Para um problema com $m=5$ *variáveis* e $n=3$ equações, deveria ter-se 3 *Variáveis Básicas* (maiores que zero) e $m-n=2$ *Variáveis não básicas* (iguais a zero). Considera-se que a *variável* x_5 está na base ao nível zero.

Nestas condições, diz-se que o Simplex **degenerou**, ou que o problema era um **Problema Degenerado**.

A situação de degenerescência é explicada, porque a 3ª. condição não constitui, de facto, uma restrição ao sistema, uma vez que a 1ª. Recta é mais restritiva.

Solução Ótima Ilimitada

Exemplo 2.9: Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.: } \quad x_1 - x_2 &\leq 10 \\ \quad x_1 &\leq 20 \\ \text{com: } &\text{todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Este problema conduz ao seguinte quadro:

	x_1	x_2	F_1	F_2	D
F_1	1	-1	1	0	10
F_2	1	0	0	1	20
Z	-1	-2	0	0	0

↑

Acontece que não é possível escolher a *variável básica* que vai abandonar a *base*, porque a *coluna pivot* é constituída apenas por valores não positivos. Esta situação é explicada porque, graficamente, $x_2 \rightarrow +\infty$ e, consequentemente, $Z \rightarrow +\infty$.

Soluções Múltiplas

Exemplo 2.10: Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.: } \quad x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ \text{com: } &\text{todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Este problema conduz ao seguinte quadro óptimo:

	x_1	x_2	F_1	F_2	D
x_2	1/2	1	1/2	0	5/2
F_2	1/2	0	-1/2	1	3/2
Z	0	0	2	0	10

com a solução óptima:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & F_1 &= 0 \\ x_2 &= 5/2 & F_2 &= 3/2 \quad \text{e} \quad F.O. = 10 \end{aligned}$$

O coeficiente de x_1 na *Função Objectivo* é nulo. Isto significa que existe um custo/lucro nulo na inclusão de x_1 na *base*. Ou seja, existe uma solução óptima alternativa:

	x_1	x_2	F_1	F_2	D
x_1	1	0	-1	2	3
x_2	0	1	1	-1	1
Z	0	0	2	0	10

$$x_1=3 \quad F_1=0$$

$$x_2=1 \quad F_2=0 \quad \text{e} \quad F.O.=10$$

Problemas Impossíveis

Têm-se problemas impossíveis sempre que, no *quadro óptimo*, permaneçam *variáveis artificiais* na *base* com valor positivo.

2.3.4.4 Forma Matricial do Simplex

Os problemas escritos na forma canónica, isto é, problemas em que as restrições são todas de igualdade e as variáveis são não negativas, podem também ser escritos na forma matricial.

Quadro Inicial

	Var. decisão	Var. folga	
X_B	A	I	b
Z	$-C^T$	0^*	0

Quadro Intermédio ou Final

	Var. decisão	Var. folga	
X_B	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
Z	$-C^T + C_B^T B^{-1}A$	$C_B^T B^{-1}$	$C_B^T B^{-1}b$

onde:

$C^T = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ é o vector linha dos coeficientes das variáveis na *Função Objectivo*

$A = [a_{ij}]$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, é a matriz dos coeficientes das variáveis nas restrições

$b = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ é o vector coluna dos termos independentes

I é uma matriz identidade de ordem m

X_B é o vector coluna que inclui as m variáveis básicas

0^* é o vector linha constituído por m zeros

B é a submatriz de $[A | I]$, constituída pelas colunas correspondentes às variáveis básicas, pela ordem em que estas se encontram na base

C_B^T é o vector linha dos coeficientes das variáveis básicas da função objectivo

Se em vez de variáveis de folga for necessário considerar variáveis de excesso, então os quadros do Simplex da 2ª fase do Método das Duas Fases serão:

	Var. decisão	Var. excesso	Var. artificiais	
X_B	$B^{-1}A$	$-B^{-1}$	B^{-1}	$B^{-1}b$
Z	$-C^T + C_B^T B^{-1} A$	$-C_B^T B^{-1}$	$C_B^T B^{-1}$	$C_B^T B^{-1} b$

2.4 Dualidade

2.4.1 Definição da Formulação Dual

Definindo o **Problema Primal** como sendo o problema da determinação de $X=(x_1, \dots, x_n)$ que **minimiza** (problema de mínimo)

$$f = CX$$

sujeito a

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

o Problema Dual consiste em determinar $Y=(y_1, \dots, y_n)$ que **maximiza**

$$g = Yb$$

sujeito a

$$YA \leq C$$

$$Y \geq 0$$

Identicamente, para um **Problema Primal** de **maximização** com inequações do tipo *menor ou igual*, se define um correspondente **Problema Dual** de **minimização** com inequações do tipo *maior ou igual*.

Exemplo 2.11 (Exemplo numérico de formulação dual):

Considere como **Problema Primal** o problema definido no **Exemplo 2.6** por:

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.: } \quad &5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ &4x_1 + 6x_2 \leq 230 \\ &2x_1 + x_2 \leq 70 \end{aligned}$$

com: todas as variáveis não negativas.

Tem-se, então,

$$C = (10, 9) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 70 \end{pmatrix}$$

A **Formulação Dual** vem

$$\text{Min}(y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 70 \end{pmatrix} = \text{Min } 200y_1 + 230y_2 + 70y_3$$

sujeito a

$$(y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \geq (10, 9)$$

que é equivalente a

$$5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 10$$

$$4y_1 + 6y_2 + 1y_3 \geq 9$$

2.4.2 Teoremas da Dualidade

Teorema I – Qualquer solução para o **Problema Primal (Dual)** constitui um limite para o Valor Ótimo do **Problema Dual (Primal)**.

Teorema II – O valor da Solução Ótima para o **Problema Primal**, se existir, é igual ao valor da Solução Ótima do **Problema Dual**.

Teorema III – Teorema da Folga Complementar – Sempre que exista Folga/Excesso numa restrição do **Problema Primal (Dual)**, a variável correspondente no **Problema Dual (Primal)** tem valor nulo.

2.4.3 O Primal e as Soluções do Dual

Exemplo 2.12:

Considere um **Problema Primal** com o enunciado

$$\text{Max: } z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\text{s.a.: } 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

com: todas as variáveis não negativas.

O correspondente **Problema Dual** tem a formulação

$$\text{Min: } z = 15y_1 + 120y_2 + 100y_3$$

$$\text{s.a.: } 1y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 4$$

$$1y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 5$$

$$1y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 9$$

$$1y_1 + 2y_2 + 15y_3 \geq 11$$

com: todas as variáveis não negativas.

O Quadro Inicial para o *Primal* tem a forma

	x_1	x_2	x_3	x_4	F_1	F_2	F_3	D
F_1	1	1	1	1	1	0	0	15
F_2	7	5	3	2	0	1	0	120
F_3	3	5	10	15	0	0	1	100
Z	-4	-2	-9	-11	0	0	0	0

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$

Temos uma **Solução Tentativa** para o **Problema Dual** dada pelos coeficientes da Linha da Função Objectivo nas colunas correspondentes às Variáveis de Folga de cada uma das condições.

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Para se calcularem as folgas nas restrições do **Problema Dual**:

$$1y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 4 = -4$$

$$1y_1 + 5y_2 + 5y_3 - 5 = -5$$

$$1y_1 + 3y_2 + 10y_3 - 9 = -9$$

$$1y_1 + 2y_2 + 15y_3 - 11 = -11$$

e concluir que a solução proposta para o **Problema Dual** não é válida. As folgas calculadas representam os Custos Reduzidos ou Ganhos Potenciais associados ao **Problema Primal**.

Prosseguindo mais uma iteração do **Problema Primal** obtém-se o quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	F_1	F_2	F_3	D
F_1	4/5	2/3	1/3	0	1	0	-1/15	15
F_2	33/5	13/3	8/3	0	0	1	-2/15	120
x_4	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15	100
Z	-9/5	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15	0

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Folgas nas condições do Problema Dual}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Solução Tentativa do Dual}}$

E tem-se

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 11/15 \end{cases}$$

Pode-se calcular as folgas nas restrições do **Problema Dual**:

$$1y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 4 = 3 \cdot 11/15 - 4 = -9/5$$

$$1y_1 + 5y_2 + 5y_3 - 5 = 5 \cdot 11/15 - 5 = -4/3$$

$$1y_1 + 3y_2 + 10y_3 - 9 = 10 \cdot 11/15 - 9 = -5/3$$

$$1y_1 + 2y_2 + 15y_3 - 11 = 15 \cdot 11/15 - 11 = 0$$

e verificar, mais uma vez, que a *Folga nas Condições do Dual* equivalem aos *Custos Reduzidos do Primal*.

2.4.3.1 Interpretação da Dualidade no Algoritmo Simplex-Primal

Os coeficientes das *Variáveis de Folga* na linha da *Função Objectivo* de um *Quadro Primal* representam, em cada iteração valores tentativos para as *Variáveis Duais*.

O *Método Simplex-Primal* mantém a validade do *Problema Primal* e procura a validade para o *Problema Dual*.

O *Algoritmo Simplex-Primal* termina quando se obtém a validade do *Problema Dual*.

2.4.3.2. Interpretação das Variáveis Duais na Solução Óptima

O *Valor Óptimo* de uma *Variável Dual* indica de quanto a *Função Objectivo* se modifica com uma variação unitária na *disponibilidade* do recurso que lhe está associado.

Esta interpretação é imediata se observarmos a forma da *Função Objectivo* do *Problema Dual*.

$$\text{Valor Óptimo F.O.} = \sum (\text{disponibilidade do recurso} \cdot \text{variável óptima do dual associado})$$

2.4.4 O Algoritmo Simplex-Dual

A interpretação do *Algoritmo Simplex-Primal* feita com base na *Teoria da Dualidade* sugere um algoritmo alternativo que se designa por **Algoritmo Simplex-Dual**. Este algoritmo será aplicável a problemas expressos numa forma em que são válidos relativamente ao *Dual* e inválidos relativamente ao *Primal*. O objectivo do algoritmo é, então, manter a validade do *Problema Dual* e procurar forçar o *Problema Primal* à validade.

Algoritmo Simplex-Dual

Uma vez construído o *Quadro-Simplex* normal para um problema, a aplicação do algoritmo segue o seguinte conjunto de regras:

- Se houver variáveis do *Primal* na base com valores negativos, selecciona-se a linha correspondente à entrada mais negativa para constituir a *Linha Pivot*. Se todas as variáveis tiverem valores não negativos, foi obtida a *solução óptima*. Por este processo, seleccionam-se as variáveis do *Primal* que mais se afastam da *condição de não negatividade*. Estas correspondem aos *Ganhos Potenciais* associados ao *Problema Dual*.
- Efectuam-se as razões entre os coeficientes correntes da *Linha da Função Objectivo* correspondentes às variáveis não básicas do *Primal* e os coeficientes negativos da *Linha Pivot* escolhida. Selecciona-se como *Coluna Pivot* a correspondente à menor razão (em valor absoluto). Intrinsecamente, este processo obriga a variável do *Primal* a obedecer à *condição de não negatividade* e mantém a validade do *Problema Dual*.

Exemplo 2.13:

Considere o seguinte enunciado de um problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Min: } z &= 2x_1 + x_3 \\ \text{s.a.: } x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \\ \text{com: } &\text{todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Pode reescrever-se este enunciado para uma formulação válida para o *Dual* e inválida para o *Primal*.

$$\begin{aligned} \text{Min: } z &= 2x_1 + x_3 \\ \text{s.a.: } -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -5 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq -8 \\ \text{com: } &\text{todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

O correspondente quadro é

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	D	
F_1	-1	-1	1	1	0	-5	
F_2	-1	2	-4	0	1	-8	← Linha Pivot
Z	2	0	1	0	0	0	
Razão	-2		-1/4				
							↑ Coluna Pivot

Observe-se que neste quadro se tem uma *Solução Válida* do *Problema Dual* dada por

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

a que correspondem as folgas nas condições do Dual 2, 0 e 1.

Continuando a aplicar o algoritmo, obtém-se

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	D	
F_1	-5/4	-1/2	0	1	1/4	-7	← Linha Pivot
x_3	1/4	-1/2	1	0	-1/4	2	
Z	7/4	1/2	0	0	1/4	-2	
Razão	-7/5	-1					

↑
Coluna Pivot

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1/4 \end{cases}$$

a que correspondem as folgas nas condições do Dual 7/4, 1/2 e 0.

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	D
x_2	5/2	1	0	-2	-1/2	14
x_3	3/2	0	1	-1	-1/2	9
Z	1/2	0	0	1	1/2	-9

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1/2 \end{cases}$$

a que correspondem as folgas nas condições do Dual 1/2, 0 e 0.

Neste quadro tem-se, também, uma Solução Válida para o Problema Primal com $x_1=0$, $x_2=14$ e $x_3=9$.

Escrevendo a formulação Dual correspondente ao exemplo apresentado, é possível verificar as folgas correspondentes a cada uma das soluções encontradas na aplicação do algoritmo.

2.4.5 O Algoritmo Primal-Dual

Teve-se oportunidade de referir que na execução de um problema de Programação Linear se resolvem simultaneamente dois problemas, respectivamente, um *Problema Primal* e um *Problema Dual*. A essência destes métodos está em partir de uma formulação válida para um dos problemas e forçar, sistematicamente, o outro problema à validade.

O **Método Primal-Dual** surge, naturalmente, da extensão destas metodologias, permitindo que no quadro de partida as formulações de ambos os problemas sejam

inválidas. Procura-se, então, levar à validade a *formulação* que esteja mais próxima dessa condição. Depois, aplica-se o algoritmo (*Simplex-Primal* ou *Simplex-Dual*) necessário para validar o problema complementar.

Exemplo 2.14:

Considere o seguinte enunciado de um problema

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.: } 5x_1 + 2x_2 &\leq 44 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 44 \\ 1x_1 + 1x_2 &\geq 14 \\ \text{com: } &\text{todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

O problema pode ser representado na forma equivalente

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.: } 5x_1 + 2x_2 &\leq 44 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 44 \\ -1x_1 - 1x_2 &\leq -14 \\ \text{com: } &\text{todas as variáveis não negativas.} \end{aligned}$$

Passando à representação tabular, tem-se

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
F_1	5	2	1	0	0	44
F_2	2	3	0	1	0	44
F_3	-1	-1	0	0	1	-14
Z	-4	-3	0	0	0	0

Pode observar-se que ambas as *formulações* são *inválidas*.

Para o *Primal* tem-se uma variável (F_3) que não obedece à condição de não negatividade.

Para o *Dual*, a solução tentativa $y_1=0$, $y_2=0$ e $y_3=0$ não verifica as condições do *Dual*.

Para o caso presente, vai aplicar-se em primeiro lugar o *Método Simplex-Dual*. Deve, então, fazer-se x_2 entrar na base e F_3 sair da base.

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	D
F_1	3	0	1	0	2	16
F_2	-1	0	0	1	3	2
x_2	1	1	0	0	-1	14
Z	-1	0	0	0	-3	42

Este quadro apresenta já uma *solução válida* para o *Problema Primal*. A execução progredia, agora, pela aplicação do *Simplex-Primal*.

O método deve ser aplicado de uma forma sistemática (que conduza primeiro à validação de um dos problemas), pois, noutras condições, pode não convergir para uma *solução*. A aplicação não sistemática dos dois algoritmos pode conduzir a situações em que a aplicação de um dos algoritmos desfaz a evolução da *solução* obtida pelo outro algoritmo.

2.4 Análise de Sensibilidade/ Pós-Optimização

2.4.1 Introdução

O conhecimento da *Solução Óptima* de um *Problema de Programação Linear* é, em si, de valor limitado. É importante conhecer o efeito de variações tanto nos coeficientes das restrições (*coeficientes tecnológicos*) como no valor dos coeficientes da *Função Objectivo*.

Fundamentalmente, pretende-se saber qual o domínio possível de variação dos coeficientes do problema sem que haja alteração das variáveis que constituem a base no *Quadro Óptimo*.

Considere-se um *Problema de Programação Linear* com o seguinte *Quadro Inicial*:

	x_1	x_2	x_3	x_4	F_1	F_2	F_3	D
F_1	1	1	1	1	1	0	0	35
F_2	1	4	2	2	0	1	0	80
F_3	2	3	6	1	0	0	1	90
Z	-5	-4	-6	8	0	0	0	0

O correspondente quadro para a *Solução Óptima* é

	x_1	x_2	x_3	x_4	F_1	F_2	F_3	D
x_1	1	$3/4$	0	$5/4$	$3/2$	0	$-1/4$	30
F_2	0	$11/4$	0	$5/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	40
x_3	0	$1/4$	1	$-1/4$	$-1/2$	0	$1/4$	5
Z	0	$5/4$	0	$51/4$	$9/2$	0	$1/4$	180

2.4.2 Variações nos Coeficientes da Função Objectivo

- **Decréscimo em c_j para x_j não básico ou pequeno aumento em c_j para x_j básico**

Qualquer destas situações não altera a selecção de *Variáveis Básicas* no quadro da *Solução Óptima*. Um decréscimo em c_j para x_j não básico torna x_j ainda menos atractivo para pertencer à base. Um pequeno aumento em c_j para x_j básico reforça o interesse da localização dessa variável na base do quadro da *Solução Óptima*.

Um grande aumento em c_j para x_j básico pode, contudo, implicar a libertação de recursos de outras actividades, para uma especialização na actividade tornada mais atractiva do ponto de vista da contribuição para a *Função Objectivo*.

- **Aumento em c_j para x_j não básico**

Tome-se para exemplo a variável x_2 .

Na *Função Objectivo* inicial, tem-se $c_2=4$.

Observando a linha da *Função Objectivo* do quadro final, pode-se concluir que, se no quadro inicial se tivesse considerado um coeficiente de x_2 na *Função Objectivo* igual a $c_2'=c_2+5/4$, obter-se-ia no quadro final um coeficiente igual a zero. Um aumento superior a $5/4$ implicaria que x_2 passasse a ser variável candidata a entrar na base.

Analogamente, o incremento máximo para c_4 é de $51/4$.

Concluindo, o aumento máximo que o coeficiente na *Função Objectivo* de uma variável não básica pode ter é dado pelo valor inscrito na *Linha da Função Objectivo do Quadro Óptimo*.

- **Grande Variação em c_j para x_j básico**

Tome-se, como exemplo, a variável básica x_1 .

Considere-se que o coeficiente na *Função Objectivo* para essa variável toma o valor $c_1'=c_1-a$. A *Função Objectivo* passará a ter o valor $z'=z-ax_1$, e deve ser expressa em função das variáveis não básicas.

$$Z=180-(5/4)x_2-(51/4)x_4-(9/2)F_1-(1/4)F_3$$

sendo

$$x_1=30-(3/4)x_2-(5/4)x_4-(3/2)F_1+(1/4)F_3$$

Tem-se

$$Z'=(180-30a)-(5/4-3/4a)x_2-(51/4-5/4a)x_4-(9/2-3/2a)F_1-(1/4+1/4a)F_3$$

Haverá mudança de sinal nos coeficientes da *Função Objectivo* se:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 5/4 - 3/4a < 0 & \longrightarrow a > 5/3 \\ 51/4 - 5/4a < 0 & \longrightarrow a > 51/5 \\ 9/2 - 3/2a < 0 & \longrightarrow a > 3 \\ 1/4 + 1/4a < 0 & \longrightarrow a < -1 \end{array} \right.$$

O domínio possível de variação de a sem que haja alteração da base é:

$$-1 \leq a \leq 5/3$$

Isto significa um domínio de variação possível para c_1 dado por

$$5 - 5/3 \leq c_1 \leq 5 - (-1)$$

$$10/3 \leq c_1 \leq 6$$

Se $a \geq 5/3$, então x_2 torna-se candidata a entrar na base.

Se $a \leq -1$, então F_3 torna-se candidata a entrar na base.

2.4.3 Variações nas Disponibilidades das Restrições

- **Aumento da disponibilidade b_j quando a variável de folga relativa a uma condição está na base**

Uma *variável de folga básica* significa que o recurso representado pela condição não é escasso. Aumentar a *disponibilidade* desse recurso implica, apenas, aumentar de igual quantidade o valor da *variável de folga na base*.

- **Decréscimo da disponibilidade b_j quando a variável de folga relativa a uma condição está na base**

Desde que o decréscimo na *disponibilidade* não exceda o valor da *variável de folga na base*, o *Quadro Óptimo* mantém-se válido. Verifica-se, apenas, um decréscimo correspondente no valor da *variável de folga*.

- **Variação da disponibilidade b_j quando a variável de folga relativa a uma condição não está na base**

Neste caso, pode-se afirmar que a *Solução* permanece válida enquanto b_j no *Quadro Final* for maior ou igual a zero.

Análise-se uma variação de valor a na primeira linha do quadro.

No *Quadro Inicial* x_5 representa a *Variável de Folga* correspondente à primeira condição.

No *Quadro Inicial*, a primeira linha toma a forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35 + a$$

O conjunto das *restrições* do problema passa a ter *disponibilidades* que podem ser descritas por

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a$$

O vector coluna associado a a sofre (do *Quadro Inicial* para o *Quadro Final*) as mesmas transformações que a coluna associada à variável x_5 .

A coluna de D no *Quadro Final* vai alterar-se para

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} a$$

Para que o *Quadro Final* se mantenha válido, é necessário que

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 \rightarrow 30 + 3/2a \geq 0 & \rightarrow a \text{ pode decrescer até } -20 \\ F_2 \rightarrow 40 - 1/2a \geq 0 & \rightarrow a \text{ pode aumentar até } +80 \\ x_3 \rightarrow 5 - 1/2a \geq 0 & \rightarrow a \text{ pode aumentar até } +10 \end{array} \right.$$

Portanto,

$$-20 \leq a \leq 10$$

$$35 - 20 \leq b_1 \leq 35 + 10$$

$$15 \leq b_1 \leq 45$$

2.4.4 Introdução de uma variável

A inclusão de uma nova variável no problema não altera o número de restrições, logo, a *Solução Básica Admissível* óptima do problema (sem a nova variável) continua a ser admissível para o novo problema. Assim, apenas é necessário incluir uma coluna no quadro óptimo (do problema sem a nova variável) e calcular a representação da coluna (dos coeficientes da nova variável em cada uma das restrições e do custo reduzido), da nova variável, na base final.

- Se a linha dos custos reduzidos do novo quadro do Simplex incluir apenas valores não negativos, então o quadro é óptimo para o novo problema. Senão, é necessário continuar o método do Simplex até atingir o quadro óptimo.

Suponha-se que se adicionou ao problema em estudo uma nova variável (x_5), com o valor 5 no coeficiente da f.o. e os valores 2, 3 e 4 nos coeficientes das suas restrições, respectivamente.

É necessário efectuar:

- Cálculo da representação da coluna de x_5 na base final

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Cálculo da representação do coeficiente de x_5 na f.o., na base final
($-C^T + C_B^T B^{-1} A$)

$$-5 + [5 \ 0 \ 6] B^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5$$

Quadro do simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F_1	F_2	F_3	D
x_1	1	$3/4$	0	$5/4$	2	$3/2$	0	$-1/4$	30
F_2	0	$11/4$	0	$5/4$	1	$-1/2$	1	$-1/4$	40
x_3	0	$1/4$	1	$-1/4$	0	$-1/2$	0	$1/4$	5
Z	0	$5/4$	0	$51/4$	5	$9/2$	0	$1/4$	180



O quadro é ótimo!

2.4.5 Introdução de uma restrição

Neste caso, há que introduzir uma nova restrição após a resolução do problema. Entre várias razões para esta situação ocorrer, existe a possibilidade de a restrição ter sido omitida propositadamente, com o objectivo de diminuir o esforço computacional por ter sido considerada a restrição de menor exigência, mas que, no entanto, precisa de ser comparada com a solução ótima obtida.

- Se a solução ótima obtida satisfaz a nova restrição, então estamos ainda perante a melhor solução admissível, ou seja, a solução ótima, mesmo que esta nova restrição seja adicionada ao modelo. Se, por outro lado, a solução ótima obtida não satisfaz a nova restrição e se se pretende obter a nova solução ótima, então introduz-se a nova restrição no quadro ótimo exactamente como se este fosse o quadro inicial, com uma variável adicional (auxiliar ou artificial) definida como sendo a variável básica desta nova linha.

2.5 Casos Particulares da Programação Linear

2.4.1 Introdução

Os algoritmos correntes de programação linear e, em particular, o Simplex, permitem resolver problemas muito diversos que podem ser formulados de acordo com a forma canónica de um problema de PL. Existem, contudo, problemas que apresentam uma estrutura particular da qual pode ser tirado partido para desenvolver algoritmos mais simples e mais eficientes que se aplicam apenas a esse tipo de problemas. Esses algoritmos correspondem, em geral, a versões simplificadas ou expeditas do Simplex. São exemplos de situações deste tipo os problemas de transporte, transexpedição e afectação que correspondem precisamente a problemas que podem ser formulados em termos de PL, mas para os quais foram desenvolvidos algoritmos resolutivos específicos que podem ser utilizados com grande vantagem.

2.4.2 Transportes

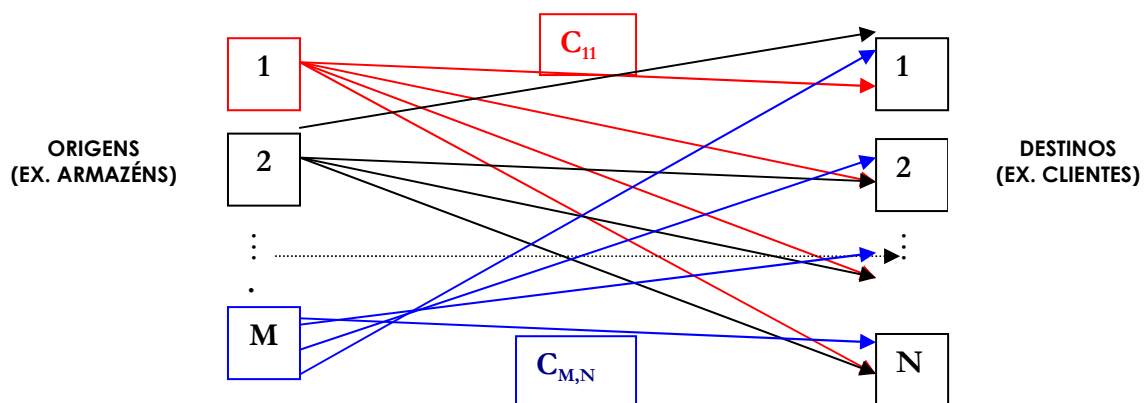
2.6.2.1 Introdução

O chamado "problema de transportes", embora nem sempre envolva transportes no sentido real, é um dos casos particulares do modelo geral de PL com utilização corrente. Basicamente, o modelo de transporte traduz uma situação em que se pretende minimizar ou maximizar o custo total de transporte de um artigo entre um conjunto de origens e um conjunto de destinos.

2.6.2.2 Definição Matemática

- Transporte de uma comodidade (produto)
- Desde m origens com disponibilidades $a_1, a_2, \dots, a_m$
- Para n destinos com procura $b_1, b_2, \dots, b_n$
- C_{ij} = custo unitário de transporte da origem i para destino j
(N.B igual a $+\infty$ se i não pode/deve fornecer j)

Exemplo 2.3



Pretendemos determinar que quantidades x_{ij} devem ser transportadas entre cada origem i e cada destino j , para obter esse custo mínimo.

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (\text{custo total transporte})$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{Oferta (n restrições)}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \text{Procura (m restrições)}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Este modelo pode ser visto como um problema de Programação Linear, pois tanto a função objectivo como as restrições são lineares.

Particularidades:

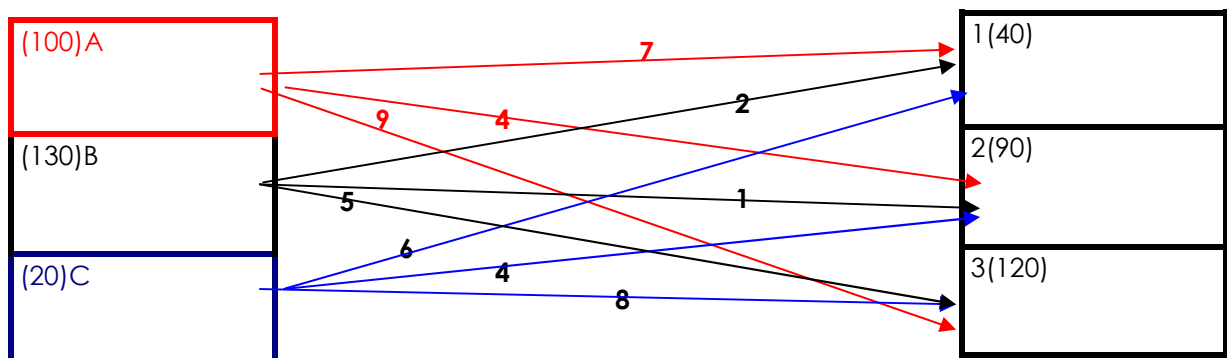
- Restrições do tipo igualdade
- Coeficientes não nulos das variáveis nas restrições são iguais a 1.

2.6.2.3 Balanceamento de um Modelo de Transportes

Para o Modelo de Transportes devemos ter igualdade entre a Disponibilidade Total e a Procura Total, i.e

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n b_j$$

Matriz de Transportes



Podemos representar este problema através de um quadro de transportes.

- Na coluna à esquerda do quadro identificam-se as várias origens.
- A coluna da direita representa a disponibilidade em cada.
- Na linha de cima do quadro identificam-se os vários destinos.
- A linha de baixo representa a procura em cada um dos destinos.
- No canto inferior direito de cada célula representamos o custo de transporte entre a origem e o destino.
- No centro de cada célula encontra-se o valor que corresponde à quantidade a transportar entre a origem e o destino correspondentes.

O seguinte quadro representa uma solução equilibrada, como passamos a verificar.

	1	2	3	
A	x_{11} 7	x_{12} 4	x_{13} 9	100
B	x_{21} 2	x_{22} 1	x_{23} 5	130
C	x_{31} 6	x_{32} 4	x_{33} 8	20
	40	90	120	

Restrições das Origens

As equações representadas pelas linhas do quadro verificam

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 130$
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20$

Restrições dos Destinos

As equações representadas pelas colunas do quadro verificam:

- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90$
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$

MINIMIZAR O CUSTO TOTAL DO TRANSPORTE:

$$\text{MIN } F(X) = 7x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + 2x_{21} + 1x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 4x_{32} + 8x_{33}$$

Oferta > Procura

	1	2	3	
A	x_{11} 20	x_{12} 22	x_{13} 17	30
B	x_{21} 12	x_{22} 9	x_{23} 8	12
	14	7	11	32

Onde

 x_{ij} = QUANTIDADE A TRANSPORTAR DA ORIGEM "I=1,2" PARA O DESTINO "J=1,2,3"

RESTRIÇÕES DAS ORIGENS (OFERTA):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 12$$

RESTRIÇÕES DOS DESTINOS:

$$x_{11} + x_{21} = 14$$

$$x_{12} + x_{22} = 7$$

$$x_{13} + x_{23} = 11$$

Minimizar o Custo Total do transporte:

$$\text{Min } f(x) = 20x_{11} + 22x_{12} + 17x_{13} + 12x_{21} + 9x_{22} + 8x_{23}$$

Como equilibrar um modelo onde a Oferta > Procura?

Temos de criar um Destino Artificial.

Neste caso, quantidades recebidas num Destino Artificial de qualquer origem correspondem a disponibilidade Não Utilizada.

	1	2	3	Destino Artificial	
A	x_{11} 20	x_{12} 22	x_{13} 17	A1 0	30
B	x_{21} 12	x_{22} 9	x_{23} 8	A2 0	12
	14	7	11	10	42

Quantidades transportadas de uma Origem Artificial para qualquer destino correspondem a procura Não Satisfeita.

Minimizar o Custo Total do transporte:

$$\text{Min } f(X) = 20 x_{11} + 22 x_{12} + 17 x_{13} + 0A_1 + 12 x_{21} + 9 x_{22} + 8 x_{23} + 0A_2$$

Oferta < Procura

	1	2	3	
A	x_{11} 20	x_{12} 22	x_{13} 17	10
B	x_{21} 12	x_{22} 9	x_{23} 8	12
	14	7	11	32

Onde

x_{ij} = QUANTIDADE A TRANSPORTAR DA ORIGEM "i=1,2" PARA O DESTINO "j=1,2,3"

RESTRIÇÕES DAS ORIGENS (OFERTA):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 12$$

RESTRIÇÕES DOS DESTINOS (PROCURA):

$$x_{11} + x_{21} \leq 14$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 7$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 11$$

Minimizar o Custo Total do transporte:

$$\text{Min } f(X) = 20 x_{11} + 22 x_{12} + 17 x_{13} + 12 x_{21} + 9 x_{22} + 8 x_{23}$$

Como equilibrar um modelo onde a Oferta < Procura?

Temos de criar uma Origem Artificial.

Neste caso quantidades transportadas de uma Origem Artificial para qualquer destino correspondem a procura Não Satisfeita.

	1	2	3	
A	x_{11} 20	x_{12} 22	x_{13} 17	10
B	x_{21} 12	x_{22} 9	x_{23} 8	12
Origem Artificial	A1 0	A2 0	A3 0	10
	14	7	11	32

$$\text{Min } f(X) = 20 x_{11} + 22 x_{12} + 17 x_{13} + 12 x_{21} + 9 x_{22} + 8 x_{23} + 0A_1 + 0A_2 + 0A_3$$

Resumo

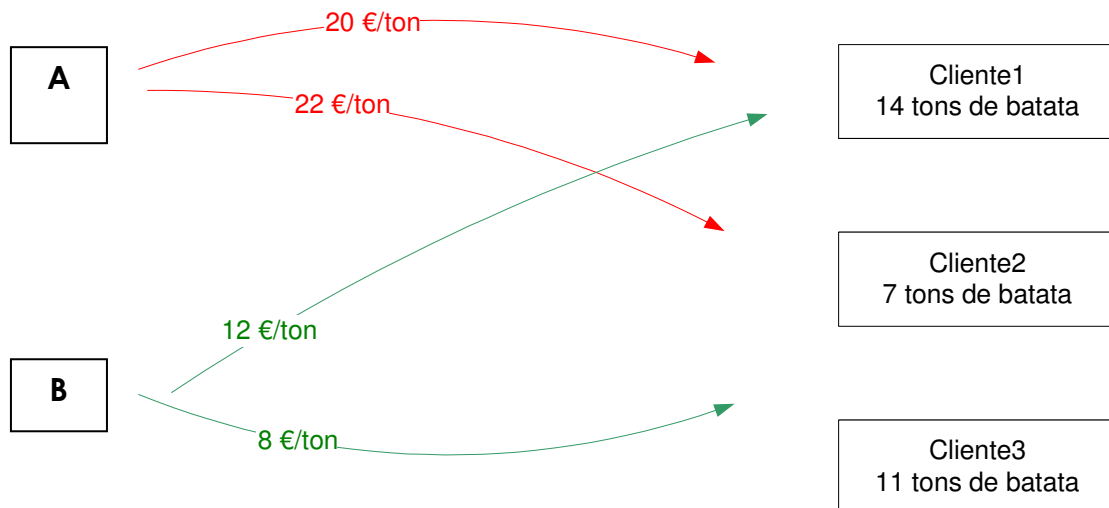
Quando não houver equilíbrio entre a Disponibilidade e a Procura temos de introduzir:

- Origem Artificial – se a disponibilidade for menor que a procura.
- Destino Artificial – se a procura for menor que a disponibilidade.

Numa solução:

- Quantidades transportadas de uma Origem Artificial para qualquer destino correspondem a procura Não Satisfeita.
- Quantidades recebidas num Destino Artificial de qualquer origem correspondem a disponibilidade Não Utilizada.

Matriz de Transportes com custos desconhecidos



	1	2	3	
A	x_{11} 7	x_{12} 4	x_{13} M	100
B	x_{21} 2	x_{22} M	x_{23} 5	130
	40	90	100	

BIG M
VALOR INFINITO
(VALOR INFINITO)

2.6.2.4 Variáveis Básicas num Modelo de Transportes

O problema de transportes é, como vimos, um Problema de programação linear, logo o número de variáveis básicas é igual ao número de equações lineares independentes.

Nestes problemas vimos que o total da procura é igual ao total da disponibilidade. Uma das condições pode, portanto, ser obtida a partir das restantes.

Assim, para m origens e n destinos temos $(m+n)$ condições. O número de equações linearmente independentes é $(m+n-1)$.

No exemplo anterior o número de variáveis básicas é : $2+3-1=4$

2.6.2.5 Solução Válida de Base para um Modelo de Transportes

As condições que uma solução válida de base deve cumprir traduzem-se na verificação das condições de Disponibilidade e de Procura, na verificação das Condições de Não-Negatividade e na existência de $(m+n-1)$ variáveis não nulas.

O seguinte quadro representa uma solução válida, como passamos a verificar.

	1	2	3	
A	7	70 4	30 9	100
B	40 2	1	90 5	130
C	6	20 3	8	20
	40	90	120	

As equações representadas pelas linhas do quadro verificam:

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0 + 70 + 30 = 100$
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40 + 0 + 90 = 130$
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} = 0 + 20 + 0 = 20$

As equações representadas pelas colunas do quadro verificam:

- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0 + 40 + 0 = 40$
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 + 0 + 20 = 90$
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 + 90 + 0 = 120$

Nenhuma das variáveis assume valores negativos. Podemos afirmar que o quadro representa uma Solução Válida.

Ao todo temos 5 variáveis não nulas $(m+n-1)$, o que corresponde ao número de equações linearmente independentes. Podemos afirmar que o quadro representa, portanto, uma Solução Válida de Base.

A Solução é:

- $x_{A2} = 70$ unidades transportadas entre A e 2
- $x_{A3} = 30$ unidades transportadas entre A e 3
- $x_{B1} = 40$ unidades transportadas entre B e 1

- $x_{B3} = 90$ unidades transportadas entre B e 3
- $x_{C2} = 20$ unidades transportadas entre C e 2

O custo dessa solução é

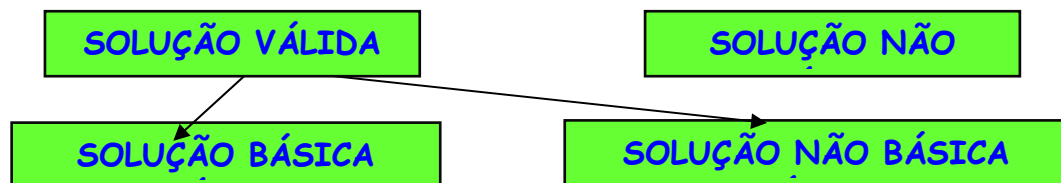
$$C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} = 4 \times 70 + 9 \times 30 + 2 \times 40 + 5 \times 90 + 3 \times 20 = 1140$$

O seguinte quadro representa uma solução válida. Contudo, não é uma solução básica porque o número de variáveis básicas é:

$$7 \neq m+n-1 = 5$$

	1	2	3	
A	20 7	50 4	30 9	100
B	20 2	20 1	90 5	130
C	6	20 3	8	20
	40	90	120	

Resumo



Dê exemplo de cada uma delas.

2.6.2.6 Análise da Optimalidade de uma Solução de Base

A solução anterior só será ótima, se não puder ser melhorada. Vamos então verificar se a entrada na base de uma variável não básica do quadro tem potencial para melhorar o valor da Função Objectivo.

Qualquer iteração deve traduzir-se pela passagem de uma variável básica a não básica, e de uma variável não básica a básica. Contudo, qualquer iteração deve

garantir que as equações relativas às linhas (disponibilidades) e às colunas (procuras) do quadro são satisfeitas.

Para cada célula não básica, vamos construir um circuito que aumente essa célula uma unidade, que passe apenas em outras células básicas, de tal forma que se mantenha a verificação das equações do quadro.

Determinamos, então, a variação do valor da função objectivo. Esse valor indicará o Ganho Potencial associado à passagem da célula a célula básica.

Exemplo 2.15

- Vejamos o ganho potencial de (A1)

	1	2	3	
A		70	30	100
	7	4	9	
B	40		90	130
	2	1	5	
C		20		20
	6	3	8	
	40	90	120	

Neste caso, a variação $\Delta(A,1) = +7 - 9 + 5 - 2 = +1$

- Vejamos o ganho potencial de (B2)

	1	2	3	
A		70	30	100
	7	4	9	
B	40		90	130
	2	1	5	
C		20		20
	6	3	8	
	40	90	120	

Diagrama de circuitos para a célula (B,2):

- Circuito 1 (verde): (B,2) → (B,1) → (A,1) → (A,3) → (B,3). Variação: $+1 - 5 + 9 - 4 = +1$.
- Circuito 2 (azul): (B,2) → (C,2) → (C,3) → (A,3) → (A,1) → (B,1). Variação: $+1 - 8 + 9 - 7 + 2 = -4$.

$\Delta(B,2) = +1 - 5 + 9 - 4 = +1$

- Vejamos o ganho potencial de (C3)

	1	2	3	
A		70	+1	100
		7	4	
B	40		90	130
		2	1	
C		20	-1	20
		6	3	
	40	90	120	

$$\Delta(C,3) = +8 - 3 + 4 - 9 = 0$$

- Vejamos o ganho potencial de (C1)

	1	2	3	
A		70	+1	100
		7	4	
B	40	-1	90	130
		2	1	
C		+1	-1	20
		6	3	
	40	90	120	

$$\Delta(C,1) = +6 - 2 + 5 - 9 + 4 - 3 = +1$$

Nenhuma célula possui potencial para melhorar o valor da Função Objectivo, pelo que a solução apresentada constitui uma Solução Óptima.

Contudo, esta solução não é única, porque se célula (C3) tem um custo zero, podemos obter uma solução óptima alternativa se esta célula passar a básica. Para esta passagem, devemos observar o circuito que construirmos, para ver o ganho potencial, determinar o valor máximo a transportar, tendo em conta que todas as soluções de base têm de ser não negativas.

	1	2	3	
A	7	$70+\theta$	$30-\theta$	100
B	40	2	90	130
C	6	$20-\theta$	$+\theta$	20
	40	90	120	

Para que este quadro seja válido, é necessário que:

$$\begin{aligned} 20-\theta &\geq 0 \\ 30-\theta &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \theta_{\max} = 20$$

A solução alternativa obtém-se substituindo θ por 20. Assim a nossa solução alternativa é:

	1	2	3	
A	7	90	10	100
B	40	2	90	130
C	6	3	20	20
	40	90	120	

E o custo é $C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \cdot x_{ij} = 4 \times 90 + 9 \times 10 + 2 \times 40 + 5 \times 90 + 8 \times 20 = 1140$.

2.6.2.7 Obtenção da Primeira Solução Válida de Base

Introdução

O quadro de transportes que serviu de ponto de partida para a análise de optimabilidade era já um quadro válido de base.

Para um problema apresentado na forma de um conjunto de disponibilidades nas origens e valores de procura nos destinos, torna-se necessário definir metodologias que permitam encontrar uma primeira solução válida de base.

Vamos referir dois métodos de obtenção de um quadro válido de base: o Método do Canto Noroeste e o Método do Custo Mínimo.

Nota - Qualquer método exige que o problema de transportes esteja equilibrado.

Método do Canto NW

- 1) Começar pela célula do canto superior esquerdo do quadro (canto NW).
- 2) Inscrever na célula uma quantidade que não exceda a disponibilidade na origem correspondente à célula nem a procura no destino à célula.
- 3) Subtrair à disponibilidade na origem e na procura do destino o valor que lhes foi atribuído.
- 4) No passo anterior, um dos valores da disponibilidade ou procura residual é reduzido a zero. Consideramos que, ou a linha ou a coluna, ficou saturada. A linha ou coluna nesta situação devem ser cortadas. Se ambas ficaram saturadas só uma deve ser cortada.
- 5) Se no passo anterior uma linha tiver sido saturada, deve passar-se à linha seguinte e repetir o passo 2. Se tiver sido saturada uma coluna, deve passar-se à coluna seguinte e repetir passo 2.
- 6) O processo termina quando faltar apenas uma linha ou coluna para saturar.

Nota: Neste processo não são contabilizados os custos.

Exemplo 2.16

Considere-se o seguinte problema de transportes:

Origens	Disponibilidades	Destino	Procura
A	70	1	50
B	60	2	30
C	20	3	30
		4	40

	1	2	3	4	
A	50 7	13	13	10	70(20)
B	8	9	12	7	60
C	15	6	8	10	20
	50 (0)	30	30	40	

	1	2	3	4	
A	50 7	20 13	13	10	70(20)(0)
B	8	10 9	30 12	20 7	60(50)(20)(0)
C	15	6	8	20 10	20
	50 (0)	30 (10) (0)	30 (0)	40	

Solução válida de base tem o número de variáveis básicas ($n+m-1=6$) e o custo é $C = 7 \times 50 + 13 \times 10 + 10 \times 9 + 30 \times 12 + 7 \times 20 + 20 \times 10 = 1400$

Método do Custo Mínimo

A essência deste método consiste em procurar atribuir a maior quantidade possível a células de menor custo. Deve notar-se que não existe garantia de esta atribuição sequencial obter o resultado pretendido, uma vez que as primeiras atribuições vão determinar as células e quantidades que podem ser decididas posteriormente.

A identificação das linhas e das colunas saturadas segue a mesma definição indicada pelo método do canto NW. O critério de paragem é idêntico.

Exemplo 2.17

Considere-se o mesmo problema do Exemplo 2.16

	1	2	3	4	
A	50 7	13	20 13	10	70 (20)(0)
B	8	10 9	10 12	40 7	60 (20)(10)(0)
C	15	20 6	8	10	20(0)
	50 (0)	30 (10) (0)	30 (20)	40 (0)	

nº de variáveis básicas é $m+n-1=6$ e o custo é

$$C = 7 \times 50 + 13 \times 20 + 10 \times 9 + 10 \times 12 + 7 \times 40 + 20 \times 6 = 1220$$

2.6.2.8 Melhoria de Solução

Os métodos anteriores dão-nos uma solução válida básica mas não nos dão a ótima, ou pelo menos não temos essa garantia.

Existem vários algoritmos para melhorar a solução, mas nesta disciplina iremos simplesmente falar no método dos multiplicadores, que se baseia na teoria da Dualidade.

Considere-se o problema:

	Cliente 1	Cliente 2	Oferta	
Armazém 1	x_{11} 4	x_{12} 6	5 ton	u_1
Armazém 2	x_{21} 5	x_{22} 9	4 ton	u_2
Procura	3 ton	6 ton		v_1 v_2

Modelo de Transporte (Primal)	Variáveis Duais associadas	Modelo Dual
Min $f(X) = 4x_{11} + 6x_{12} + 5x_{21} + 9x_{22}$		Max $g(u,v) = 5u_1 + 4u_2 + 3v_1 + 6v_2$
Linha 1: $x_{11} + x_{12} = 5$	u_1	$u_1 + v_1 \leq 4$
Linha 2: $x_{21} + x_{22} = 4$	u_2	$u_1 + v_2 \leq 6$
Coluna 1: $x_{11} + x_{21} = 3$	v_1	$u_2 + v_1 \leq 5$
Coluna 2: $x_{12} + x_{22} = 6$	v_2	$u_2 + v_2 \leq 9$
$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2; j=1,2)$		u_i, v_j livres $(i=1,2; j=1,2)$

Então,

Modelo de Transporte (Dual)

$$\text{Max } g(u,v) = 5u_1 + 4u_2 + 3v_1 + 6v_2$$

$$u_1 + v_1 + y_{11} = 4$$

$$u_1 + v_2 + y_{12} = 6$$

$$u_2 + v_1 + y_{21} = 5$$

$$u_2 + v_2 + y_{22} = 9$$

$$u_i, v_j \text{ livres}; y_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2; j=1,2)$$

A restrição Dual associada à variável x_{ij} é $u_i + v_j \leq c_{ij}$
Na forma padrão é $u_i + v_j + y_{ij} = c_{ij}$

RESTRIÇÃO PARA VB

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

RESTRIÇÃO PARA VNB

$$Y_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

Cálculo da Solução Dual

Consideremos a solução:

	CLIENTE 1	CLIENTE 2	OFERTA
ARMAZÉM 1	4 3	6 2	5 TON
ARMAZÉM 2	5 4	9	4 TON
PROCURA	3 TON	6 TON	

1ª Restrições para VB

$$\text{VB } x_{11}: \quad u_1 + v_1 = 4$$

$$\text{VB } x_{12}: \quad u_1 + v_2 = 6$$

$$\text{VB } x_{22}: \quad u_2 + v_2 = 9$$

Considerando $u_1 = 0$:

$$u_1 + v_1 = 4 \quad v_1 = 4$$

$$u_1 + v_2 = 6 \quad v_2 = 6$$

$$u_2 + v_2 = 9 \quad u_2 = 3$$

3 equações = $m+n-1$ VB

4 variáveis

Sistema indeterminado de ordem 1

Considerar uma das variáveis nula

Podemos então escrever:

	Cliente 1	Cliente 2	Oferta	
Armazém 1	3  4	2  6	5 ton	$u_1 = 0$
Armazém 2	5	4  9	4 ton	$u_2 = 3$
Procura	3 ton	6 ton		$v_1 = 4 \quad v_2 = 6$

2ª Restrições para VNB

VNB x_{21} :

$$y_{21} = 5 - (u_2 + v_1)$$

$$y_{21} = 5 - (3 + 4)$$

$$y_{21} = -2$$

VARIÁVEL DE FOLGA
NEGATIVA!!!!

Mudança de base

	CLIENTE 1	CLIENTE 2	OFERTA
ARMAZÉM 1	3 4	2 6	5 TON
ARMAZÉM 2	5	4 9	4 TON
PROCURA	3 TON	6 TON	

Sabemos então que se a variável não básica x_{21} pode trazer um ganho de 2U.M.

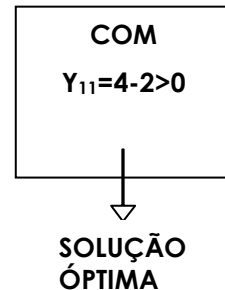
Que quantidade pode ser mudada?

	Cliente 1	Cliente 2	Oferta	
Armazém 1	4 $3-\theta$	6 $2+\theta$	5 ton	
Armazém 2	5 θ	9 $4-\theta$	4 ton	
Procura	3 ton	6 ton		

$3-\theta \geq 0$
 $4-\theta \geq 0 \Rightarrow \theta = 3$

Assim a solução é

	Cliente 1	Cliente 2	Oferta	
Armazém 1	4	6	5 ton	$u_1=0$
Armazém 2	5	9	4 ton	$u_2=3$
Procura	3 ton	6 ton		
	$v_1=2$	$v_2=6$		



2.6.3 Afectação

2.6.3.1 Definição e formalização do problema

Existem problemas de Programação Linear que se podem formalizar do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a. } \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Estes problemas designam-se por problemas de afectação. Note-se que os valores possíveis para as variáveis são apenas 0 e 1.

Estes programas são ideais, por exemplo, para formalizar situações em que se tem um certo número de operários e que se pretende afectar o desempenho do mesmo número de tarefas (um operário a uma tarefa). Assim, $x_{ij}=1$ se o operário i efectuar a tarefa j , $x_{ij}=0$ caso contrário.

Os problemas de afectação envolvem, assim, a indicação de trabalhadores a tarefas numa base de um para um (mais geralmente, envolvem permutações de um conjunto de objectos). Assume-se que o número de trabalhadores é igual ao número de tarefas – uma condição que pode ser garantida pela criação de trabalhadores fictícios ou de tarefas fictícias, se necessário – e que é conhecido o tempo c_{ij} necessário para o i -ésimo trabalhador terminar a j -ésima tarefa (ou o valor do i -ésimo objecto na j -ésima posição). O objectivo é afectar cada um dos trabalhadores a cada uma das tarefas,

de modo a que estas sejam concluídas num tempo total mínimo (ou encontrar a permutação que tenha o maior valor total).

Os problemas de afectação podem ser convertidos em problemas de transporte, considerando-se os operários como origens e as tarefas como destinos em que todas as ofertas e todas as procuras são iguais a 1.

O Problema do Caixeiro Viajante

Designa-se assim um problema clássico de Investigação Operacional, bastante conhecido do vulgo. Envolve um indivíduo, o caixeiro viajante, que deve sair de uma sede e visitar $n-1$ localidades (apenas uma vez) e voltar de novo à sede. Seja c_{ij} o custo de viagem da localidade i para a localidade j . Pode ter-se, como é evidente, $c_{ij} \neq c_{ji}$. O objectivo é organizar um circuito de custo mínimo. Neste contexto, é perfeitamente indiferente qual das localidades se toma como sede.

Pode resolver-se este problema encarando-o como um problema de afectação. Para isso, as n localidades são os n operários e as n tarefas. Mas, com esta formulação, podem obter-se soluções viáveis óptimas que não são viáveis para o problema do caixeiro viajante (por não permitirem o circuito). Assim, a solução do problema de afectação funciona como uma primeira aproximação. Caso não sirva ao problema, ela será melhorada por procedimentos de bifurcação e limite adequados que, no entanto, não serão aqui tratados.

2.6.3.2 Obtenção da Solução Óptima

A resolução deste problema pode fazer-se com o algoritmo dos transportes, mas o Método Húngaro, que utiliza apenas a matriz de custos, como entrada, é mais eficiente. Neste método há quatro passos:

	1	2	3	...	n
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_{2n}
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...	C_{3n}
...	...	...	...	...	...
n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	...	C_{nn}

PASSO 1: Em cada linha do quadro localiza-se o menor elemento, subtraindo-se este a todos os elementos dessa linha. Repete-se este procedimento para cada uma das colunas (o menor valor nas colunas é determinado após a subtracção nas linhas). A matriz de custos actualizada conterá pelo menos um elemento nulo em cada uma das linhas e em cada uma das colunas.

PASSO 2: Determina-se se há uma afectação admissível envolvendo unicamente custos nulos na matriz de custos actualizada. Por outras palavras, verifica-se se a matriz de custos actualizada possui n elementos nulos, sem que existam dois deles (ou mais) elementos nulos sobre uma mesma linha ou coluna. Se esta afectação existir, trata-se da afectação óptima. Se ela não existir, prossegue-se para o Passo 3.

PASSO 3: Cobrem-se todos os zeros da matriz de custos actualizada com o menor número possível de rectas horizontais e verticais. Cada uma das rectas horizontais deve cortar integralmente a linha e cada uma das rectas verticais deve cortar integralmente a coluna. Este número mínimo possível de rectas será inferior a n . Localiza-se o menor número da matriz de custos não intersectado por uma recta. Subtrai-se este número a cada um dos elementos não cortados por uma recta e adiciona-se o número em questão a cada um dos elementos situados na intersecção de duas rectas.

PASSO 4: Retornar ao Passo 2.

De acordo com um resultado básico da teoria dos grafos (Capítulo 3), o número de rectas necessárias no Passo 3 será precisamente igual ao maior número de zeros da matriz de custos actualizada, tais que dois deles não estejam sobre uma mesma linha ou coluna.

EXERCÍCIOS

Exercícios - Formulação de Problemas em Programação Linear

Utilização de Máquinas

1. Uma metalomecânica utiliza três máquinas (M1, M2 e M3) na execução de três produtos (A, B e C).

Uma unidade do produto A necessita 4 horas da máquina M1, 2 horas da máquina M2 e 1 hora da máquina M3. Para o produto B são necessárias, respectivamente, 3, 5 e 2 horas, enquanto para o produto C são necessárias 2, 4 e 5 horas.

O lucro de venda por unidade é de 35 u.m. para A, 45 u.m. para B e 40 u.m. para C.

Estando prevista a disponibilidade de 180 horas de M1, 155 de M2 e 160 de M3, de que modo se optimiza a produção? Formule o problema.

2. Um fabricante está a planear a última semana de produção de quatro modelos de consolas de madeira para televisores (I, II, III e IV). A fabricação de cada consola começa com a montagem, a que se segue o acabamento. Cada unidade de cada um dos referidos modelos requer, respectivamente, 4, 5, 3 e 5 horas para montagem e 2, 1.5, 3 e 3 horas, respectivamente, para acabamento. Os lucros unitários associados a cada um dos modelos são, respectivamente, iguais a 7, 7, 6 e 9 u.m.. O fabricante dispõe de 30000 horas disponíveis para a montagem destes produtos (750 trabalhadores da linha de montagem a trabalharem 40 horas por semana) e 20000 horas disponíveis para o acabamento (500 trabalhadores na linha de acabamento a trabalharem 40 horas por semana).

Pretende-se estabelecer o melhor plano de produção. Formule o problema como um de Programação Linear, definindo clara e sucintamente todas as variáveis de decisão que julgar necessárias. Assuma que todas as unidades fabricadas serão vendidas.

3. A empresa BrincaBem produz três artigos de base: bonecas, carros telecomandados e cavalinhos de pau. O quadro seguinte dá-nos a conhecer os tempos necessários para cada produto em cada um dos departamentos de montagem, estampagem e embalagem, assim como as margens brutas unitárias:

Produto	Montagem	Estampagem	Embalagem	Lucro Unitário
Boneca	10 min	18 min	10 min	15 €
Carros Telecomandados	25 min	24 min	10 min	20 €
Cavalinho de pau	12 min	5 min	5 min	12 €

O tempo disponível no departamento de montagem é de 16 horas por dia, no departamento de estampagem é de 10 horas por dia e no departamento de embalagem apenas 5 horas por dia. Por razões tecnológicas não é possível

produzir mais do que 50 carrinhos telecomandados por dia. Por razões contratuais a empresa tem de produzir pelo menos 12 bonecas e 10 cavalinhos de pau por dia. A empresa pretende determinar o plano óptimo de produção. Formule o problema como um de Programação Linear. Indique de forma clara todas as variáveis que utilizar.

4. A firma *Que Macia* produz e comercializa dois tipos de alcatifa. Para a produção de alcatifa são utilizadas duas máquinas A e B, que funcionam respectivamente 12 e 14 horas por dia. Para fabricar 100 m² do primeiro tipo de alcatifa são necessárias 3 horas de trabalho na máquina A e 7 horas na máquina B. A mesma quantidade de alcatifa de tipo 2 requer 4 horas e 2 horas, respectivamente, na máquina A e B. Sabendo que o lucro obtido com a produção de 100m² do primeiro tipo de alcatifa é de 4 u.m. e o correspondente valor para o tipo 2 é de 3 u.m., qual deve ser a utilização diária das máquinas de modo a garantir um lucro máximo para a produção de alcatifas?
5. O comerciante *Sr. Alegrete* pretende obter uma quantidade não superior a 5 toneladas de certo produto. Esta quantidade pode ser encomendada a duas fábricas A e B. A fábrica A garante um lucro de 4 mil euros por tonelada, mas não pode fornecer mais do que 3 toneladas. A fábrica B garante um lucro de 3,5 mil euros por tonelada e pode fornecer qualquer quantidade. Qual o esquema de encomenda que origina um lucro máximo?
6. A fábrica *Bem Bom* produz dois bens A e B. O lucro médio que obtém com A é de 40 u.m./ton e com B é de 30 u.m./ton. A unidade de produção compõe-se de 3 secções: a de corte, a de mistura e a de embalagem, que podem ser utilizadas durante 8 horas por dia. O processo de produção caracteriza-se por:
 - O bem A é primeiro cortado e depois embalado. Cada tonelada consome 1/2 hora na secção de corte e 1/3 hora na secção de embalagem;
 - O bem B é primeiro misturado e depois embalado. Cada tonelada consome 1 hora na secção de mistura e 2/3 hora na secção de embalagem.

Qual a combinação de produção que a empresa deve realizar diariamente a fim de maximizar o lucro?

7. A fábrica *Bom Som*, produtora de aparelhos de rádio e gravadores, efectuou uma pesquisa de mercado e verificou que precisava produzir pelo menos 1500 rádios e 3000 gravadores por mês.

As necessidades de mão-de-obra para rádios e gravadores são 5 e 7 horas/homem, respectivamente, sendo 40000 o número de horas/homem disponíveis por mês na fábrica. O lucro de venda unitário é de 500 e 1000 u.m.,

respectivamente, para os rádios e para os gravadores. Determine o plano óptimo de produção.

Optimização de necessidades de pessoal

8. O banco *Dá-me Mais* decidiu ter os seus balcões abertos ao público das 08 horas às 20 horas, pelo que necessita planear novos horários de serviço para os seus funcionários. Para tal, decidiu dividir o dia de trabalho em 6 períodos de 2 horas e fixar para cada um destes períodos o seguinte número de funcionários:

08 às 10h	10 às 12h	12 às 14h	14 às 16h	16 às 18h	18 às 20h
6	10	12	11	5	4

Os funcionários trabalham diariamente 6 horas consecutivas, podendo a empresa fixar a hora de entrada ao serviço.

Apresente o modelo que minimiza o número total de funcionários necessários diariamente.

9. Uma empresa tem várias cervejarias em Lisboa que funcionam todos os dias da semana durante 8 horas consecutivas. Os seus empregados trabalham semanalmente **5 dias consecutivos**, podendo a empresa fixar o 1º dia de serviço em qualquer dia da semana.

As necessidades mínimas de pessoal em cada dia da semana são as seguintes:

	Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
Nº mínimo de empregados	90	50	30	70	60	70	100

Como minimizar o total de empregados necessários à satisfação das necessidades referidas?

Problema de Mistura

10. O proprietário de um aviário deseja que a ração dos frangos tenha um certo número de nutrientes. Tem dois tipos de grão à escolha, A e B, com custos de 6 e 4 euros/kg, respectivamente. Cada kg de grão do tipo A tem 8gs (gramas) de amido, 10gs de proteínas e 7gs de vitaminas; cada kg de grão do tipo B tem 12gs de amido, 5gs de proteínas e 4g de vitaminas. Cada kg de ração deve conter um mínimo de 15gs de amido, um máximo de 35gs de proteínas e exactamente 14gs de vitaminas. Pretende-se que a ração dos frangos seja a mais económica possível.

Modele o problema em Programação Linear.

11. Uma empresa produz um adubo combinando 4 tipos de componentes (C1, C2, C3 e C4).

As disponibilidades e custo destes componentes são as seguintes:

Componente	Disponibilidade (Kg)	Custo (por Kg)
C1	2200	28
C2	1800	35
C3	2000	52
C4	2400	26

O adubo (mistura) deve ter as seguintes características:

- Pelo menos 45% de C1 e não mais do que 60% deste componente
- Pelo menos 10% de C2
- Pelo menos 10% de C3
- Não haver mais do que 25% de C2+C3
- Não exceder 50% de C4

Devem ser produzidos, no mínimo, 2500Kg de adubo. Formule o problema.

Turnos de Produção

12. Uma fábrica têxtil labora em 3 turnos: 7 às 15 horas; 15 às 23 horas; 23 às 7 horas.

Em cada turno necessita de modelistas, costureiras e embaladoras que auferem por hora de trabalho, respectivamente, 23, 19 e 7.5 u.m..

As modelistas e costureiras auferem um adicional de 2 u.m./hora quando trabalham no último dos turnos indicados, sendo o salário das embaladoras, neste turno, de 8.5 u.m./h.

As necessidades de produção exigem, em cada turno, 1 hora de modelista por cada 3 horas de costureira, não podendo haver mais do que um total de 200 horas de embaladora em cada turno.

Pretende-se que o total de horas de trabalho de modelistas e costureiras seja no mínimo de 400 horas no turno da manhã, 376 no turno da tarde e 270 no turno da noite.

Devendo haver, no mínimo, 600 horas de trabalho em cada turno, como fixar o contributo de cada par categoria/turno em horas completas?

Produção de Conjuntos de peças

13. Uma empresa produz 3 componentes (A, B e C) para máquinas de barbear.

A Secção 1 produz os componentes A e B e a Secção 2 produz apenas o componente C.

As actuais condições de produção são as seguintes:

	Produção/hora			Tempo disponível por semana (h)
	A	B	C	
Secção 1	8	5		100
Secção 2			14	30

A montagem de uma máquina de barbear necessita de 1 componente A, 1 componente B e 1 componente C, pelo que a produção deve ser equilibrada para garantir esta exigência.

Sendo 10 u.m. o lucro unitário da venda da máquina de barbear, como otimizar a produção?

Publicidade

14. O canal de televisão *RIT* pretende organizar um programa de meia hora e tenciona apresentar um comediante, uma orquestra e anúncios. O comediante exige um mínimo de 200€, à razão de 20 euros por minuto. Analogamente, a orquestra exige pelo menos 250€, à razão de 50 euros por minuto. Os anúncios rendem 10 euros por minuto e não devem absorver menos de 3 minutos nem mais do que 10.

Organize o programa de modo a minimizar as despesas.

15. Uma empresa deseja realizar um espectáculo de televisão, para publicidade dos seus produtos. O espectáculo durará exactamente 30 minutos. Nele actuarão um actor cómico e um conjunto musical. A empresa deseja que sejam consagrados a anúncios pelo menos 4 minutos. A estação televisiva exige que o tempo dedicado aos anúncios não exceda 8 minutos, não podendo, além disso, em caso algum, ser superior ao atribuído ao actor cómico.

O actor cómico não está disposto a intervir durante mais de 15 minutos. Ao conjunto musical caberá o tempo restante. O custo de actuação do actor é de 20 euros por minuto e o conjunto 100 euros por minuto.

A experiência mostra que: por cada minuto em que o actor se exhibe, 4000 espectadores ligam o televisor para a estação, por cada minuto de actuação do conjunto esperam-se 2000 novos espectadores; por cada minuto de anúncios 1000 desligam o aparelho ou mudam para outra estação. A fim de tomar uma decisão, a empresa pretende dispor de programas que:

- maximizem o número de espectadores. Formule o problema.
- minimizem o custo do espectáculo. Formule o problema.

16. Uma empresa de publicidade tem um cliente interessado nos seguintes grupos-alvo:

- Grupo 1: Mulheres casadas na faixa etária dos 25 aos 35 anos

- Grupo 2: Licenciados (as)
- Grupo 3: Famílias com rendimento anual superior a 4000 u.m.
- Possuidores de habitação própria

A importância relativa dos grupos é ponderada pelo cliente do seguinte modo:

- Grupo 1: Peso 5
- Grupo 2: Peso 3
- Grupo 3: Peso 2
- Grupo 4: Peso 2

A empresa tem contratos com uma revista feminina, uma cadeia de rádio, uma estação de TV e um jornal diário, que representam as seguintes características:

Características	Revista Feminina	Rádio	TV	Jornal
Grupo 1 (%)	90	55	65	42
Grupo 2 (%)	30	20	25	38
Grupo 3 (%)	10	6	5	13
Grupo 4 (%)	21	23	27	30
Custo por anúncio (u.m.)	1000	1500	3500	500
Audiência Potencial	250000	750000	150000	800000
N.º mínimo de anúncios	10	5	3	15

O cliente só aceita orçamento que não exceda 100000 u.m..

Formule o problema de PL para maximizar o nível de audiência.

Exercícios – Método Simplex

Método Simplex

1. Resolva os seguintes problemas de programação linear, utilizando o método simplex.

1.1)

$$\text{Max}Z = 30x_1 + 50x_2$$

$$\text{Suj.}a : 2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.2)

$$\text{Max}Z = 14x_1 + 10x_2$$

$$\text{Suj.}a : 5x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 26$$

$$3x_1 - x_2 \leq 38$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.3)

$$\text{Max}Z = 30x_1 + 50x_2$$

$$\text{Suj.}a : 2x_1 + x_2 \leq 48$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.4)

$$\text{Max}Z = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{Suj.}a : 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 19$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_1 \leq 16$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.5)

$$\text{Min}Z = -6x_1 - 4x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \leq 5$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.6)

$$\text{Max}Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.7)

$$\text{Max}Z = 5x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.8)

$$\text{Max}Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\text{Suj.}a : 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 160$$

$$2x_1 + x_3 \leq 50$$

$$x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.9)

$$\text{Max}Z = 10x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\text{Suj.}a : 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 400$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 200$$

$$x_3 \leq 16$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.10)

$$\text{Max}Z = 4x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{Suj.}a : 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2. Utilize o método do grande M para encontrar a solução para cada um dos problemas de programação linear seguintes:

2.1)

$$\text{Min}Z = -10x_1 - 20x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.2)

$$\text{Min}Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.3)

$$\text{Max}Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Resolva cada um dos problemas de PL seguintes, utilizando as duas fases do método simplex.

3.1)

$$\text{Max}Z = 8x_1 + 6x_2$$

$$\text{Suj.}a : 2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$3x_1 + 8x_2 \leq 96$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.2)

$$\text{Min}Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.3)

$$\text{Max}Z = 15x_1 + 9x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \geq 5$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.4)

$$\text{Max}Z = 5x_1 + 10x_2$$

$$\text{Suj.}a : 7x_1 + 14x_2 \leq 42$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.5)

$$\text{Min}Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.6)

$$\text{Max}Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + x_2 \geq 3$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.7)

$$\text{Max}Z = 2x_1 - 4x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 - x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.8)

$$\text{Min}Z = x_1 + 5x_2$$

$$\text{Suj.}a : x_1 + 2x_2 \geq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.9)

$$\text{Min}Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

s.a.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 80$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Exercícios - Dualidade/ Análise de Sensibilidade/ Pós-Optimização

1. Resolva o ex.2.2 (da secção anterior) recorrendo ao problema dual.
2. Resolva o exercício 3. (da secção anterior), utilizando o algoritmo Simplex-Dual ou o Primal-Dual, conforme o caso.
3. Os agricultores do Ribatejo formaram uma associação agrícola com o objectivo de comercializar os seus produtos.

Um dos produtos é o tomate, que é comercializado pela associação sob a forma de polpa de tomate (pdt) e é vendido em dois tipos de embalagens: frasco de vidro e pacote de papel.

A cota de produção de tomate atribuída pela UE à região ribatejana permite a produção de 3000 toneladas/mês de pdt.

A associação possui uma máquina de embalar/rotular cuja capacidade é de 2000 ton./mês se a pdt só for embalado em vidro e de 3000 ton./mês se a pdt só for embalado em papel.

A embalagem de papel destina-se exclusivamente a uma cadeia de hipermercados num valor que não pode exceder 1200 ton./mês de pdt.

O preço de venda de cada tonelada de pdt depende do tipo de embalagem e é de 50 U.M. se a embalagem for de vidro e de 40 U.M. se a embalagem for de papel.

O modelo de programação linear e respectivo quadro óptimo são apresentados de seguida.

$$\text{Max}Z = 50x_1 + 40x_2$$

$$\text{Suj. a : } x_1 + x_2 \leq 3000$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6000$$

$$x_2 \leq 1200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	
F_1	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	600
x_1	1	0	0	$1/3$	$-2/3$	1200
x_2	0	1	0	0	1	1200
Z	0	0	0	$50/3$	$20/3$	108000

- a) A UE impõe uma redução de 15% na cota de produção de tomate. O plano óptimo de produção de pdt altera-se?
- b) Para a próxima campanha de promoção, o hipermercado pretende que a associação participe nos custos dessa campanha. Para o efeito, o hipermercado propôs que o preço de venda (por parte da associação) de pdt em embalagem de papel seja apenas de 30 U.M. por tonelada. Deverá a associação, com esta nova condição, continuar a fornecer o hipermercado?
- c) Também na próxima campanha de promoção, está previsto um aumento da capacidade das embalagens de papel de 1200 para 1400 unidades. Deverá a associação, com esta nova condição, continuar a fornecer o hipermercado? (Considere as alíneas anteriores independentes entre si)
4. Considere o seguinte problema de programação linear e respectiva solução óptima.

$$\text{Max}Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.a. : } x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 30 \quad (\text{MP1})$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \quad (\text{MP2})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	X_1	X_2	X_3	F_1	F_2	
X_1	1	5	2	1	0	30
F_2	0	-10	-8	-1	1	10
	0	23	7	5	0	150

- a) Existe uma nova solução óptima se o coeficiente de x_3 na função objectivo passar para 10? Justifique.
- b) Existem alterações na solução óptima se a disponibilidade de MP1 passar para 36? Justifique.
- c) A solução óptima altera-se se MP2 passar a ter disponibilidade 50? Justifique.
- Nota: Considere as alíneas independentes entre si.
5. Um determinado problema de produção foi formulado e resolvido com base num modelo de programação linear. Em resumo, são indicadas a formulação indicada e o quadro que representa a solução óptima obtida por aplicação do algoritmo Simplex.

Formulação

$$\text{Max} Z = 7.5x_1 + 5x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.a.} : x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 \leq 40 \quad (\text{recurso1})$$

$$x_1 + x_2 \leq 24 \quad (\text{recurso2})$$

$$5x_1 + 2.5x_2 + 15x_3 \leq 750 \quad (\text{recurso3})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Quadro Óptimo

	X ₁	X ₂	X ₃	F ₁	F ₂	F ₃	
X ₁	1	2.3	0	1.2	0	-0.04	18
F ₂	0	-1.3	0	-1.2	1	0.04	6
X ₃	0	-0.6	1	-0.4	0	0.08	44
	0	6,25	0	5	0	0,5	575

A partir de uma análise de sensibilidade indique:

- O valor que o lucro unitário do produto 1 poderá assumir, para que os produtos produzidos se mantenham os mesmos.
- Existirá nova solução óptima se o lucro unitário do produto 2 passar para 8 u.m.? Justifique.
- Se for caso disso, a nova solução óptima, se a disponibilidade do recurso 2 for acrescida de 6 unidades.

Nota: Considere as alíneas independentes entre si.

- A solução óptima para o problema de Programação Linear seguinte é dada pelo quadro apresentado (x₃, x₄ e x₅ designam as variáveis de folga)

$$\text{Max} Z = 35x_1 + 50x_2$$

$$\text{s.a.} : 4x_1 + 6x_2 \leq 120 \quad (\text{horas de mão-de-obra})$$

$$x_1 + x_2 \leq 20 \quad (\text{matéria-prima I})$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 40 \quad (\text{matéria-prima II})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	
	0	0	1	0	-2	40
	1	0	0	3	-1	20
	0	1	0	-2	1	0
	0	0	0	5	15	700

- Explicita a solução óptima do problema.
- Identifique a formulação dual e indique para que valores das variáveis de decisão do dual se verifica o valor óptimo da função objectivo.
- Determine, se existir, uma solução óptima alternativa para o dual.
- Analise o impacto no plano produtivo, e no respectivo valor de lucro, caso a disponibilidade de matéria-prima I aumente para 25 kg.
- Indique, justificando, quais os valores do lucro unitário do produto x₁ que mantêm o actual plano de produção óptimo.

Nota: Considere as alíneas independentes entre si.

- 7 A empresa de óleos alimentares Alimentex Lda, dispõe de duas actividades produtivas: produção de óleo 1 e produção de óleo 2. Estas actividades exigem a utilização de dois recursos escassos: unidade de Moagem e de Prensagem (10 e 12 horas por dia respectivamente).

A empresa pretende produzir pelo menos 2000 litros de óleo 1, tendo já garantida a venda dessa quantidade a um cliente habitual. A receita obtida com a venda de 1000 litros de óleo 1 é de 30 U.M. e de 15 U.M. para a mesma quantidade de óleo 2.

A seguir apresenta-se a formulação do problema, assim como o quadro óptimo associado.

$MaxZ = 30x_1 + 15x_2$						
$Suj. a : x_1 + 2x_2 \leq 10$						
$3x_1 + x_2 \leq 12$						
$x_1 \geq 2$						
$x_1, x_2 \geq 0$						
	x_1	x_2	F_1	F_2	E_1	
	x_2	0	1	$3/5$	$-1/5$	0
	E_1	0	0	$-1/5$	$2/5$	1
	x_1	1	0	$-1/5$	$2/5$	0
		0	0	3	9	0
						138

- a) Suponha que o cliente habitual da empresa pretende comprar 2800 litros de óleo 1 e não 2000. Qual seria a solução óptima?
- b) Determine o intervalo de sensibilidade para a disponibilidade horária da unidade de Moagem.
- c) De quanto aumentaria a receita da empresa se a unidade de Moagem estivesse disponível mais 1 hora por dia?
- d) Entre que valores pode variar a receita do óleo 1 sem que a selecção das variáveis básicas se altere? Para que valores da receita existem soluções óptimas alternativas?
- 8 Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned}
 MaxZ &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
 Suj. a : x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq b_1 \\
 x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq b_2 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Para valores específicos de b_1 e b_2 a solução óptima é a seguinte:

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	
x_1	1	5	2	1	0	30
F_2	0	-10	-8	-1	1	10
	0	23	7	d	e	150

Determine, justificando:

- os valores de b_1 e b_2 que conduzem à solução óptima apresentada.
- a solução dual óptima.
- se existe uma nova solução óptima se o coeficiente de x_3 na função objectivo passar a 10.

- 9 Considere o seguinte modelo de P.L. que se refere a um problema de planeamento de produção em que o objectivo é maximizar o lucro:

$$\text{Max} Z = 3x_1 + 2x_2 + 1x_3$$

$$\text{Suj. a : } x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 25$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

As variáveis de decisão representam o nível de produção de três produtos, as duas primeiras restrições são relativas à utilização de duas matérias-primas e a terceira à procura de um dos produtos.

Considerando o quadro óptimo do Método do Simplex:

	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	
F_1	0	0	-1/2	1	-1/2	-1/2	5/2
x_1	1	0	3/2	0	1/2	-1/2	15/2
x_2	0	1	0	0	0	1	10
Z	0	0	7/2	0	3/2	1/2	85/2

- Determine os intervalos de sensibilidade para os lados direitos das restrições e para os coeficientes das variáveis na função objectivo.
- Quais são as consequências de um aumento da procura do segundo produto para 15 unidades?
- Quais são as consequências de uma redução da disponibilidade da primeira matéria-prima para 15 unidades?
- Quais as consequências do aumento do lucro do terceiro produto para 2u.m.?
- Quais as consequências de uma redução do lucro do segundo produto para 1,5u.m.? E para 1u.m.?
- Suponha agora que a procura do primeiro produto diminui. Assim, a produção deste produto não deve ser superior a 5 unidades. Quais as consequências desta alteração?

- g) Suponha que a empresa pretende que a produção total mínima não seja inferior a 18 unidades. Será possível produzir esta quantidade? Em caso afirmativo, qual será o novo plano óptimo?
- h) Considere agora a produção de um novo produto. Cada unidade deste produto proporcionará um lucro de 5 u.m. e consumirá 2 unidades do primeiro tipo de matéria-prima e 3 do segundo tipo. Qual será o novo plano óptimo?

10 Considere o seguinte problema:

$$\text{Max}Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$\text{Suj. a : } -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$$

$$12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Sejam F_1 e F_2 as variáveis de folga para as duas restrições, respectivamente. O conjunto final de equações é o seguinte:

$$Z : 2x_3 + 5F_1 = 100$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 + F_1 = 20$$

$$16x_1 - 2x_3 - 4F_1 + F_2 = 10$$

Aplique análise de sensibilidade, investigando cada uma das seguintes alterações, independentemente uma da outra:

- a) Altere b_1 para 30;
- b) Altere b_2 para 70;
- c) Altere c_3 para 8;
- d) Introduza uma nova variável, x_4 , que tem 10 como coeficiente na função objectivo e 3 e 5, respectivamente, como coeficientes nas restrições;
- e) Introduza uma nova restrição: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$.

Exercícios - Transportes

1. Uma empresa de distribuição possui dois armazéns (A e B) cada um com uma capacidade de fornecimento de 800 e 500 unidades, respectivamente. De momento possui apenas três clientes (C1, C2 e C3) que necessitam de 700, 400 e 400 unidades, respectivamente.

Sabendo que os custos unitários de transporte entre os seus armazéns e os respectivos clientes são os indicados no quadro seguinte

	C1	C2	C3
A	2	2	5
B	5	3	6

- a) Determine o plano de distribuição que minimize o custo total de transporte.
(Utilize a regra do canto NW para obter a solução inicial)
- b) A solução que encontrou na alínea anterior é única? Em caso negativo, determine um plano de distribuição alternativo
2. Um comerciante de flores, com três lojas de venda (L1, L2 e L3), pode abastecer-se em três produtores diferentes (P1, P2 e P3). Dada a dispersão geográfica das lojas e dos produtores, os custos unitários de transporte (em u.m.) são diferenciados, sendo os seguintes:

	L1	L2	L3
P1	15	15	5
P2	25	10	0
P3	20	10	10

As necessidades semanais das lojas L1, L2 e L3 são de 500, 1000 e 750 unidades, respectivamente, enquanto que as capacidades de fornecimento dos produtores em igual período são de 1000 unidades cada.

- a) Determine o plano óptimo de abastecimento semanal, resolvendo o problema como um de transportes.
(Utilize a regra do canto NW para obter a solução inicial)
- b) Existe alternativa à solução óptima encontrada em a)? Em caso afirmativo, determine-a.
3. Uma empresa produz um determinado tipo de peças nas duas fábricas que possui, uma em Lisboa e outra no Porto. Ambas têm capacidade para produzir mensalmente 100 peças. A partir destas fábricas, a empresa tem que fornecer quatro clientes, C1, C2, C3 e C4, que necessitam mensalmente de 80, 60, 70 e 50 peças, respectivamente. Os custos de transporte entre as fábricas e os clientes são os seguintes:

	C1	C2	C3	C4
Fábrica de Lisboa	2	1	4	2
Fábrica do Porto	4	5	2	6

- a) Determine o plano de distribuição que minimize o custo total de transporte.
(Utilize a regra do canto NW para obter a solução inicial)

b) A solução que encontrou é única? Justifique.

4. Três fábricas abastecem 2 armazéns de venda a retalho. Na fábrica 1 existem 100 unidades do produto, na fábrica 2 existem 80 unidades e na fábrica 3 existem 60 unidades. No armazém 1 são requeridas 140 unidades do produto e no armazém 2 são requeridas 120 unidades. O quadro seguinte contém a informação relativa a custos unitários de transporte.

	Armazém 1	Armazém 2
Fábrica 1	3 €	10 €
Fábrica 2	6 €	8 €
Fábrica 3	7 €	12€

- a) Construa uma solução básica admissível para o problema.
 b) Determine um plano ótimo para o transporte.
 c) O plano de transporte determinado na alínea b) é único? Justifique

5. Uma empresa de construção civil necessita nos seus estaleiros (A, B, C, D e E) de 9, 9, 7, 5 e 5 toneladas de cimento, respectivamente. A empresa fornecedora tem três armazéns (X, Y e Z), com 10, 15 e 10 toneladas, respectivamente.

O custo a suportar para transportar uma tonelada de cimento é proporcional à distância a percorrer. Na carta rodoviária determinaram-se as seguintes distâncias (Km) para cada par Armazém-Estaleiro:

	A	B	C	D	E
X	12	9	2	6	8
Y	12	10	7	11	8
Z		6	11	15	11

A empresa fornecedora planeou a entrega de cimento do seguinte modo:

	A	B	C	D	E
X			7	3	
Y		8		2	5
Z	9	1			

Verifique que esta é a melhor solução. Apresente, se existir, uma solução alternativa.

6. Uma multinacional têxtil produtora de t-shirt's possui fábricas no Brasil, na Itália e em Portugal. A produção destina-se exclusivamente a quatro grandes mercados: Estados Unidos, Alemanha, Inglaterra e Japão.

A capacidade de produção actual da empresa é de 2,5 milhões de unidades no Brasil, 1,4 milhões de unidades na Itália e 3 milhões de unidades em Portugal.

As encomendas em carteira para a próxima colecção Primavera/Verão são de 3 milhões de unidades para os Estados Unidos, 1,3 milhões para a Alemanha, 1,2 milhões para Inglaterra e 1 milhão para o Japão.

Os custos de transporte são os indicados na tabela seguinte:

	Estados Unidos	Alemanha	Inglaterra	Japão
Brasil	2	5	4	6
Itália	3	1	2	4
Portugal	4	2	2	6

Determine o plano de transporte que a companhia deve adoptar, de modo a minimizar o custo total.

7. Uma empresa adquiriu 3 fábricas aptas a iniciar a produção de 4 novos produtos (P1,P2, P3, P4). A tabela seguinte indica a capacidade de produção mensal disponível em cada fábrica, a procura mensal de cada produto e os custos unitários de fabrico de cada produto em cada fábrica.

	P1	P2	P3	P4	Capacidade disponível
Fábrica 1	22	24	40	40	180
Fábrica 2	30	30	38	30	300
Fábrica 3	28	46	50	42	300
Procura a satisfazer	160	120	120	90	

A direcção da empresa permite que a produção de um dado produto seja fraccionada por mais do que uma fábrica. A direcção da empresa pretende determinar quantas unidades de cada produto deve produzir mensalmente em cada fábrica, de modo a minimizar o custo global.

- a) Considere que a empresa adoptou a solução em que a fábrica 1 produz 160 unidades de P1 e 20 unidades de P4; a fábrica 2 produz 70 unidades de P4 e a fábrica 3 produz 120 unidades de P2 e 120 unidades de P3. Diga Justificando se esta é uma solução básica e admissível.

b) Determine uma solução óptima de produção (sugestão: utilize a regra do canto NW para a obtenção da primeira solução).

Exercícios - Afectação

1. Uma linha de montagem de televisões é constituída por um conjunto de postos de trabalho. Num desses postos, cinco trabalhadores têm de executar quatro operações distintas (cada trabalhador executa uma só operação e cada operação é executada por um só trabalhador). Logo que uma televisão chega ao posto em questão pode-se iniciar, em simultâneo, a execução das quatro operações. O responsável pela linha tem de seleccionar quatro trabalhadores, de entre cinco disponíveis, para a realização das operações referidas. Os tempos (em minutos) que cada trabalhador demora para a execução das diferentes operações são os seguintes:

	T1	T2	T3	T4	T5
O1	25	15	18	28	21
O2	23	18	15	25	26
O3	18	20	15	18	18
O4	21	16	23	28	19

Determine a afectação óptima dos trabalhadores às operações, para que a televisão possa transitar no menor tempo possível para o posto de trabalho seguinte. Existe uma afectação alternativa à que apresentou? Em caso afirmativo, determine-a.

2. Uma empresa de construção civil precisa contratar quatro subempreitadas (S1, S2, S3 e S4). Das empresas concorrentes foram aprovadas seis (E1, E2, E3, E4, E5 e E6) que apresentaram as seguintes propostas:

	S1	S2	S3	S4
E1	21	31	40	22
E2	25	32	38	22
E3	22	29	37	34
E4	24	34	38	23
E5	20	30	39	29
E6	19	29	39	22

- a) Estabeleça a distribuição das subempreitadas que minimiza o custo total, garantindo que a qualquer dos concorrentes só é atribuída no máximo uma subempreitada.
- b) Existem soluções óptimas alternativas? Em caso afirmativo, determine uma.

3. Numa determinada linha de montagem existem quatro máquinas para a realização de três tarefas distintas. Qualquer uma das máquinas está apta a realizar uma das quatro tarefas, sendo que os tempos dispendidos (em minutos) para tal realização são os que se apresentam na tabela que se segue:

		Máquinas			
		1	2	3	4
Tarefas	1	5	3	4	2
	2	9	8	8	4
	3	10	4	8	7

Determine a afectação óptima das máquinas às tarefas, para que o tempo gasto na linha de montagem seja o mínimo possível.

4. O treinador de uma equipa de nadadores precisa de escolher os atletas para uma prova de 184 metros. Como muitos dos seus nadadores são muito rápidos em mais do que um estilo, não é fácil decidir qual o nadador a escolher, para cada um dos estilos. Na tabela seguinte aparecem os tempos (em segundos) dos seis nadadores mais rápidos para cada um dos estilos.

Estilos	Carlos	André	David	António	Miguel	Paulo
Costas	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4	36.0
Bruços	43.4	33.1	42.2	41.8	41.8	41.3
Mariposa	33.3	28.5	38.9	33.6	33.6	29.4
Livre	29.2	26.4	29.6	31.1	31.1	30.2

5. Uma companhia aérea inglesa pretende organizar, na época da Páscoa, viagens para quatro cidades distintas (Lisboa, Madrid, Roma, Paris), que correspondem aos aeroportos de onde parte um maior número de turistas.

Para isso, dispõe de quatro tipos de avião diferentes em que o número de tripulantes varia, bem como o consumo de cada avião.

Os custos para cada tipo de avião em cada viagem constam na tabela seguinte:

		Tipo de Avião			
		1	2	3	4
Cidade	Lisboa	48	50	44	46
	Madrid	56	60	68	60
	Roma	40	48	50	52
	Paris	95	85	90	84

Determine a afectação óptima (custo mínimo) dos aviões às cidades.

6. Uma unidade agrícola pretende explorar quatro novas culturas de leguminosas em zonas diferentes do plantio. Os custos de produção de cada cultura em cada área definida são dados pela tabela seguinte:

	Área 1	Área 2	Área 3	Área 4
Alfaces	30	10	15	18
Beterrabas	10	12	13	7
Nabiças	9	15	20	21
Cenouras	15	10	18	12

- Formule o problema que lhe permite minimizar os custos de produção.
 - Identifique onde deve ser produzida cada cultura por forma a minimizar os custos de produção.
 - Suponha que a cultura das alfaces se demonstrou impossível na Área 3. Como se alteraria a solução?
7. Uma empresa tem cinco operários disponíveis e com formação específica para integrar uma área de práticas administrativas com seis funções distintas. Foi possível aferir quantitativamente o impacto social desta alteração, o qual é dado pela seguinte matriz de indicadores:

		Função					
		A	B	C	D	E	F
Operário	1	6	4	10	2	8	3
	2	4	7	15	20	6	6
	3	15	8	3	10	9	10
	4	7	5	4	4	6	8
	5	11	15	4	4	15	15

- Formule o modelo matemático que lhe permite determinar a solução ideal para integração do pessoal numa óptica de maximização do impacto social.
- Resolva o problema anterior e identifique a solução ótima.
- Sabendo que foram eliminadas as funções D e E, que o operário 4 se despediu entretanto e que o relatório médico demonstrou incapacidade do operário 3 para a função B, como alteraria a solução encontrada na alínea b)?