

FREQUÊNCIAS E EXAMES RESOLVIDOS DE INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

LICENCIATURA EM CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO

Jorge P. J. Santos

Ano lectivo 2004/2005

ÍNDICE

1ª Frequência – 21/05/2005	1
2ª Frequência – 01/07/2005	9
Exame Época Normal – 19/07/2005.....	16
Exame Época de Recurso – 13/09/2005	28



INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO DE VISEU
1ª Frequência de Investigação Operacional – Contabilidade e Administração

Duração: 1h30m

21/05/2005

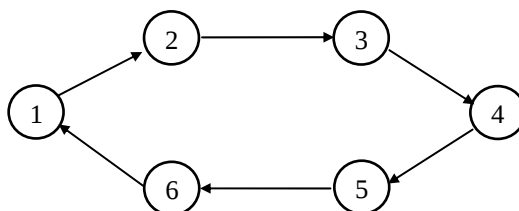
1. Um empregado de segurança pretende transportar valores para algumas agências bancárias durante o dia. O Empregado trabalha numa empresa localizada em Coimbra e as agências a visitar estão localizadas em Mira, Figueira da Foz, Montemor, Tocha e Cantanhede, sendo os custos de deslocação (em u.m.) dados pela seguinte tabela:

$i \backslash j$	Coimbra	Mira	Fig. Foz	Montemor	Tocha	Cantanhede
Coimbra	–	60	60	40	55	30
Mira	60	–	50	55	20	25
Fig. Foz	60	50	–	25	30	55
Montemor	40	55	25	–	30	35
Tocha	55	20	30	30	–	25
Cantanhede	30	25	55	35	25	–

O empregado tem por objectivo visitar cada localidade uma só vez e regressar a Coimbra no final. Formule o problema em termos de programação matemática de modo a minimizar a distância percorrida.

Resolução:

Para começarmos a formular o problema vamos representar as localidades Coimbra, Mira, Fig. Foz, Montemor, Tocha e Cantanhede pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. É de notar que os percursos para este tipo de problema podem ser representados por grafos da forma



Assim, neste problema as variáveis de decisão podem ser definidas por

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a localidade } j \text{ for visitada imediatamente a seguir à localidade } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6$$

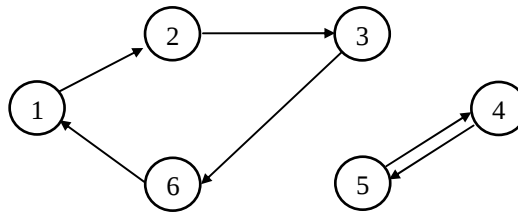
O problema obriga que imediatamente a seguir a uma localidade i ($i=1, 2, \dots, 6$) o empregado só pode visitar uma outra localidade

$$\begin{aligned}
& x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 \\
& x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} = 1 \\
& x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{56} = 1 \\
& x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Por outro lado, imediatamente antes de uma localidade j ($j=1,2,\dots,6$) o empregado visitou apenas uma outra localidade

$$\begin{aligned}
& x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1 \\
& x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{64} = 1 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{65} = 1 \\
& x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^6 x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

Os dois conjuntos de restrições que acabamos de descrever não são suficientes, pois não evitam subpercursos da forma



Esta solução satisfaz as restrições que acabamos de introduzir e não é claramente um percurso válido para o empregado de segurança. Portanto há que introduzir novas restrições que evitem a existência de subpercursos entre p localidades, com $p < 6$. Uma forma de evitar subpercursos é obrigar que o número de ligações entre quaisquer p localidades, com $p < 6$, seja inferior ou igual a $(p-1)$. Se S é um subconjunto de $\{1,2,\dots,6\}$ com $|S|$ elementos, as restrições podem ser escritas da seguinte forma

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1$$

para todo o conjunto $S \subset \{1,2,\dots,6\}$ tal que $2 \leq |S| \leq 6 - 1$. É de notar que os subpercursos anteriores são evitados pois

$$\begin{aligned}
S = \{1,2,3,6\} & \Rightarrow x_{12} + x_{13} + x_{16} + x_{21} + x_{23} + x_{26} + x_{31} + x_{32} + x_{36} + x_{61} + x_{62} + x_{63} \leq 3 \\
S = \{4,5\} & \Rightarrow x_{45} + x_{54} \leq 1
\end{aligned}$$

Agora se representarmos por c_{ij} o custo de o empregado de segurança se deslocar directamente da localidade i para a localidade j e fizermos $c_{ii} = M$ para todo $i = 1,2,\dots,6$, com M um número muito grande de modo a que $x_{ii} = 0$ em qualquer solução óptima do problema, então podemos formular o problema em termos de programação binária do seguinte modo

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{Sujeito a } \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 &\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S: 2 \leq |S| \leq n - 1 \\
 &x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

com n o número de localidades, S um subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\bar{S} = \{1, 2, \dots, n\} - S$, e $|S|$ o cardinal de S .

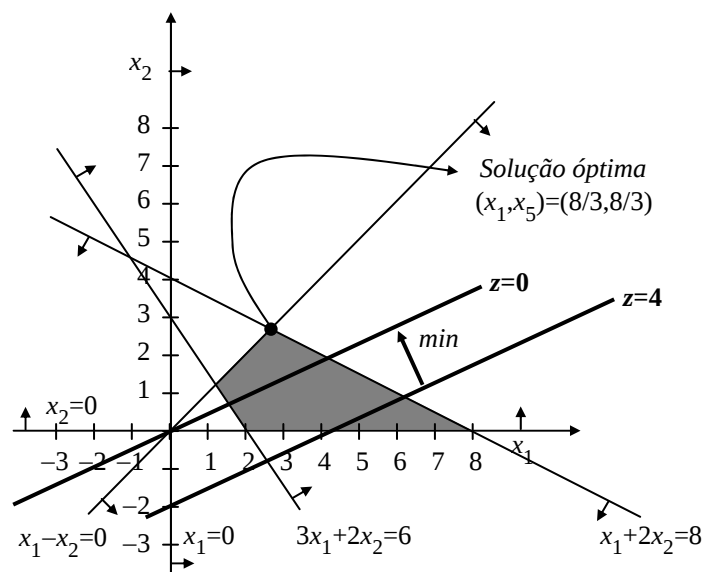
2. Considere o programa linear

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } z &= x_1 - 2x_2 \\
 \text{Sujeito a } \quad &x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
 &3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 &x_1 - x_2 \geq 0 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Resolva o problema graficamente.
- Escreva o seu dual.
- Determine a solução óptima do dual através da propriedade dos desvios complementares.

Resolução:

- Agora vamos resolver este problema graficamente



Assim, a solução óptima é dada pela resolução do sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 3x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8/3 \\ x_2 = 8/3 \end{cases}$$

com $z = -8/3$.

b) No problema primal a função objectivo consiste na minimização. Para construirmos o dual, as restrições do primal tem de ser todas de “ $\geq$ ” ou de “ $=$ ” e as variáveis livres ou não negativas. Neste problema, apenas a primeira restrição não verifica estas condições. Por isso, vamos começar por multiplicar a primeira restrição do primal por (-1) e obtemos o programa linear

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a } &-x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ &x_1 - x_2 \geq 0 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como o primal tem três restrições de “ $\geq$ ”, o dual tem três variáveis correspondentes não negativas. Como o primal tem duas variáveis não negativas, o dual tem duas restrições correspondentes de “ $\leq$ ”. Esquemáticamente temos

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= x_1 - 2x_2 \\ &(\leq) \quad (\leq) \\ \text{Sujeito a } &-x_1 - 2x_2 \geq -8 \quad (y_1 \geq 0) \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad (y_2 \geq 0) \\ &x_1 - x_2 \geq 0 \quad (y_3 \geq 0) \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Deste modo, o dual é definido por

$$\begin{aligned} \text{Maximize } w &= -8y_1 + 6y_2 \\ \text{Sujeito a } &-y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 1 \\ &-2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq -2 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c) Na solução óptima do primal tem-se $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$. Donde as primeiras duas restrições do dual são satisfeitas pela solução óptima como igualdades. Ou seja

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_2 + y_3 = 1 \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 = -2 \end{cases}$$

Além disso, a segunda restrição do primal é satisfeita pela solução óptima como desigualdade estrita. Donde, a segunda variável dual é nula na solução óptima do dual. Isto é

$$y_2 = 0.$$

Deste modo, a solução óptima do dual pode ser obtida através da resolução do sistema

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = 1 \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ -y_1 + y_3 = 1 \\ -2y_1 - y_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 1 + y_1 \\ -2y_1 - 1 - y_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

sendo o valor óptimo dado por $w = -8/3$.

3. Um fertilizante usado na agricultura é produzido à custa da junção de matéria orgânica com três produtos A, B e C. Um quilo do produto A contém 200 gramas de azoto e 300 gramas de fósforo. Um quilo do produto B contém 100 gramas de azoto e 200 gramas de fósforo. Um quilo do produto C contém 200 gramas de azoto e 100 gramas de fósforo. O fertilizante deve conter pelo menos 6 quilos de azoto e 10 quilos de fósforo. Um quilo de cada produto A, B e C custa 350, 200 e 300 unidades monetárias, respectivamente. Na formulação matemática do problema, obteve-se o programa linear

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= 350x_1 + 200x_2 + 300x_3 \\ \text{Sujeito a } &200x_1 + 100x_2 + 200x_3 \geq 6000 \\ &300x_1 + 200x_2 + 100x_3 \geq 10000 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

onde x_1 , x_2 e x_3 representam, respectivamente, os números de quilos dos produtos A, B e C que devem ser adicionados à matéria orgânica. A solução óptima deste problema é dada por $(x_1, x_2, x_3) = (20, 20, 0)$.

- Determine o intervalo de sensibilidade para o custo unitário do produto C.
- Calcule o intervalo de sensibilidade para a quantidade mínima de azoto a entrar na constituição do fertilizante, indicando para cada valor do intervalo o respectivo plano óptimo.
- Suponha que surgiu um novo produto D que, por cada quilo, possui 100 gramas de azoto e 100 gramas de fósforo e custa 140 unidades monetárias. Diga, justificando, se a solução dada se mantém óptima. Em caso negativo, determine o novo plano óptimo a partir da solução dada.

Resolução:

O programa linear dado é equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= 350x_1 + 200x_2 + 300x_3 \\ \text{Sujeito a } &200x_1 + 100x_2 + 200x_3 - x_4 = 6000 \\ &300x_1 + 200x_2 + 100x_3 - x_5 = 10000 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução óptima deste programa linear é dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (20, 20, 0, 0, 0)$$

As variáveis básicas desta solução são x_1 e x_2 .

a) Intervalo de sensibilidade de um coeficiente de uma variável não básica na função objectivo

A determinação do intervalo de sensibilidade do custo unitário do produto C equivale à determinação de todos os valores que o coeficiente de custo associado à variável x_3 pode tomar de modo a que a solução ótima permaneça inalterada. Seja c_3 o parâmetro que indica o valor do coeficiente de custo da variável básica x_3 . A solução dada mantém-se ótima se

$$\bar{c}_3 \geq 0 \Leftrightarrow c_3 - \pi^T A_{.3} \geq 0$$

Mas π é dado pelo sistema linear

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 200 & 300 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Agora vamos resolver este sistema através do método de eliminação de Gauss-Jordan

$$[B^T | c_J] = \left[\begin{array}{cc|c} 200 & 300 & 350 \\ 100 & 200 & 200 \end{array} \right] \xrightarrow{1/200L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 7/4 \\ 0 & 50 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - 3/100L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right] \Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\bar{c}_3 \geq 0 \Leftrightarrow c_3 - [1 \quad 1/2]^T \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow c_3 - (200 + 50) \geq 0 \Leftrightarrow c_3 - 250 \geq 0 \Leftrightarrow c_3 \geq 250$$

Assim o intervalo de sensibilidade para o custo unitário do produto C é $[250, +\infty[$.

b) Intervalo de sensibilidade de um termo independente das restrições

A determinação do intervalo de sensibilidade para quantidade mínima de azoto a entrar na constituição do fertilizante equivale à determinação de todos os valores que o termo independente da primeira restrição pode tomar de modo a que a base da solução ótima permaneça inalterada. Seja b_1 o parâmetro que indica o valor que o termo independente da primeira restrição pode tomar. A base da solução dada mantém-se ótima se

$$\bar{b} \geq 0$$

O vector $\bar{b}$ é dado pelo sistema linear

$$B\bar{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 300 & 200 \end{bmatrix} \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

Agora vamos resolver este sistema através do método de eliminação de Gauss-Jordan

$$[B | b] = \left[\begin{array}{cc|c} 200 & 100 & b_1 \\ 300 & 200 & 10000 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - 3/2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/200b_1 \\ 0 & 50 & 10000 - 3/2b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - 1/100L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -100 + 2/100b_1 \\ 0 & 1 & 200 - 3/100b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} -100 + 2/100b_1 \\ 200 - 3/100b_1 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\bar{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -100 + 2/100b_1 \geq 0 \\ 200 - 3/100b_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2/100b_1 \geq 100 \\ -3/100b_1 \geq -200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \geq 5000 \\ b_1 \leq 20000/3 \end{cases} \Leftrightarrow b_1 \in [5000, 20000/3]$$

Assim o intervalo de sensibilidade para quantidade mínima de azoto a entrar na constituição do fertilizante é dado por $[5000, 20000/3]$. Para cada $b_1 \in [5000, 20000/3]$ a solução ótima é dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-100 + 2/100b_1, 200 - 3/100b_1, 0, 0, 0)$$

com $z = 5000 + b_1$.

c) Introdução de uma nova variável

Seja x_6 a variável que representa o número de quilos do produto D que devem ser adicionados à matéria orgânica. A solução dada com $x_6 = 0$ mantém-se ótima se

$$\bar{c}_6 \geq 0 \Leftrightarrow c_6 - \pi^T A_{\cdot 6} \geq 0$$

Mas π é dado pelo sistema linear

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 200 & 300 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (\text{por a)})$$

Donde

$$\bar{c}_6 = 140 - \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = 140 - (100 + 50) = 140 - 150 = -10$$

Deste modo, a solução dada deixou de ser ótima. Para determinarmos a solução ótima associada ao programa linear com esta alteração, vamos começar por determinar o quadro do simplex associado às variáveis básicas x_1 e x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		→
x_4	200	100	200	-1	0	100	6000	$1/200L_1$
x_5	300	200	100	0	-1	100	10000	$L_2 - 3/2L_1$
$-z$	350	200	300	0	0	140	0	$L_3 - 7/4L_1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		→
x_1	1	1/2	1	-1/200	0	1/2	30	$L_1 - 1/100L_2$
x_5	0	50	-200	3/2	-1	-50	1000	$1/50L_2$
$-z$	0	25	-50	7/4	0	-35	-10500	$L_3 - 1/2L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	1	0	3	$-2/100$	$1/100$	1	20	
x_2	0	1	-4	$3/100$	$-2/100$	-1	20	$L_2 + L_1$
$-z$	0	0	50	1	$1/2$	-10	-11000	$L_3 + 10L_1$

A solução básica associada a este quadro é primal admissível e dual não admissível e por isso vamos usar o método simplex. A variável a entrar na base é dada pelo critério

$$\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_j; \bar{c}_j < 0 \text{ e } j \in L\} = \min\{-10\} = -10 \Rightarrow s = 6$$

e a variável x_6 deve entrar na base. A variável a sair da base é dada pelo critério do quociente mínimo

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0\right\} = \min\left\{\frac{20}{1}\right\} = \min\{20\} = 20 \Rightarrow r = 1$$

e variável básica da linha $r = 1$, com índice $t = 1$, deve sair da base. O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{6, 2\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_6	1	0	3	$-2/100$	$1/100$	1	20
x_2	1	1	-1	$1/100$	$-1/100$	0	40
$-z$	10	0	80	$8/10$	$6/10$	0	-10800

A solução básica admissível associada a este quadro satisfaz o critério de optimalidade e o algoritmo simplex termina com a solução óptima

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 40, 0, 0, 0, 20)$$

com $z = 10800$.



INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO DE VISEU
2ª Frequência de Investigação Operacional – Contabilidade e Administração

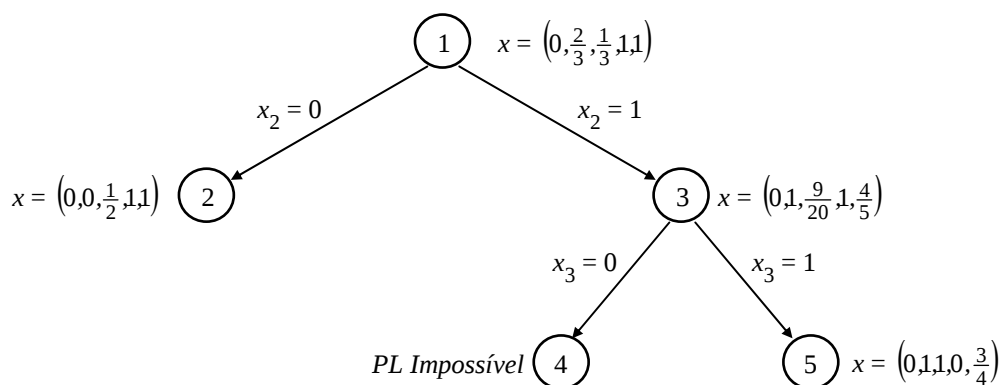
Duração: 1h00m

01/07/2005

1. Durante a resolução do problema binário puro

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 \\ \text{Sujeito a } &x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 \geq 1 \\ &-2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 8 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

obteve-se a árvore binária



com $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

- Indique os valores actuais para os limites inferior e superior do valor de z .
- Diga, justificando, em que nós não se procede a ramificação.
- Faça a ramificação de um dos nós resolvendo os problemas correspondentes.
- Face aos resultados obtidos diga, justificando, se já conhece o valor óptimo de z do problema dado.

Resolução:

- a) Os valores da função objectivo do programa binário puro nos nós 2 e 5 são dados por

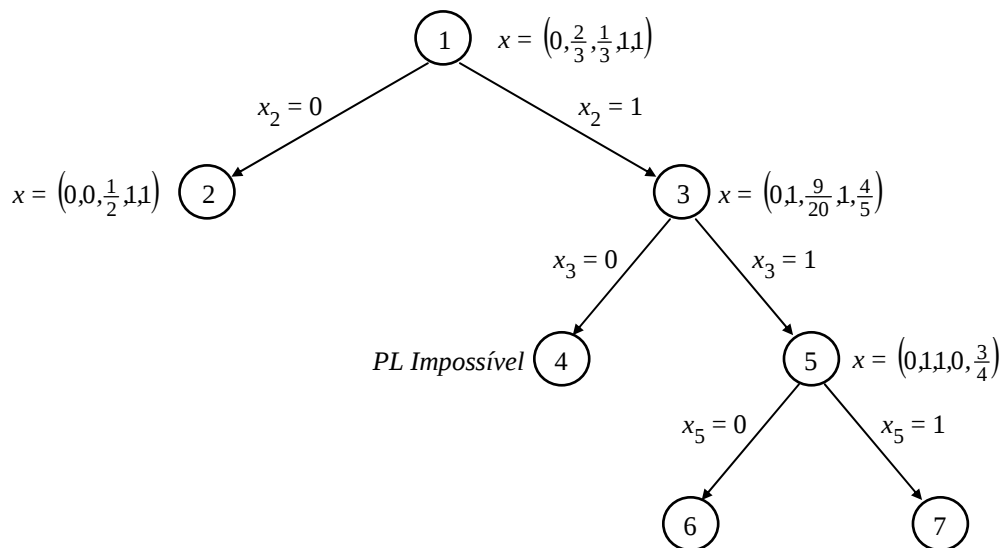
$$z^l(2) = 2 \times 0 - 0 + 7 \times \frac{1}{2} + 3 \times 1 + 2 \times 1 = \frac{17}{2} = 8,5$$

$$z^l(5) = 2 \times 0 - 1 + 7 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Deste modo, os limites inferior z^l e superior z^u para o valor de z são dados por

$$z^l = 7,5 \quad \text{e} \quad z^u = +\infty$$

- Não se ramifica o nó 4, porque o programa linear associado a este nó é inadmissível.
- Vamos ramificar o nó do nível mais elevado que tiver menor valor de z^l



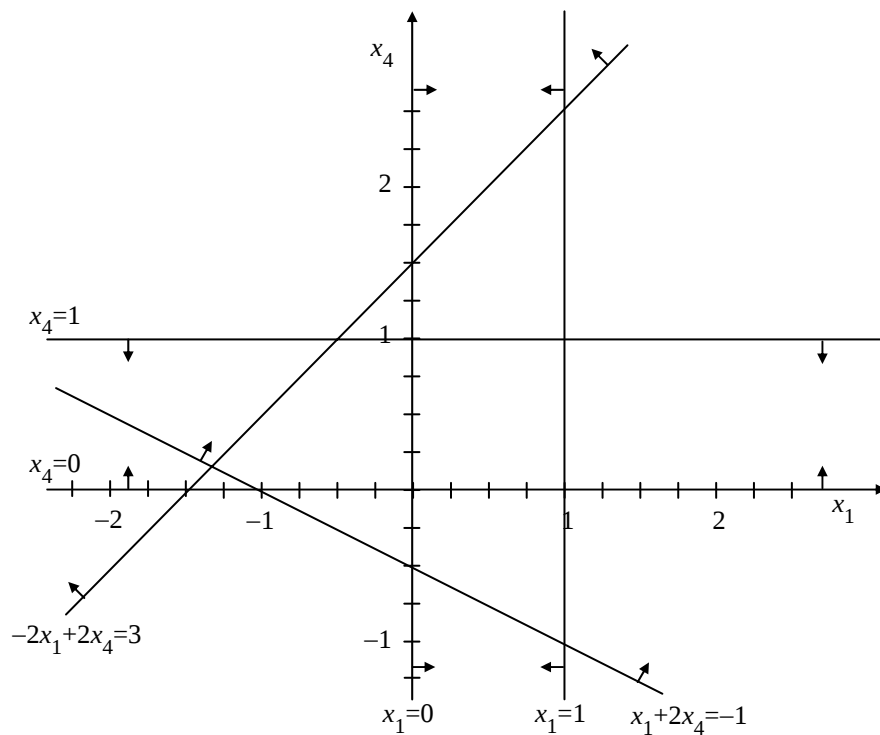
No nó 6 temos de resolver o programa linear

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } z = 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 \\
 &\text{Sujeito a} \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 \geq 1 \\
 &\quad \quad \quad -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 8 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &\quad \quad \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_5 = 0
 \end{aligned}$$

Este programa linear tem três variáveis fixas e por isso reduz-se a um problema com duas variáveis

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } z = 2x_1 + 3x_4 + 6 \\
 &\text{Sujeito a} \quad x_1 + 2x_4 \geq -1 \\
 &\quad \quad \quad -2x_1 + 2x_4 \geq 3 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_4 \leq 1
 \end{aligned}$$

Agora vamos resolver este problema graficamente



O conjunto admissível do programa linear é vazio e o problema é impossível.

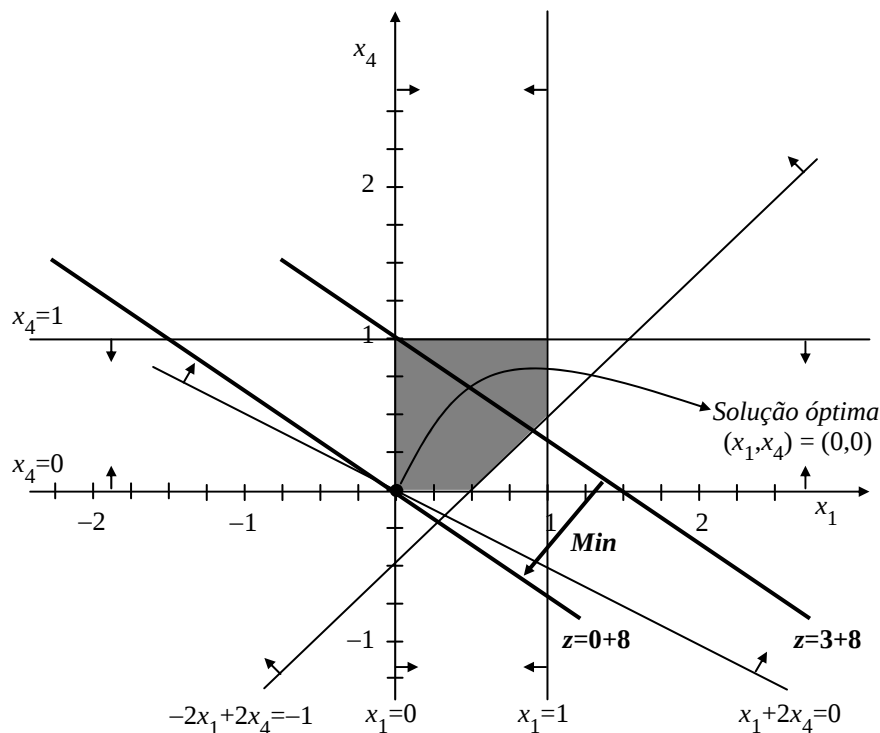
No nó 7 temos de resolver o programa linear

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } z = 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 \\
 &\text{Sujeito a} \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 \geq 1 \\
 &\quad \quad \quad -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 8 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &\quad \quad \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_5 = 1
 \end{aligned}$$

Este programa linear tem três variáveis fixas e por isso reduz-se a um problema com duas variáveis

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } z = 2x_1 + 3x_4 + 8 \\
 &\text{Sujeito a} \quad x_1 + 2x_4 \geq 0 \\
 &\quad \quad \quad -2x_1 + 2x_4 \geq -1 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_4 \leq 1
 \end{aligned}$$

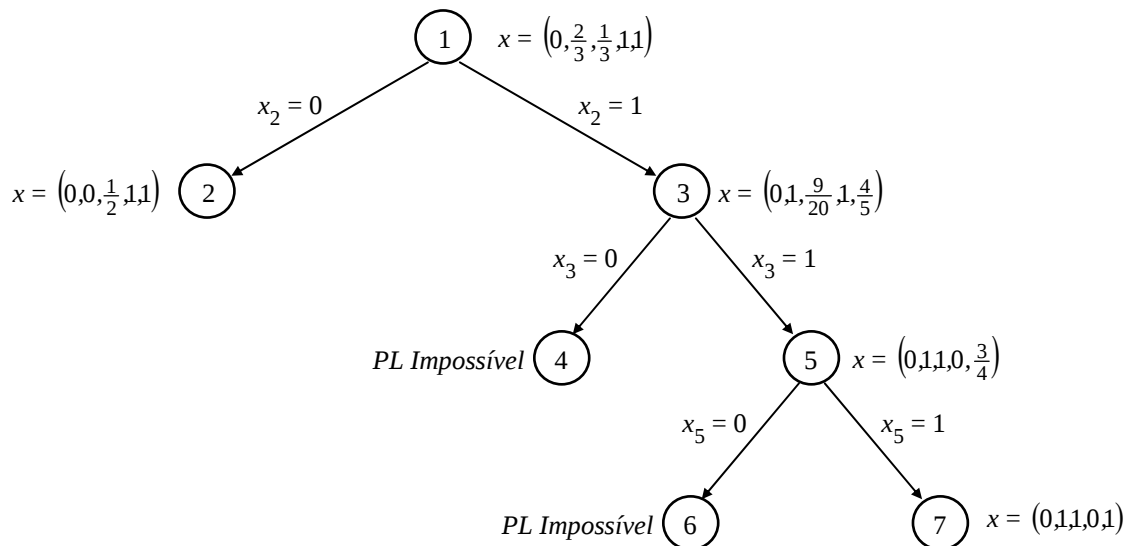
Agora vamos resolver este problema graficamente



Deste modo, a solução ótima do programa linear associado ao nó 7 é dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 1, 0, 1) \text{ com } z^l(7) = 8 = z^u$$

A ramificação obtida é a seguinte



d) Não se ramificam os nós 4 e 6, porque os programas lineares associados a estes nós são inadmissíveis. Não se ramifica o nó 7, porque a solução associada a este nó é admissível para o programa binário puro. Não se ramifica o nó 2, porque a solução associada a esse nó não é melhor que a melhor das soluções admissíveis do programa binário puro. Assim o processo de ramificação está concluído, sendo a solução ótima do programa binário dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 1, 0, 1)$$

com $z = 8$.

2. Um armazém de electrodomésticos efectua encomendas mensais de 240 frigoríficos. Actualmente o armazenista permite uma rotura máxima de 20 unidades. O custo de lançamento de cada encomenda é de 100 euros, sendo o custo de cada frigorífico de 300 euros. A taxa de posse anual foi estimada em 20% e a taxa de rotura em 40%.

- a) Para a actual política de stockagem, calcule o seu custo total mensal e faça a representação gráfica com dois ciclos completos.
- b) Proponha uma política óptima à empresa, indicando o seu custo total mensal e representação gráfica com dois ciclos completos.

Resolução:

Modelo de gestão de stocks com reposição instantânea e penúria permitida

Taxa de procura: $r = 240$ unidades/mês

Custo fixo de encomenda: $A = 100$ Euros

Custo unitário do produto: $C_1 = 300$ Euros

Custo unitário mensal de stockagem: $C_2 = \frac{0,20}{12} \times 300 = 5$ Euros

Custo unitário mensal de rotura: $C_3 = \frac{0,40}{12} \times 300 = 10$ Euros

- a) Política actual ($Q = 240$, $S = 20$, $T = 1$)

O custo total mensal é dado por

$$K = \frac{Ar}{Q} + C_1 r + \frac{C_2}{2} \frac{(Q-S)^2}{Q} + \frac{C_3}{2} \frac{S^2}{Q} =$$

$$= \frac{100 \times 240}{240} + 300 \times 240 + \frac{5}{2} \times \frac{(240-20)^2}{240} + \frac{10}{2} \times \frac{20^2}{240} = 72612,5 \text{ Euros}$$

Para representarmos graficamente o sistema temos de calcular T_1 e T_2

$$T_1 = (Q - S)/r = (240 - 20)/240 = 0,91667 \text{ meses} = 27,5 \text{ dias}$$

$$T_2 = S/r = 20/240 = 0,0833 \text{ meses} = 2,5 \text{ dias}$$

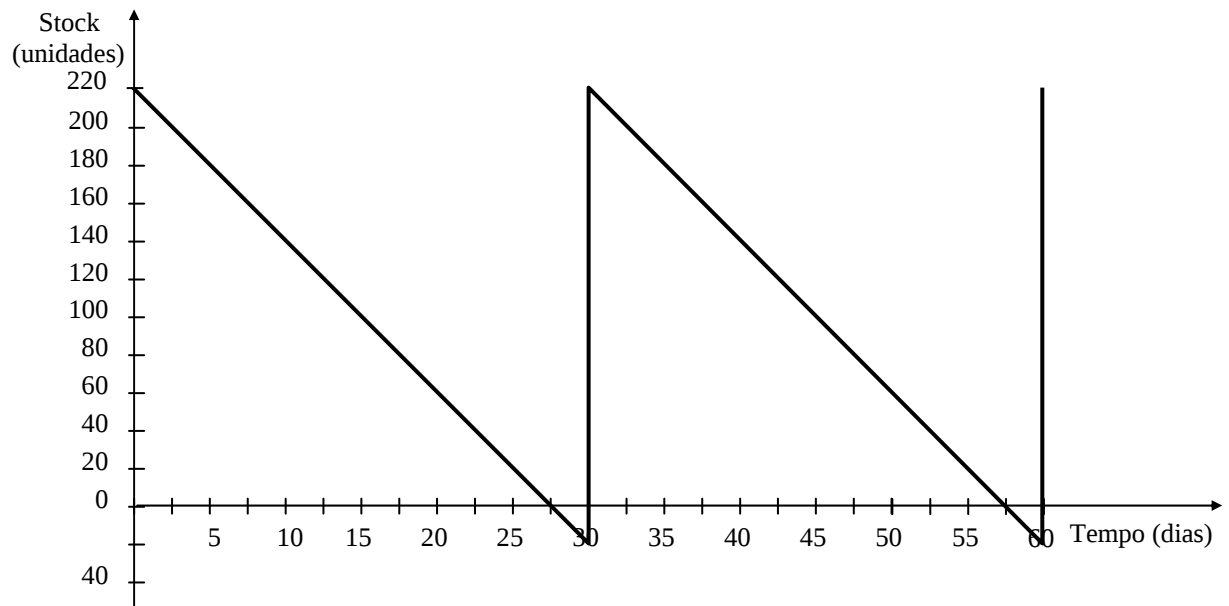
Além disso temos de calcular

$$T_1 = 27,5 \text{ dias}$$

$$T_1 + T_2 = T = 30 \text{ dias}$$

$$T + T_1 = 57,5 \text{ dias}$$

$$T + T_1 + T_2 = 2T = 60 \text{ dias}$$



b) Política ótima

O volume de encomenda ótimo é dado por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} \sqrt{1 + \frac{C_2}{C_3}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 240}{5}} \sqrt{1 + \frac{5}{10}} = 120 \text{ unidades}$$

O nível máximo de carteira de encomendas é dado por

$$S^* = \sqrt{2ArC_2} \frac{1}{\sqrt{C_3(C_2 + C_3)}} = \sqrt{2 \times 100 \times 240 \times 5} \frac{1}{\sqrt{10(5 + 10)}} = 40 \text{ unidades}$$

O custo total mensal é dado por

$$\begin{aligned} K &= \frac{Ar}{Q^*} + C_1 r + \frac{C_2}{2} \frac{(Q^* - S^*)^2}{Q^*} + \frac{C_3}{2} \frac{(S^*)^2}{Q^*} = \\ &= \frac{100 \times 240}{120} + 300 \times 240 + \frac{5}{2} \times \frac{(120 - 40)^2}{120} + \frac{10}{2} \times \frac{40^2}{120} = 72400 \text{ Euros} \end{aligned}$$

Para representarmos graficamente o sistema temos de calcular T_1 e T_2

$$T_1^* = (Q^* - S^*)/r = 80/240 = 0,3333 \text{ meses} = 10 \text{ dias}$$

$$T_2^* = S^*/r = 40/240 = 0,1667 \text{ meses} = 5 \text{ dias}$$

$$Q^* - S^* = 120 - 40 = 80 \text{ unidades}$$

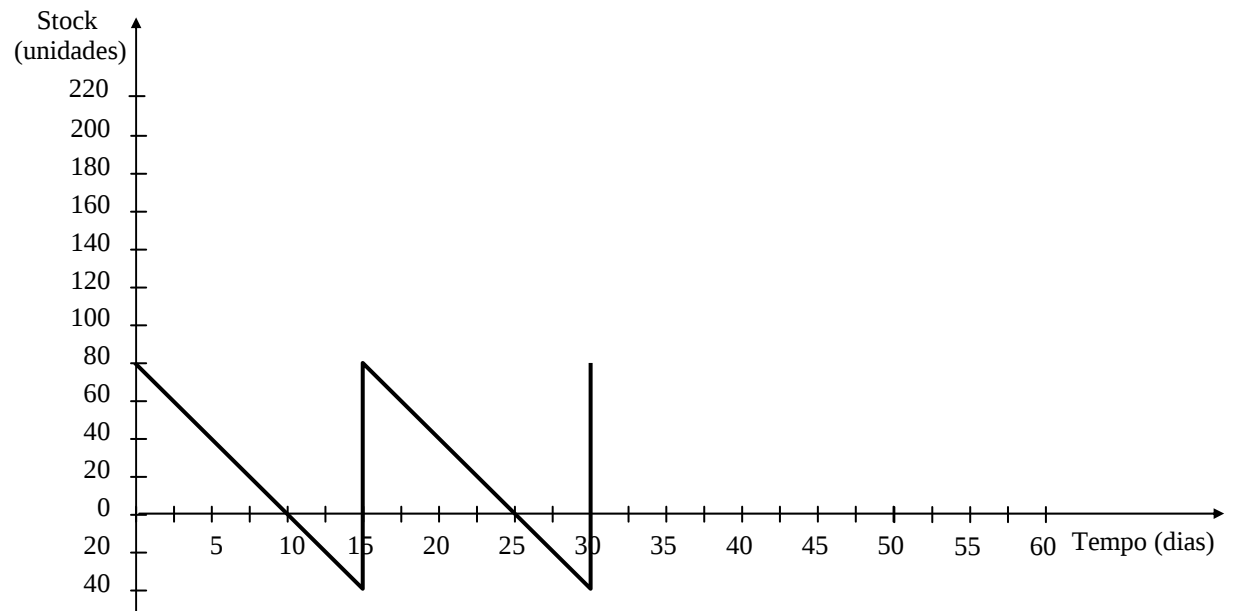
Além disso temos de calcular

$$T_1^* = 10 \text{ dias}$$

$$T_1^* + T_2^* = T = 15 \text{ dias}$$

$$T^* + T_1^* = 25 \text{ dias}$$

$$T^* + T_1^* + T_2^* = 2T^* = 30 \text{ dias}$$





INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO DE VISEU
Exame de Investigação Operacional – Contabilidade e Administração

Duração: 3h00m

19/07/2005

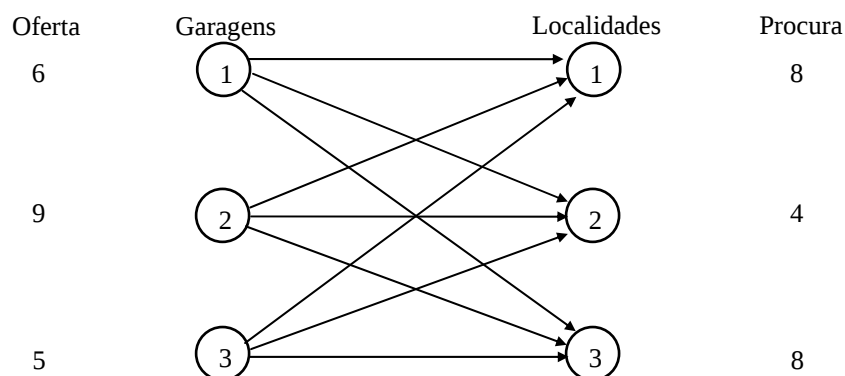
1. Em períodos de ponta o Director de tráfego da RODOVIA vê-se frequentemente perante o problema de afectar os autocarros de passageiros estacionados em três garagens da empresa a três localidades da sua rede de exploração. Os dados seguintes representam o número de autocarros usualmente necessários em cada uma das localidades e o número de minutos necessários para um autocarro atingir uma localidade via cada rota possível.

Garagens	Localidades			Autocarros disponíveis
	L_1	L_2	L_3	
G_1	12	14	13	6
G_2	14	12	15	9
G_3	19	18	19	5
Autocarros necessários	8	4	8	20

O Director de tráfego pretende afectar os autocarros disponíveis a fim de minimizar o tempo total necessário para se atingir aquelas três localidades. Formule o problema em termos de programação matemática.

Resolução:

Este problema pode ser formulado como um problema de transportes em que as origens 1, 2 e 3 representam, respectivamente, as garagens G_1 , G_2 e G_3 e os destinos 1, 2 e 3 representam, respectivamente, as localidades L_1 , L_2 e L_3 . As ofertas das origens correspondem aos autocarros disponíveis nas garagens e as procuras dos destinos correspondem aos autocarros necessários nas localidades.



As variáveis principais vão ser definidas por x_{ij} que representam o número de autocarros que o director de tráfego vai afectar da garagem G_i ($i=1,2,3$) à localidade L_j ($j=1,2,3$). É de notar que o número total de autocarros disponíveis nas três garagens é igual ao número total de autocarros necessários nas três localidades. Deste modo, para que sejam satisfeitas integralmente as procuras dos autocarros, as ofertas das garagens vão ser totalmente esgotadas.

Neste problema, tem que se garantir que o número de autocarros existente em cada garagem G_i ($i=1,2,3$) vai ser totalmente afectado às três localidades, ou seja, que

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 6$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 9$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 5$$

Se representarmos por a_i ($i=1,2,3$) o número de autocarros disponíveis na garagem G_i , este conjunto de restrições pode ser escrito de uma forma equivalente

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Em segundo lugar, tem que se garantir que a soma dos autocarros afectados à localidade L_j ($j=1,2,3$) deve ser igual ao número de autocarros necessários, e portanto

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 8$$

Se representarmos por b_j ($j=1,2,3$) o número de autocarros necessários na localidade L_j , este conjunto de restrições é equivalente a

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

O número de autocarros a afectar de cada garagem a cada localidade deve ser, naturalmente, inteiro e não negativo, isto é

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3.$$

O custo total de afectação é igual à soma dos custos de afectação dos autocarros de cada garagem a cada localidade

$$z = 12x_{11} + 14x_{12} + 13x_{13} + 14x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} + 19x_{31} + 18x_{32} + 19x_{33}$$

Se representarmos por c_{ij} o custo de afectar um autocarro da garagem G_i à localidade L_j , o custo de afecta x_{ij} autocarros da garagem G_i à localidade L_j é $c_{ij}x_{ij}$ e o custo total de afectação é dado por

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

Tendo em conta as restrições do problema, obtém-se a seguinte formulação

$$\text{Minimize } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

onde m representa o número garagens e n o número de localidades.

2. Resolva o programa linear

$$\text{Maximize } z = 6x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$\text{Sujeito a } 7x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$-5x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 12$$

$$-x_1 + x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resolução:

O programa linear é equivalente a

$$\text{Maximize } z = 6x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

$$\text{Sujeito a } 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$

$$-5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 12$$

$$-x_1 + x_3 - x_6 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Em primeiro lugar vamos calcular uma solução básica. O quadro de simplex associado a este problema é dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	7	1	2	1	0	0	60	
	-5	-2	2	0	-1	0	12	$-L_2$
	-1	0	1	0	0	-1	20	$-L_3$
$-z$	6	2	-5	0	0	0	0	

Efectuando as operações elementares indicadas à direita deste quadro obtemos o seguinte quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	
x_4	7	1	2	1	0	0	0	60
x_5	5	2	-2	0	1	0	-1	-12
x_6	1	0	-1	0	0	1	-1	-20
$-z$	6	2	-5	0	0	0	0	0

A solução básica associada a este quadro é primal não admissível e dual não admissível e por isso vamos usar o método das duas fases. Na Fase I introduzimos no quadro anterior a variável x_0 com coeficientes 0 quando a variável é admissível e (-1) quando é não admissível. De seguida usamos o seguinte critério para a determinação da variável básica que troca com x_0

$$\frac{\bar{b}_k}{p_k} = \max \left\{ \frac{\bar{b}_i}{p_i} : p_i < 0 \right\} = \max \left\{ \frac{-12}{-1}, \frac{-20}{-1} \right\} = \max \{12, 20\} = 20 \Rightarrow k = 3$$

e a variável básica da linha $k = 3$, com índice $t = 6$, deve trocar com a variável não básica x_0 . O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{4, 5, 0\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0		
x_4	7	1	2	1	0	0	0	60	$L_1 - 2L_3$
x_5	4	2	-1	0	1	-1	0	8	$L_2 + L_3$
x_0	-1	0	1	0	0	-1	1	20	
$-z$	6	2	-5	0	0	0	0	0	$L_4 + 5L_3$

Como existem $\bar{a}_{kj}$ positivos, devemos começar por escolher a variável a entrar na base que é dada pelo critério

$$\bar{a}_{ks} = \max \{ \bar{a}_{kj} : \bar{a}_{kj} > 0 \text{ e } j \in L \} = \max \{1\} = 1 \Rightarrow s = 3$$

e a variável x_3 deve entrar na base. A variável a sair da base é dada pelo critério do quociente mínimo

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{60}{2}, \frac{20}{1} \right\} = \min \{30, 20\} = 20 \Rightarrow r = 3$$

e variável básica da linha $r = 3$, com índice $t = 0$, deve sair da base. O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{4, 5, 3\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0		
x_4	9	1	0	1	0	2	-2	20	$L_1 - 1/2L_2$
x_5	3	2	0	0	1	-2	1	28	$1/2L_2$
x_3	-1	0	1	0	0	-1	1	20	
$-z$	1	2	0	0	0	-5	5	100	$L_4 - L_2$

Como x_0 saiu da base, a solução básica associada a este quadro é admissível e passamos à Fase II, eliminando a coluna de x_0 . Como existem $\bar{c}_j$ positivos, a solução básica não é óptima. A variável a entrar na base é dada pelo critério

$$\bar{c}_s = \max \{ \bar{c}_j : \bar{c}_j > 0 \text{ e } j \in L \} = \max \{1, 2\} = 2 \Rightarrow s = 2$$

e a variável x_2 deve entrar na base. A variável a sair da base é dada pelo critério do quociente mínimo

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{20}{1}, \frac{28}{2} \right\} = \min \{20, 14\} = 14 \Rightarrow r = 2$$

e variável básica da linha $r = 2$, com índice $t = 5$, deve sair da base. O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{4, 2, 3\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		→
x_4	15/2	0	0	1	-1/2	3	6	
x_2	3/2	1	0	0	1/2	-1	14	
x_3	-1	0	1	0	0	-1	20	
$-z$	-2	0	0	0	-1	-3	72	

A solução básica admissível associada a este quadro satisfaz o critério de optimalidade e o algoritmo simplex termina com a solução óptima

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 14, 20, 6, 0, 0)$$

com $z = -72$.

3. Uma empresa de brinquedos de madeira pretende produzir três novos brinquedos: carros, comboios e casas. A produção destes brinquedos requer mão de obra especializada: carpintaria e acabamentos. A produção de um carro requer uma hora de carpintaria e uma hora de acabamentos. A produção de um comboio requer três horas de carpintaria e duas de acabamentos. A produção de uma casa requer duas de carpintaria e uma de acabamentos. A empresa tem dez empregados na secção de carpintaria e sete na secção de acabamentos, sendo o horário semanal de qualquer um dos empregados de 40 horas. Com a venda dos carros, comboios e casas a empresa tem um lucro líquido unitário de 40 u. m., 100 u. m. e 50 u. m., respectivamente. A formulação do problema conduziu ao seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= 40x_1 + 100x_2 + 50x_3 \\ \text{Sujeito a} \quad &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 400 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 280 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

onde x_1 , x_2 e x_3 representam, respectivamente, os números de carros, comboios e casas a produzir. Na resolução do programa linear obteve-se a solução óptima $(x_1, x_2, x_3) = (40, 120, 0)$ com $z = 13\,600$.

- Escreva o dual do programa linear.
- Determine por aplicação da propriedade dos desvios complementares a solução óptima para o dual.
- Escreva o par de problemas na forma normal e indique as suas soluções óptimas.
- Interprete economicamente a solução dual.
- Faça a análise de sensibilidade do número de horas disponíveis na secção de carpintaria.
- A empresa está a estudar o lançamento de um novo brinquedo. Este brinquedo necessita de duas horas na secção de carpintaria e de três horas na secção de acabamentos e possibilita um lucro líquido unitário de 90 u. m.. Diga, justificando, se a solução dada se mantém óptima. Em caso negativo, determine o novo plano óptimo a partir da solução dada.

Resolução:

a) No problema primal a função objectivo é de maximização. Como as restrições do primal são todas de “=” e de “≤” e as variáveis são todas livres e não negativas, podemos construir o dual directamente. As duas restrições de “≤” no primal correspondem no dual a duas variáveis não negativas e as três variáveis não negativas no primal correspondem no dual a três restrições de “≥”. Esquemáticamente temos

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximize } z = & 40x_1 + 100x_2 + 50x_3 \\
 & (\geq) \quad (\geq) \quad (\geq) \\
 \text{Sujeito a} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 400 \quad (y_1 \geq 0) \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 280 \quad (y_2 \geq 0) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Deste modo, o dual é definido por

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimize } w = & 400y_1 + 280y_2 \\
 \text{Sujeito a} & y_1 + y_2 \geq 40 \\
 & 3y_1 + 2y_2 \geq 100 \\
 & 2y_1 + y_2 \geq 50 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

b) Na solução óptima do primal tem-se $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$. Donde, a primeira e a segunda restrições do dual são satisfeitas pela solução óptima como igualdades. Ou seja

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 40 \\ 3y_1 + 2y_2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 40 - y_2 \\ 3(40 - y_2) + 2y_2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 40 - y_2 \\ 120 - 3y_2 + 2y_2 = 100 \end{cases} \begin{cases} y_1 = 20 \\ y_2 = 20 \end{cases}$$

Deste modo a solução óptima do dual é dada por

$$(y_1, y_2) = (20, 20)$$

com $w = 13\,600$.

c) A forma normal do programa primal é definida por

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximize } z = & 40x_1 + 100x_2 + 50x_3 \\
 \text{Sujeito a} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 400 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 280 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

A solução óptima deste programa é dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (40, 120, 0, 0, 0) \quad \text{com} \quad z = 13\,600.$$

A forma normal do programa dual é definida por

$$\begin{array}{llllll}
 \text{Minimize } w = & 400y_1 & + & 280y_2 & & \\
 \text{Sujeito a} & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & = & 40 \\
 & 3y_1 & + & 2y_2 & & - & y_4 & = & 100 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & & & - & y_5 & = & 50 \\
 & & & & & & & & & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
 \end{array}$$

A solução ótima deste programa é dada por

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (20, 20, 0, 0, 10) \quad \text{com} \quad w = 13\,600.$$

d) Vamos fazer a interpretação económica da solução do dual

- $y_1 = 20$, significa que o preço sombra da secção de carpintaria é de 20 unidades monetárias, ou seja, por cada hora de aumento na capacidade desta secção obtém-se um acréscimo no lucro de 20 unidades monetárias e por cada hora de decréscimo obtém-se uma diminuição no lucro de 20 unidades monetárias;
- $y_2 = 20$, significa que o preço sombra da secção de acabamentos é de 20 unidades monetárias, ou seja, por cada hora de aumento na capacidade desta secção obtém-se um acréscimo no lucro de 20 unidades monetárias e por cada hora de decréscimo obtém-se uma diminuição no lucro de 20 unidades monetárias;
- $y_3 = 0$, significa que o custo de oportunidade de produção de carros é nulo, pois o plano ótimo indica que este brinquedo deve ser produzido;
- $y_4 = 0$, significa que o custo de oportunidade de produção comboios é nulo, pois o plano ótimo indica este brinquedo deve ser produzido;
- $y_5 = 10$, significa que o custo de oportunidade de produção casas é de 10 unidades monetárias, ou seja, por cada casa produzida obtém-se um decréscimo do lucro total em 10 unidades monetárias;

e) Intervalo de sensibilidade de um termo independente das restrições

A determinação do intervalo de sensibilidade do número de horas disponíveis na secção de carpintaria equivale à determinação de todos os valores que o termo independente da primeira restrição pode tomar de modo a que a base da solução ótima permaneça inalterada. Seja b_1 o parâmetro que indica o valor que o termo independente da primeira restrição pode tomar. A base da solução dada mantém-se ótima se

$$\bar{b} \geq 0$$

Mas $\bar{b}$ é dado pelo sistema linear

$$B\bar{b} = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 280 \end{bmatrix}$$

Agora vamos resolver este sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan

$$[B | b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 1 & 2 & 280 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 280 - b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 + 3L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 840 - 2b_1 \\ 0 & 1 & -280 + b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 840 - 2b_1 \\ -280 + b_1 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\bar{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 840 - 2b_1 \geq 0 \\ -280 + b_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \leq 420 \\ b_1 \geq 280 \end{cases} \Leftrightarrow b_1 \in [280, 420]$$

Assim o intervalo de sensibilidade para a capacidade da secção de carpintaria é [280, 420].

f) Introdução de uma nova variável

Seja x_6 a variável que representa o número brinquedos novos que devem ser produzidos. A solução dada com $x_6 = 0$ mantém-se ótima se

$$\bar{c}_6 \leq 0 \Leftrightarrow c_6 - \pi^T A_{\cdot 6} \leq 0$$

Mas π é dado pelo sistema linear

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Agora vamos resolver este sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan

$$[B^T | c_J] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 40 \\ 3 & 2 & 100 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & -20 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 20 \end{array} \right] \Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\bar{c}_6 = 90 - \begin{bmatrix} 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 90 - (40 + 60) = 90 - 100 = -10$$

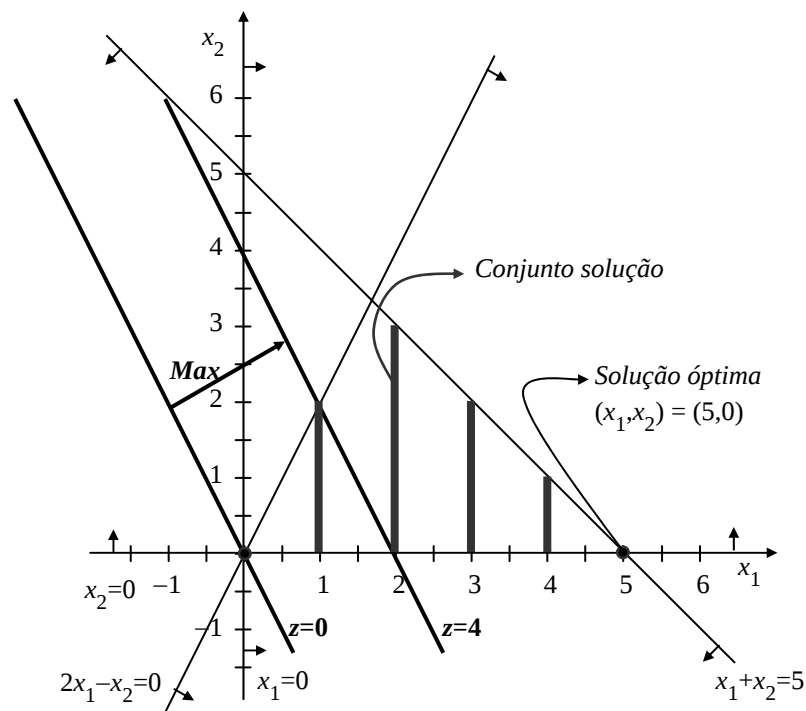
Deste modo, a solução dada com $x_6 = 0$ mantém-se ótima.

4. Resolva graficamente o programa inteiro misto

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a } &2x_1 - x_2 \geq 0 \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \\ &x_1 \text{ inteiro} \end{aligned}$$

Resolução:

Vamos então resolver o problema graficamente



Assim, a solução óptima é dada por

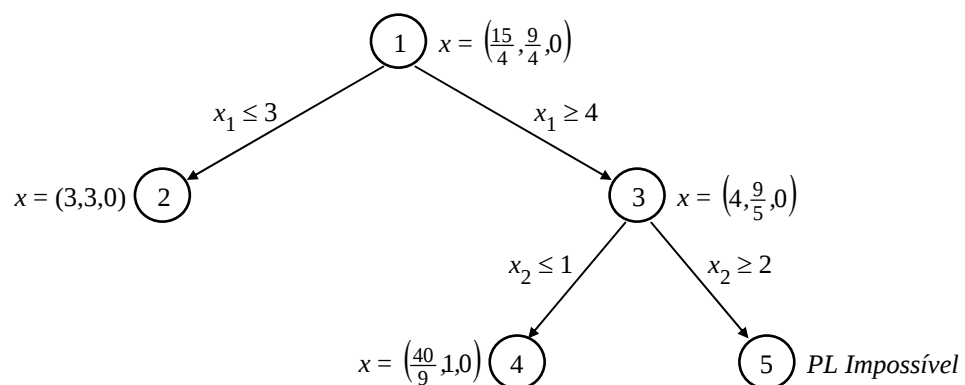
$$(x_1, x_2) = (5, 0)$$

com $z = 10$.

5. Durante a resolução do problema inteiro puro

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= 8x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a } &x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ &9x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

obteve-se a árvore binária



com $x = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Indique os valores actuais para os limites inferior e superior do valor de z .

- b) Diga, justificando, em que nós não se procede a ramificação.
- c) Faça a ramificação de um dos nós e indique os problemas correspondentes aos nós obtidos.

Resolução:

- a) Os valores da função objectivo do programa inteiro puro nos nós 2 e 4 são dados por

$$z^u(2) = 8 \times 3 + 5 \times 3 - 2 \times 0 = 39$$

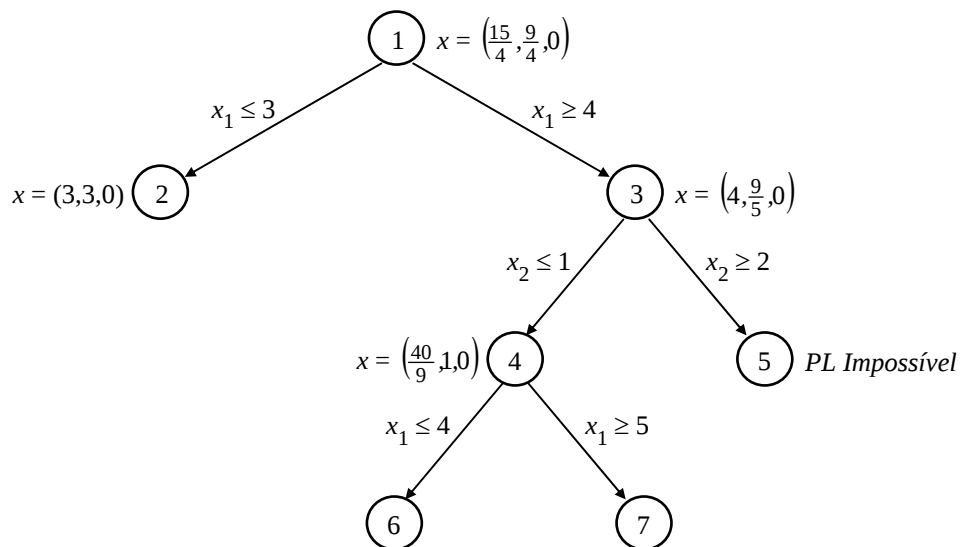
$$z^u(4) = 8 \times \frac{40}{9} + 5 \times 1 - 2 \times 0 = \frac{365}{9} = 40,5556$$

Deste modo, os limites inferior z^l e superior z^u para o valor de z são dados por

$$z^l = 39 \quad \text{e} \quad z^u = \frac{365}{9}$$

- b) Não se ramifica o nó 5, porque o programa linear associado a este nó é inadmissível. Não se ramifica o nó 2, porque a solução associada a esse nó é admissível para o programa inteiro puro.

- c) Vamos ramificar o nó do nível mais elevado que tiver maior valor de z^u



No nó 6 temos de resolver o programa linear

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= 8x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a } &x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ &9x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ &4 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ora $4 \leq x_1 \leq 4$ é equivalente a $x_1 = 4$ e o programa linear reduz-se a um problema de duas variáveis

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize } z &= 5x_2 - 2x_3 + 32 \\
 \text{Sujeito a } &x_2 + x_3 \leq 2 \\
 &5x_2 + 2x_3 \leq 9 \\
 &0 \leq x_2 \leq 1, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

No nó 7 temos de resolver o programa linear

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize } z &= 8x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
 \text{Sujeito a } &x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
 &9x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 45 \\
 &x_1 \geq 5, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

6. Uma empresa pretende definir a política de gestão do seu stock de um dado material M . O aprovisionamento de M é feito de uma forma que se pode considerar instantânea, com um custo de 10 000\$00 por tonelada de M encomendada, mais 2 000\$00 de custo fixo e independente da dimensão do lote. O custo de stockagem por tonelada e mês é de 400\$00 e a empresa, embora admitindo a possibilidade de rotura de M , não possui qualquer estimativas dos custos de rotura, sendo no entanto de crer que estes custos são apenas função da quantidade total em falta (não dependendo portanto do tempo de carência). As necessidades semanais de M rondam as 10 toneladas.

Foram propostas as duas alternativas seguintes:

P_1 – não se admitindo penúria, encomendas mensais de 40 toneladas;

P_2 – admitindo-se uma penúria máxima de 5 toneladas, encomendas de 20 toneladas de 2 em 2 semanas.

- Designando por C o custo de penúria por unidade em falta, discuta condições de preferência entre P_1 e P_2 em função de C .
- Não admitindo penúria, procure definir, justificando, uma política de stockagem óptima.

Resolução:

Modelo de gestão de stocks com reposição instantânea e penúria permitida / não permitida

Taxa de procura: $r = 10$ toneladas/semana

Custo fixo de encomenda: $A = 2000$ escudos

Custo unitário do material: $C_1 = 10000$ escudos

Custo unitário semanal de stockagem: $C_2 = \frac{400}{4} = 100$ escudos

Custo unitário rotura: $C_3 = C$ escudos

- a) Alternativa P_1 – penúria não permitida ($T = 4$, $Q = 40$)

O custo total semanal é dado por

$$K = \frac{Ar}{Q} + C_1 r + C_2 \frac{Q}{2} = \frac{2000 \times 10}{40} + 10000 \times 10 + 100 \times \frac{40}{2} = 102500 \text{ escudos}$$

Alternativa P_2 – penúria permitida ($T = 2$, $Q = 20$, $S = 5$)

O custo total por ciclo (2 semanas) é dado por

$$\begin{aligned} C_T &= A + C_1 Q + C_2 \frac{(Q-S)r_1}{2} + C_3 S = A + C_1 Q + C_2 \frac{(Q-S)(Q-S)}{2r} + C_3 S = \\ &= 2000 + 10000 \times 20 + 100 \frac{(20-5)}{2} \frac{(20-5)}{10} + C \times 5 = (203125 + 5C) \text{ escudos} \end{aligned}$$

O custo total por semana é dado por

$$K = \frac{C_T}{T} = \frac{(203125 + 5C)}{2} = (101562,5 + 2,5C) \text{ escudos}$$

Conclusão: A alternativa P_1 é melhor que a alternativa P_2 se

$$102500 < 101562,5 + 2,5C \Leftrightarrow 2,5C > 937,5 \Leftrightarrow C > 375$$

A alternativa P_1 é pior que a alternativa P_2 se

$$102500 > 101562,5 + 2,5C \Leftrightarrow 2,5C < 937,5 \Leftrightarrow C < 375$$

A alternativa P_1 é igual à alternativa P_2 se

$$102500 = 101562,5 + 2,5C \Leftrightarrow 2,5C = 937,5 \Leftrightarrow C = 375$$

b) Política de stockagem óptima com reposição instantânea e penúria não permitida

O volume de encomenda óptimo é dado por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 10}{100}} = 20 \text{ toneladas}$$

A amplitude do ciclo óptimo é dada por

$$T^* = Q^*/r = 20/10 = 2 \text{ semanas}$$

Donde, a política de stockagem óptima consiste em encomendar 20 toneladas de material M de 2 em 2 semanas. O custo total semanal é dado por

$$K^* = \frac{Ar}{Q^*} + C_1 r + C_2 \frac{Q^*}{2} = \frac{2000 \times 10}{20} + 10000 \times 10 + 100 \times \frac{20}{2} = 102000 \text{ escudos.}$$

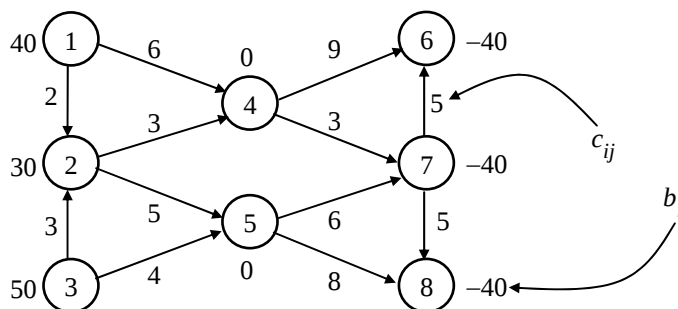


INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO DE VISEU
Exame de Investigação Operacional – Contabilidade e Administração

Duração: 3h00m

13/09/2005

1. Considere o problema da determinação do fluxo de custo mínimo na seguinte rede



onde o número real b_i associado a cada nó i representa a quantidade de fluxo requerido e o número real c_{ij} associado a cada aresta (i,j) representa o custo unitário. Formule o problema em termos de programação matemática.

Resolução:

Para formularmos o problema, comecemos por definir os conjuntos de nós N e de arcos A da rede

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{(1,2), (1,4), (2,4), (2,5), (3,2), (3,5), (4,6), (4,7), (5,7), (5,8), (7,6), (7,8)\}$$

e representemos por x_{ij} ($(i,j) \in A$) a quantidade de fluxo que atravessa o arco (i,j) .

A diferença entre a quantidade de fluxo que chega ao nó i ($i=1,2,\dots,10$) e a quantidade que sai do nó i é igual ao requerimento desse mesmo nó i . Esta condição pode ser traduzida pelas seguintes restrições

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{14} &= 40 \\ x_{24} + x_{25} - x_{12} - x_{32} &= 30 \\ x_{32} + x_{35} &= 50 \\ x_{46} + x_{47} - x_{14} - x_{24} &= 0 \\ x_{57} + x_{58} - x_{25} - x_{35} &= 0 \\ -x_{46} - x_{76} &= -40 \\ x_{76} + x_{78} - x_{47} - x_{57} &= -40 \\ -x_{58} - x_{78} &= -40 \end{aligned} \Leftrightarrow \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i \quad i \in N$$

com b_i ($i \in N$) o requerimento do nó i . A quantidade de fluxo que atravessa o arco (i,j) é não negativa, ou seja

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in A.$$

O custo total de passagem de fluxo é igual à soma dos custos de passagem de fluxo associados a cada arco. Se representarmos por c_{ij} o custo de passagem de uma unidade de fluxo do nó i para o nó j , o custo de passagem de x_{ij} unidades de fluxo do nó i para o nó j é $c_{ij}x_{ij}$ e o custo total é dado por

$$z = 2x_{12} + 6x_{14} + 3x_{24} + 5x_{25} + 3x_{32} + 4x_{35} + 9x_{46} + 3x_{47} + 6x_{57} + 8x_{58} + 5x_{76} + 5x_{78} = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

O programa linear contínuo associado a este problema é definido por

$$\text{Minimize } z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i \quad (i \in N)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in A$$

2. Resolva o programa linear

$$\text{Maximize } z = 12x_1 + 4x_2 - 10x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a } \quad & 7x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & -x_1 + x_3 \geq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolução:

O programa linear é equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= 12x_1 + 4x_2 - 10x_3 \\ \text{Sujeito a } \quad & 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\ & -x_1 + x_3 - x_5 = 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_6 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Em primeiro lugar vamos calcular uma solução básica. O quadro de simplex associado a este problema é dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		→
x_4	7	1	2	1	0	0	30	
	-1	0	1	0	-1	0	10	$-L_2$
x_6	5	2	-2	0	0	1	-6	
$-z$	12	4	-10	0	0	0	0	

Efectuando as operações elementares indicadas à direita deste quadro obtemos o seguinte quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0		→
x_4	7	1	2	1	0	0	0	30	
x_5	1	0	-1	0	1	0	-1	-10	$-L_2$
x_6	5	2	-2	0	0	1	-1	-6	$L_3 - L_2$
$-z$	12	4	-10	0	0	0	0	0	

A solução básica associada a este quadro é primal não admissível e dual não admissível e por isso vamos usar o método das duas fases. Na Fase I introduzimos no quadro anterior a variável x_0 com coeficientes 0 quando a variável é admissível e (-1) quando é não admissível. De seguida usamos o seguinte critério para a determinação da variável básica que troca com x_0

$$\frac{\bar{b}_k}{p_k} = \max \left\{ \frac{\bar{b}_i}{p_i} : p_i < 0 \right\} = \max \left\{ \frac{-10}{-1}, \frac{-6}{-1} \right\} = \max \{10, 6\} = 10 \Rightarrow k = 2$$

e a variável básica da linha $k = 2$, com índice $t = 5$, deve trocar com a variável não básica x_0 . O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{4, 0, 6\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0		
x_4	7	1	2	1	0	0	0	30	$L_1 - 2L_2$
x_0	-1	0	1	0	-1	0	1	10	
x_6	4	2	-1	0	-1	1	0	4	$L_3 + L_2$
$-z$	12	4	-10	0	0	0	0	0	$L_4 + 10L_2$

Como existem $\bar{a}_{kj}$ positivos, devemos começar por escolher a variável a entrar na base que é dada pelo critério

$$\bar{a}_{ks} = \max \{ \bar{a}_{kj} : \bar{a}_{kj} > 0 \text{ e } j \in L \} = \max \{1\} = 1 \Rightarrow s = 3$$

e a variável x_3 deve entrar na base. A variável a sair da base é dada pelo critério do quociente mínimo

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{30}{2}, \frac{10}{1} \right\} = \min \{15, 10\} = 10 \Rightarrow r = 2$$

e variável básica da linha $r = 2$, com índice $t = 0$, deve sair da base. O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{4, 3, 6\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0		
x_4	9	1	0	1	2	0	-2	10	$L_1 - 1/2L_3$
x_3	-1	0	1	0	-1	0	1	10	
x_6	3	2	0	0	-2	1	1	14	$1/2L_3$
$-z$	2	4	0	0	-10	0	10	100	$L_4 - 2L_3$

Como x_0 saiu da base, a solução básica associada a este quadro é admissível e passamos à Fase II, eliminando a coluna de x_0 . Como existem $\bar{c}_j$ positivos, a solução básica não é ótima. A variável a entrar na base é dada pelo critério

$$\bar{c}_s = \max \{ \bar{c}_j : \bar{c}_j > 0 \text{ e } j \in L \} = \max \{2, 4\} = 4 \Rightarrow s = 2$$

e a variável x_2 deve entrar na base. A variável a sair da base é dada pelo critério do quociente mínimo

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{10}{1}, \frac{14}{2} \right\} = \min \{10, 7\} = 7 \Rightarrow r = 3$$

e variável básica da linha $r = 3$, com índice $t = 6$, deve sair da base. O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{4, 3, 2\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		→
x_4	15/2	0	0	1	3	-1/2	3	
x_3	-1	0	1	0	-1	0	10	
x_2	3/2	1	0	0	-1	1/2	7	
$-z$	-4	0	0	0	-6	-2	72	

A solução básica admissível associada a este quadro satisfaz o critério de optimalidade e o algoritmo simplex termina com a solução óptima

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 7, 10, 3, 0, 0)$$

com $z = -72$.

3. Uma fábrica de objectos de decoração pretende lançar no mercado três novos tipos de objectos. Estes objectos irão passar por duas secções: secção de corte com uma capacidade de 200 horas e secção de polimento com uma capacidade de 140 horas. A produção de um objecto do tipo 1 requer quatro horas na secção de corte e duas horas na secção de polimento. A produção de um objecto do tipo 2 requer uma hora na secção de corte e uma hora na secção de polimento. A produção de um objecto do tipo 3 requer três horas na secção de corte e duas horas na secção de polimento. Com a venda dos objectos dos tipos 1, 2 e 3 a fábrica tem um lucro líquido unitário de 50 u. m., 20 u. m. e 50 u. m., respectivamente. A formulação do problema conduziu ao seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize } z &= 50x_1 + 20x_2 + 50x_3 \\
 \text{Sujeito a} \quad &4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 200 \\
 &2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140 \\
 &x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

onde x_1 , x_2 e x_3 representam, respectivamente, os números de objectos dos tipos 1, 2 e 3 a produzir. A solução óptima deste problema indica que a fábrica deve produzir apenas dois tipos de objectos, 20 unidades de objectos do tipo 2 e 60 do tipo 3.

- Faça a análise de sensibilidade do lucro líquido unitário do objecto do tipo 3.
- Determine o intervalo de sensibilidade da capacidade da secção de corte.
- A empresa pretende aumentar a capacidade da secção de corte em 20 horas. Diga, justificando, se a solução dada se mantém óptima. Em caso negativo, determine o novo plano óptimo a partir da solução dada.

Resolução:

O programa linear dado é equivalente a

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize } z &= 50x_1 + 20x_2 + 50x_3 \\
 \text{Sujeito a} \quad &4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\
 &2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 140 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

A solução óptima deste programa linear é dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 20, 60, 0, 0)$$

As variáveis básicas desta solução são x_2 e x_3 .

a) Intervalo de sensibilidade de um coeficiente de uma variável básica na função objectivo

A determinação do intervalo de sensibilidade para o lucro líquido unitário do objecto do tipo 3 equivale à determinação de todos os valores que o coeficiente de custo associado à variável x_3 pode tomar de modo a que a solução óptima permaneça inalterada. Seja c_3 o parâmetro que indica o valor do coeficiente de custo da variável básica x_3 . A solução dada mantém-se óptima se

$$\begin{cases} \bar{c}_1 \leq 0 \\ \bar{c}_4 \leq 0 \\ \bar{c}_5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - \pi^T A_1 \leq 0 \\ c_4 - \pi^T A_4 \leq 0 \\ c_5 - \pi^T A_5 \leq 0 \end{cases}$$

Mas π é dado pelo sistema linear

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} 20 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Agora vamos resolver este sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan

$$[B^T | c_J] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & c_3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & c_3 - 60 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 + L_2 \\ -L_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_3 - 40 \\ 0 & 1 & -c_3 + 60 \end{array} \right] \Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} c_3 - 40 \\ -c_3 + 60 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \bar{c}_1 \leq 0 \\ \bar{c}_4 \leq 0 \\ \bar{c}_5 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 50 - [c_3 - 40 \quad -c_3 + 60] \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}^T \leq 0 \\ 0 - [c_3 - 40 \quad -c_3 + 60] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \leq 0 \\ 0 - [c_3 - 40 \quad -c_3 + 60] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50 - (4c_3 - 160 - 2c_3 + 120) \leq 0 \\ 0 - (c_3 - 40) \leq 0 \\ 0 - (-c_3 + 60) \leq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 90 - 2c_3 \leq 0 \\ 40 - c_3 \leq 0 \\ -60 + c_3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 \geq 45 \\ c_3 \geq 40 \\ c_3 \leq 60 \end{cases} \Leftrightarrow c_3 \in [45, 60]
 \end{aligned}$$

Assim o intervalo de sensibilidade para o lucro líquido unitário do objecto do tipo 3 é $[45, 60]$.

b) Intervalo de sensibilidade de um termo independente das restrições

A determinação do intervalo de sensibilidade da capacidade da secção de corte equivale à determinação de todos os valores que o termo independente da primeira restrição pode tomar de modo a que a base da solução óptima permaneça inalterada. Seja b_1 o parâmetro que indica o valor que o termo independente da primeira restrição pode tomar. A base da solução dada mantém-se óptima se

$$\bar{b} \geq 0$$

O vector $\bar{b}$ é dado pelo sistema linear

$$B\bar{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 140 \end{bmatrix}$$

Agora vamos resolver este sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan

$$[B | b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 1 & 2 & 140 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & 140 - b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 + 3L_2 \\ -L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 420 - 2b_1 \\ 0 & 1 & -140 + b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 420 - 2b_1 \\ -140 + b_1 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\bar{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 420 - 2b_1 \geq 0 \\ -140 + b_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \leq 210 \\ b_1 \geq 140 \end{cases} \Leftrightarrow b_1 \in [140, 210]$$

Assim o intervalo de sensibilidade da capacidade da secção de corte é $[140, 210]$.

c) Alteração de um termo independente das restrições

Se a empresa pretende aumentar a capacidade da secção de corte em 20 horas, o termo independente da primeira restrição deve ser alterado de $b_1 = 200$ para $b_1 = 220$. Por b), sabemos que o intervalo de sensibilidade para este termo é $[140, 210]$ e, por isso, a base da solução dada deixou de ser admissível. Para determinarmos a solução óptima associada ao programa linear com esta alteração, vamos começar por determinar o quadro do simplex associado às variáveis básicas x_2 e x_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_4	4	1	3	1	0	220	
x_5	2	1	2	0	1	140	$L_2 - L_1$
$-z$	50	20	50	0	0	0	$L_3 - 20L_1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_2	4	1	3	1	0	220	$L_1 + 3L_2$
x_5	-2	0	-1	-1	1	-80	$-L_2$
$-z$	-30	0	-10	-20	0	-4400	$L_3 - 10L_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_2	-2	1	0	-2	3	-20	$-1/2L_1$
x_3	2	0	1	1	-1	80	$L_2 + L_1$
$-z$	-10	0	0	-10	-10	-3600	$L_3 - 5L_1$

Como a solução associada a este quadro é primal não admissível e dual admissível, vamos usar o método dual do simplex. A variável a sair da base é determinada a partir do critério

$$\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i : \bar{b}_i < 0\} = \min\{-20\} = -20 \Rightarrow r = 1$$

e a variável da linha $r = 1$, com índice $t = 2$, deve sair da base. A variável a entrar na base é determinada a partir do critério do quociente mínimo

$$\left| \frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} \right| = \min \left\{ \left| \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} \right| : \bar{a}_{rj} < 0, j \in J \right\} = \min \left\{ \left| \frac{-10}{-2} \right|, \left| \frac{-10}{-2} \right| \right\} = \min\{5, 5\} = 5 \Rightarrow s = 1$$

e a variável x_1 deve entrar na base. O conjunto de índices de variáveis básicas é actualizado para $J = \{1, 3\}$ e o quadro de simplex associado a este conjunto é obtido a partir do último quadro, efectuando as operações elementares indicadas à direita do mesmo quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-1/2	0	1	-3/2	10
x_3	0	1	1	-1	2	60
$-z$	0	-5	0	0	-25	-3500

A solução básica dual admissível associada a este quadro satisfaz o critério de admissibilidade e por isso o algoritmo dual termina com a solução óptima

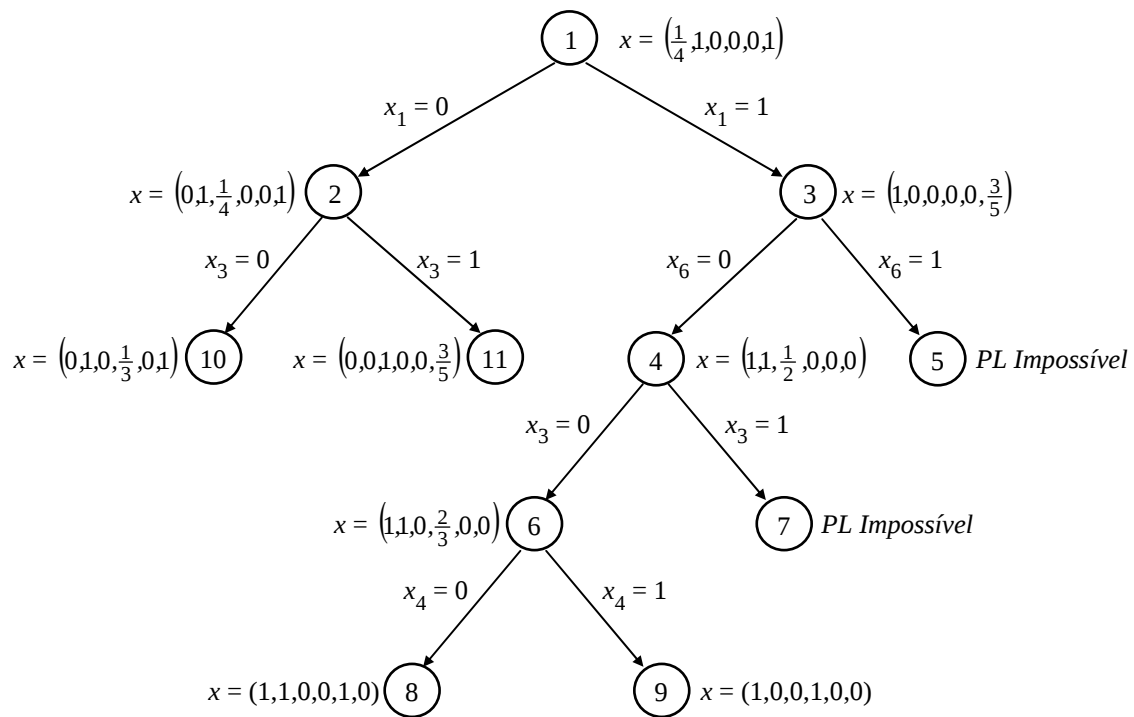
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (10, 0, 60, 0, 0)$$

com $z = 3500$.

4. Durante a resolução do problema binário puro

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 3x_5 + 60x_6 \\ \text{Sujeito a } &40x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 10x_5 + 50x_6 \leq 70 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

obteve-se a árvore binária



com $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

- Indique os valores actuais para os limites inferior e superior do valor de z .
- Diga, justificando, em que nós não se procede a ramificação.
- Faça a ramificação de um dos nós e indique os problemas correspondentes aos nós obtidos.
- Sejam $x = (0, 1, 0, 0, 1, 1)$ e $x = (0, 0, 0, 1, 0, 4/5)$ as soluções óptimas dos programas lineares indicados em c). Face aos resultados obtidos diga, justificando, se já conhece o valor óptimo de z do problema dado.

Resolução:

- Os valores da função objectivo do programa binário puro nos nós 8, 9, 10 e 11 são dados por

$$z^u(8) = 40 \times 1 + 10 \times 1 + 20 \times 0 + 10 \times 0 + 3 \times 1 + 60 \times 0 = 53 = z^l$$

$$z^u(9) = 40 \times 1 + 10 \times 0 + 20 \times 0 + 10 \times 1 + 3 \times 0 + 60 \times 0 = 50 = z^l$$

$$z^u(10) = 40 \times 0 + 10 \times 1 + 20 \times 0 + 10 \times \frac{1}{3} + 3 \times 0 + 60 \times 1 = \frac{220}{3} = 73,3333$$

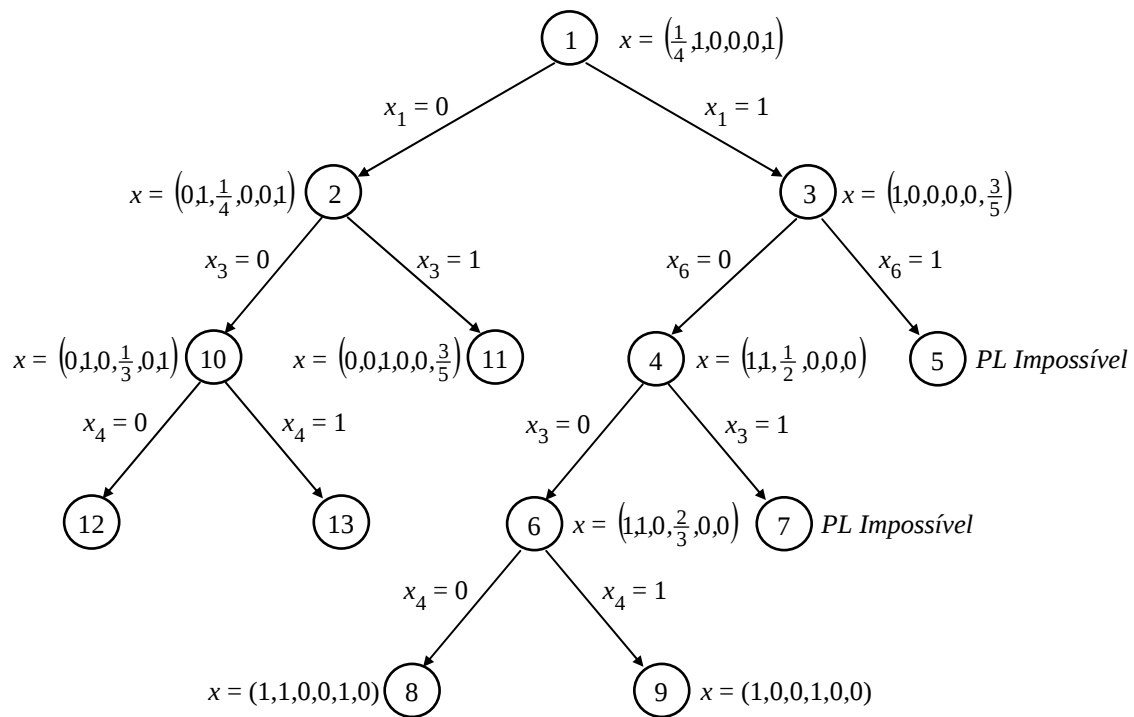
$$z^u(11) = 40 \times 0 + 10 \times 0 + 20 \times 1 + 10 \times 0 + 3 \times 0 + 60 \times \frac{3}{5} = 56$$

Deste modo, os limites inferior z^l e superior z^u para o valor de z são dados por

$$z^l = 53 \quad \text{e} \quad z^u = \frac{220}{3}$$

b) Não se ramificam os nós 5 e 7, porque os programas lineares associados a estes nós são inadmissíveis. Não se ramificam os nós 8 e 9, porque as soluções associadas a esses nós são admissíveis para o programa binário puro.

- Vamos ramificar o nó do nível mais elevado que tiver maior valor de z^u



No nó 12 temos de resolver o programa linear

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } z = 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 3x_5 + 60x_6 \\
 & \text{Sujeito a } 40x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 10x_5 + 50x_6 \leq 70 \\
 & 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 & x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0
 \end{aligned}$$

Este programa linear tem três variáveis fixas e por isso reduz-se a um problema com três variáveis

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } z = 10x_2 + 3x_5 + 60x_6 \\
 & \text{Sujeito a } 10x_2 + 10x_5 + 50x_6 \leq 70 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_5 \leq 1, \quad 0 \leq x_6 \leq 1
 \end{aligned}$$

No nó 13 temos de resolver o programa linear

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } z = 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 3x_5 + 60x_6 \\
 & \text{Sujeito a } 40x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 10x_5 + 50x_6 \leq 70 \\
 & 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 & x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1
 \end{aligned}$$

Este programa linear tem três variáveis fixas e por isso reduz-se a um problema com três variáveis

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } z = 10x_2 + 3x_5 + 60x_6 + 10 \\
 & \text{Sujeito a } 10x_2 + 10x_5 + 50x_6 \leq 40 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_5 \leq 1, \quad 0 \leq x_6 \leq 1
 \end{aligned}$$

d) Sejam $x = (0,1,0,0,1,1)$ e $x = (0,0,0,1,0,4/5)$ as soluções ótimas dos programas lineares associados aos nós 12 e 13. Então

$$z''(12) = 40 \times 0 + 10 \times 1 + 20 \times 0 + 10 \times 0 + 3 \times 1 + 60 \times 1 = 73$$

$$z''(13) = 40 \times 0 + 10 \times 0 + 20 \times 0 + 10 \times 1 + 3 \times 0 + 60 \times \frac{4}{5} = 58$$

Por b), não se ramificam os nós 5, 7, 8 e 9. Não se ramifica o nó 12, porque a solução associada a este nó é admissível para o programa binário puro. Não se ramifica os nós 11 e 13, porque as soluções associadas a esses nós não são melhores que a melhor das soluções admissíveis do programa binário puro. Assim o processo de ramificação está concluído, sendo a solução ótima do programa binário dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, 0, 0, 1, 1)$$

com $z = 73$.

5. Um Departamento de Aprovisionamento de um banco pretende planear a compra de papel A4 que necessita. Cada resma de papel tem um preço base de 3 euros. No entanto, sabe-se que o fornecedor está disposto a conceder um desconto de 5% se forem compradas pelo menos 200 resmas, um desconto de 7% se forem compradas pelo menos 300 resmas e um desconto de 9% se forem compradas pelo menos 400 resmas. Anualmente este departamento necessita de 800 resmas de papel, sendo o custo associado à passagem de uma encomenda de 32 euros e a taxa de posse anual de 20%. Determine a política ótima e o respectivo custo. Faça a representação gráfica com dois ciclos completos.

Resolução:

Modelo de gestão de stocks com reposição instantânea e penúria não permitida: descontos de quantidade

Taxa de procura: $r = 800$ resmas/ano

Custo fixo de encomenda: $A = 32$ contos

$$\text{Custo unitário do produto: } C_1 = \begin{cases} 3 & \text{se } Q < 200 \\ 2,85 & \text{se } 200 \leq Q < 300 \\ 2,79 & \text{se } 300 \leq Q < 400 \\ 2,73 & \text{se } Q \geq 400 \end{cases}$$

$$\text{Custo unitário anual de stockagem: } C_2 = \begin{cases} 0,6 & \text{se } Q < 200 \\ 0,57 & \text{se } 200 \leq Q < 300 \\ 0,558 & \text{se } 300 \leq Q < 400 \\ 0,546 & \text{se } Q \geq 400 \end{cases}$$

(i) Para $Q \geq 400$ tem-se

O volume de encomenda ótimo é dado por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 800}{0,546}} = 306,2236 \text{ resmas} \notin [400, +\infty[$$

O custo total anual correspondente a $Q = 400$

$$K = \frac{Ar}{Q} + C_1 r + C_2 \frac{Q}{2} = \frac{32 \times 800}{400} + 2,73 \times 800 + 0,546 \times \frac{400}{2} = 2357,2 \text{ Euros}$$

(ii) Para $Q \in [300, 400[$ tem-se

O volume de encomenda óptimo é dado por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 800}{0,558}} = 302,9130 \text{ resmas} \in [300, 400[$$

O custo total anual correspondente a $Q = 302,9130$

$$K = \frac{Ar}{Q} + C_1 r + C_2 \frac{Q}{2} = \frac{32 \times 800}{302,9130} + 2,79 \times 800 + 0,558 \times \frac{302,9130}{2} = 2401,0254 \text{ Euros}$$

(iii) Para $Q \in [200, 300[$ tem-se

O volume de encomenda óptimo é dado por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 800}{0,57}} = 299,7075 \text{ resmas} \in [200, 300[$$

O custo total anual correspondente a $Q = 299,7075$

$$K = \frac{Ar}{Q} + C_1 r + C_2 \frac{Q}{2} = \frac{32 \times 800}{299,7075} + 2,85 \times 800 + 0,57 \times \frac{299,7075}{2} = 2450,8333 \text{ Euros}$$

(iv) Para $Q < 200$ tem-se

O volume de encomenda óptimo é dado por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 800}{0,6}} = 292,1187 \text{ resmas} \in]-\infty, 200]$$

e a solução óptima não está neste intervalo

De (i), (ii), (iii) e (iv) conclui-se que a política óptima corresponde a um volume de encomenda óptimo $Q^* = 400$ toneladas, sendo o custo total anual de $K^* = 2357,2$ euros. A periodicidade das encomendas é dada por

$$T^* = Q^*/r = 400/800 = 0,5 \text{ anos} = 6 \text{ meses}$$

